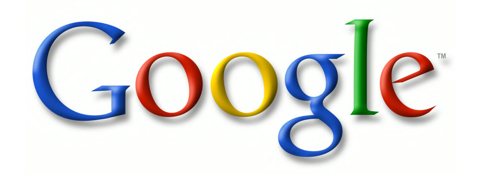
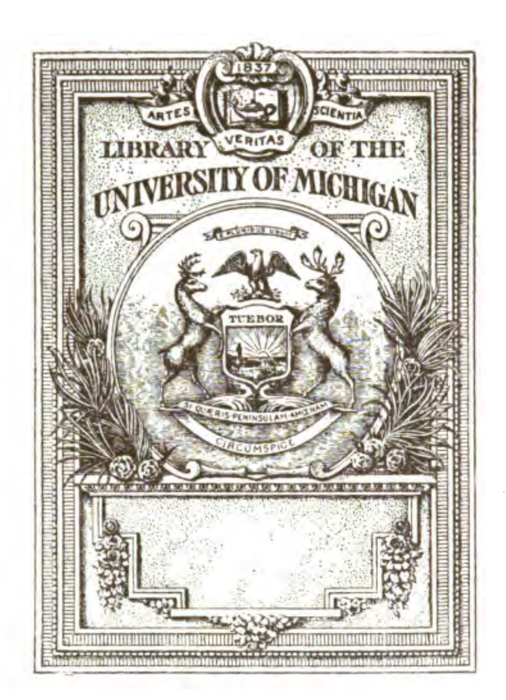



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



Lehrbuch

der

Mechanik

von

S. D. Poisson

Mitglied des Instituts, des Längenbüreaus und der französischen Universität, der gelehrten Gesellschaften zu London, Edinburg, der berliner Akademie u. s. w.

Nach der

zweiten sehr vermehrten Ausgabe

übersetzt

von

Moriz A. Stern.

Erster Theil.

Berlin 1835.

Verlegt bei G. Reimer.

Vorrede des Verfassers.

Da dieses Werk auch beim Unterrichte gebraucht werden kann, so habe ich sehr oft Einzelnheiten ausführlich behandeln und die Ordnung befolgen müssen, welche zur Erleichterung des Verständnisses am geeignetsten war. Die in diesem Werke befolgte Ordnung wird jetzt bei den Vorlesungen über Mechanik in der polytechnischen Schule angewandt. Man kann sich eine genaue Uebersicht davon verschaffen, wenn man die, beiden Bänden vorausgeschickten, Inhaltsverzeichnisse durchgeht. Ich habe mich beflissen, viele Beispiele zur Aufklärung der allgemeinen Theorien zu geben; die meisten habe ich aus der Astronomie und Physik, einige auch aus der Geschützkunde entlehnt.

Die wesentlichste Bestimmung dieses Werkes ist die, als Einleitung zu einem Lehrbuche der mathematischen Physik zu dienen, von welchem schon die neue Theorie der Haarröhrchenkraft, die ich bereits früher herausgegeben habe, einen Theil ausmacht; die anderen Theile werden aus verschiedenen Abhandlungen, die ich geschrieben habe, bestehen, die sich sowohl mit dem Gleichgewichte und der Bewegung der elastischen Körper und der Flüssigkeiten, als auch mit den imponderablen Flüssigkeiten beschäftigen und die ich vereinigen und so vollständig, als ich kann, machen werde.

Am Ende des zweiten Theils findet man einen Zusatz rücksichtlich des Gebrauchs des Princips der lebendigen Kräfte bei der Berechnung von Maschinen, die in Bewegung sind.

Vorwort des Uebersetzers.

Dieses Lehrbuch der Mechanik ist schon seit seinem Erscheinen im Jahre 1811 allgemein als classisch anerkannt worden. Da es in dieser zweiten Ausgabe so bedeutend umgestaltet worden ist, dafs es als ein ganz neues Werk erscheint, so glaube ich, mir bei Vielen, welchen das Original nicht leicht zugänglich ist, durch die Uebersetzung desselben Dank verdient zu haben, wiewohl wir eine Uebersetzung der ersten Ausgabe besitzen. Ich habe mir erlaubt, gelegentlich manche Bemerkungen einzustreuen; namentlich wird man am Ende des ersten Theils einige Zusätze finden.

In der ganzen Einleitung lese man statt Berührungsebene Krümmungsebene und statt berührender Kreis Krümmungskreis, ebenso S. 24 Z. 20 v. u. statt der Berührungskreis der Krümmungskreis und S. 25 Z. 20 v. u. statt Berührungsebene Krümmungsebene.

Inhaltsverzeichnifs
des ersten Bandes.

Einleitung.

Zweites Buch.

Dynamik.

Erster Theil.

welcher diese zwei geraden Linien liegen, und einer festen Ebene, die durch die zweite geht, enthalten ist.

5.

Um die Kräfte zu messen, muſs man eine bestimmte Kraft als Einheit annehmen, und das Verhältniſs anderer Kräfte zu dieser Kraft durch Zahlen ausdrücken. Man muſs daher auf eine bestimmte Weise erklären, was man unter einer Kraft verstehe, die einer andern gleich ist, oder was man darunter verstehe, wenn man sagt, eine Kraft sey zweimal, dreimal, viermal u. s. w. so groſs, als eine andere, ohne daſs hierbei die besondere Beschaffenheit dieser verschiedenen Ursachen der Bewegung in Betracht gezogen wird.

Zwei Kräfte sind gleich, wenn sie, in entgegengesetzten Richtungen, an einen materiellen Punkt, oder an zwei Punkte, die durch eine Linie von unveränderlicher Länge verbunden sind, angebracht, sich im Gleichgewichte halten.

Hat man bemerkt, daſs zwei Kräfte einander gleich sind, und bringt man sie alsdann, nach derselben Richtung, an denselben Punkt an, so hat man eine zweimal so groſse Kraft; vereinigt man auf dieselbe Weise drei gleiche Kräfte, so hat man eine dreifache, vereinigt man vier, so hat man eine vierfache Kraft u. s. w.

Wenn wir also in der Folge sagen werden, daſs eine Kraft, die an einen materiellen Punkt angebracht ist, ein gewisses Vielfaches einer anderen Kraft ist, so muſs man dies so verstehen, daſs die erste Kraft als die Summe einer Anzahl von Kräften angesehen werden kann, die der zweiten gleich sind und nach derselben Richtung wirken. Auf diese Weise werden die Kräfte, was auch sonst ihre besondere Beschaffenheit seyn mag, meſsbare Gröſsen, die man durch Zahlen ausdrücken kann, wie jede andere Art von Gröſsen, indem man sie auf eine Einheit ihrer Art bezieht. Ebenso kann man ihre Intensitäten durch Linien darstellen, die diesen Zahlen proportional sind, und die man auf ihre Richtungen aufträgt, indem man von dem Punkte ausgeht, an welchem sie angebracht sind; was den Vortheil hat, daſs man die Lehrsätze viel einfacher ausdrücken kann.

6.

Da auf diese Weise die Punkte, an welchen die Kräfte wirken, und ihre Intensitäten bestimmt sind, so brauchen wir nur noch ihre Richtungen zu betrachten.

Sey M (Fig. 1.) der Punkt, an welchem eine Kraft wirkt, die Linie MD bezeichne seine Richtung, so daſs diese Kraft den Punkt M, von M nach D zu bewegen sucht; durch den Punkt M ziehe man die rechtwinkligen Axen MA, MB, MC, die, im Allgemeinen, den Coordinatenaxen parallel und im Sinne der positiven Coordinaten gerichtet seyn werden. Ferner bezeichne man durch α, β, γ, die spitzen oder stumpfen Winkel, die die Linie MD mit diesen Axen einschlieſst, so daſs

$$AMD = \alpha, \quad BMD = \beta, \quad CMD = \gamma$$

ist, so behaupte ich, daſs diese Richtung vollkommen bestimmt seyn wird, wenn diese drei Winkel gegeben sind.

Denn, nimmt man blos Rücksicht auf die zwei Winkel α und β, so muſs sich die Linie MD zu gleicher Zeit auf zwei geraden Kegeln befinden, deren gemeinschaftliche Spitze der Punkt M ist, und deren Axen die geraden Linien MA und MB sind. Die Winkel α und β müssen daher so beschaffen seyn, daſs diese zwei Kegel sich schneiden können, welches alsdann in zwei Durchschnittslinien statt haben wird, die in einer auf der Ebene AMB senkrechten Ebene liegen, und die mit der Axe MC zwei Winkel einschlieſsen, von welchen der eine das Supplement des anderen ist. Die gerade Linie MD könnte also noch immer zwei verschiedene Lagen haben, da aber der Winkel γ ebenfalls gegeben ist, so weiſs man, ob er spitz oder stumpf ist, und man wird von diesen beiden Lagen diejenige auswählen können, die der Richtung der Kraft entspricht.

Diese Construction zeigt ferner, daſs die Winkel α, β, γ, nicht alle drei willkührlich angenommen werden können. Wirklich sind die Cosinus der Winkel, die eine gerade Linie MD mit drei rechtwinkligen Axen einschlieſst, durch die Gleichung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (1)$$

verbunden, die man beweist, indem man auf der geraden Linie MD, vom Punkte M aus, eine Linie nimmt, die der Einheit gleich ist, und ein rechtwinkliges Parallelopipedum

bildet, dessen Diagonale diese Linie ist, und dessen drei aneinander liegende Seiten auf den drei Axen MA, MB, MC genommen werden. Diese drei Seiten sind alsdann die Cosinus der Winkel α, β, γ, und da die Summe ihrer Quadrate dem Quadrate der Diagonale, nach einem bekannten Lehrsatze, gleich seyn muſs, so ergiebt sich hieraus die eben aufgestellte Gleichung.

7.

In diesem Lehrbuche soll die Theilung der Peripherie in 360°, des Grades in 60 Minuten und der Minute in 60 Secunden angenommen werden. Der Buchstabe π soll beständig gebraucht werden, um die halbe Peripherie vorzustellen, deren Halbmesser der Einheit gleich gesetzt wird, so daſs man

$$\pi = 3,1415926\ldots$$

hat. Der vierte Theil der Peripherie entspricht dem rechten Winkel, oder dem Winkel von 324000″; hieraus folgt, daſs die Länge des Bogens, der einem Winkel von einer gewissen Anzahl n von Secunden entspricht, das vierte Glied einer Proportion seyn wird, deren drei erste Glieder

$$\tfrac{1}{2}\pi,\ n,\ \text{und}\ 324000''$$

seyn werden. Bezeichnet man diese Länge durch ω, so hat man

$$\omega = \frac{n}{206264,8.}$$

Der gemeine Logarithme dieses beständigen Divisors ist

5,3144251.

Bei den numerischen Berechnungen muſs man immer die auf diese Weise berechneten Bogen statt der Winkel anwenden, wenn diese nicht unter den trigonometrischen Zeichen *sin*, *cos*, *tang*, enthalten sind.

Damit man mittelst der Winkel α, β, γ, die Richtung einer Kraft in allen möglichen Lagen um den Angriffspunkt vorstellen könne, ist es nothwendig und hinreichend, daſs sie sich von Null bis zu 180° einschlieſslich erstrecken. Wenn z. B. die Axe MC über der Ebene liegt, in welcher die beiden anderen Axen MA, MB enthalten sind, so muſs der Winkel γ gröſser oder kleiner als 90° seyn, je nachdem die gerade Linie MD über oder unter dieser Ebene liegt; er

wird = Null seyn, wenn die Linie MD mit der Linie MC zusammenfällt, und wird = 180° seyn, wenn MD mit der Verlängerung MC' der Linie MC zusammenfällt. Die Cosinus von α, β, γ, können daher positiv oder negativ seyn, ihre Sinus aber werden immer positiv seyn, weil diese Winkel nie größer als 180° werden.

Ueberhaupt ist es einleuchtend, wenn man die Verlängerung MD' der Linie MD betrachtet, daſs die Winkel, die sie mit den drei Axen einschlieſst, die Ergänzungen der Winkel α, β, γ sind. Setzt man daher

$$AMD' = \alpha', \; BMD' = \beta', \; CMD' = \gamma',$$

so hat man

$$\cos\alpha' = -\cos\alpha, \quad \cos\beta' = -\cos\beta, \quad \cos\gamma' = -\cos\gamma;$$

hieraus folgt, daſs die Richtungen zweier Kräfte, die in entgegengesetzten Sinne auf denselben Punkt M wirken, die eine nach MD, die andere nach MD', sich durch die Zeichen der Cosinus der ihnen entsprechenden Winkel unterscheiden.

8.

Statt der drei Winkel α, β, γ, die unter einander durch die Gleichung (1) verbunden sind, kann man auch nur zwei von einander unabhängige Winkel anwenden, um die Richtung einer Kraft zu bestimmen.

Denn es sey ME die Projection der Linie MD auf die Ebene AMB, man nenne δ den Winkel, den diese Projection mit der Axe MA macht, so daſs man

$$AME = \delta$$

hat. Ist dieser Winkel δ gegeben, so zeigt er die Lage der Ebene CME an, und durch den Winkel γ wird alsdann die Lage der Linie MD, die in dieser Ebene enthalten ist, völlig bestimmt. Der Winkel δ muſs alsdann, indem man von MA ausgeht, nach einer bestimmten Richtung gezählt werden, und sich von Null bis zu 360° erstrecken können, der Winkel γ dagegen erstreckt sich immer nur von Null bis zu 180°.

Die Projection der Diagonale des früher erwähnten Parallelopipedums (§. 6) auf die Ebene AMB, ist dem Cosinus des Winkels DME, oder dem $\sin\gamma$ gleich. Projiciert man nun noch einmal diese Projection auf die Axe MA, so erhält man diese neue Projection aus der früheren, indem man

letztere durch $\cos\delta$ multipliciert; sie fällt aufserde mit der Projection der Diagonale des Parallelopipedums au dieselbe Axe MA zusammen, und ist folglich dem $\cos\alpha$ gleh, daher hat man

$$\cos\alpha = \sin\gamma . \cos\delta.$$

Ebenso findet man

$$\cos\beta = \sin\gamma . \sin\delta$$

und diese zwei Formeln dienen dazu, die Gleichungen, in welchen man die Winkel α, β, γ, angewandt hat, in andere umzuwandeln, in welchen man nur γ und δ anwendet. Man kann sich unmittelbar davon überzeugen, dafs sie der Gleichung (1) Genüge leisten.

9.

Es giebt auch noch eine andere Gleichung, welche diese Gleichung (1) als einzelnen Fall enthält, und die uns häufig von Nutzen seyn wird.

Um sie zu bilden, seyen x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes M (Fig. 2), die auf drei rechtwinklige Axen Ox, Oy, Oz bezogen sind. Man nenne r seinen Radius Vector OM, und α, β, γ die spitzen oder stumpfen Winkel, die dieser Radius mit den drei Axen macht, so dafs man z. B.

$$zOM = \gamma$$

hat. Fällt man vom Punkte M eine senkrechte Linie MN auf die Axe Oz, so wird die gerade Linie ON die Ordinate z seyn, und in dem rechtwinkligen Dreiecke MON hat man

$$z = r . \cos\gamma;$$

ebenso findet man

$$y = r . \cos\beta, \quad x = r . \cos\alpha.$$

Sey M' ein anderer Punkt, und bezeichne man durch $x', y', z', r', \alpha', \beta', \gamma'$ seine Coordinaten, seinen Radius Vector und die Winkel, die sich auf diese gerade Linie beziehen, so hat man

$$x' = r' \cos\alpha', \quad y' = r' \cos\beta, \quad z' = r' \cos\gamma'.$$

Bezeichnet man durch u die Entfernung MM', so hat man, wie bekannt,

$$u^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

und bezeichnet man durch ε den Winkel MOM', so hat man zu gleicher Zeit

$$u^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varepsilon,$$

in dem Dreiecke, dessen Seiten r, r', u sind.

Da

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2$$

ist, so giebt sich aus dem ersten Werthe von u^2

$$u^2 = r^2 + r'^2 - 2(xx' + yy' + zz');$$

vergleicht man ihn mit dem zweiten, so folgt

$$rr' \cos \varepsilon = xx' + yy' + zz'$$

und substituiert man in diese Gleichung die entwickelten Werthe von x, y, z, x', y', z', so erhält man

$$\cos \varepsilon = \cos \alpha . \cos \alpha' + \cos \beta . \cos \beta' + \cos \gamma . \cos \gamma'; \quad (2)$$

dies ist die gesuchte Gleichung.

Fallen die zwei geraden Linien OM und OM' zusammen, so sind die Winkel α', β', γ' dieselben, wie α, β, γ, und die Gleichung (2) geht alsdann in die Gleichung (1) über. Sind diese geraden Linien auf einander senkrecht, so hat man $\varepsilon = 90^0$ und daher

$$\cos \alpha . \cos \alpha' + \cos \beta . \cos \beta' + \cos \gamma . \cos \gamma' = o.$$

Setzt man in den Werthen von x, y, z, statt $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ ihre Werthe, die im vorhergehenden §. gefunden worden sind, so hat man

$$x = r . \sin \gamma . \cos \delta, \quad y = r . \sin \gamma . \sin \delta, \quad z = r . \cos \gamma,$$

Ausdrücke, in welchen die drei Veränderlichen r, γ, δ, die drei Polarcoordinaten des Punktes M sind, so wie sie in §. 4 erklärt worden sind, und welche daher dazu dienen können, die rechtwinkligen Coordinaten in Polarcoordinaten umzuwandeln.

10.

Die Betrachtung der Projectionen, deren wir uns in §. 8 bedient haben, wird sehr häufig in diesem Werke angewandt werden; es wird daher nicht unpassend seyn, hier ihre ersten Principien zu erläutern.

Die Projection einer geraden Linie auf eine andere gerade Linie ist der Theil der letzteren, der zwischen den Endpunkten der senkrechten Linien enthalten ist, die man von den Endpunkten der projicierten geraden Linie herab gefällt hat. Daher sind die Ausdrücke $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$

als Unterschiede der Coordinaten der Endpunkte der Linie MM', deren Projectionen auf die Axen x, y, z, und aus dem ersten Werthe von u^2 folgt, dafs die Summe der Quadrate der Projectionen einer geraden Linie auf drei rechtwinklige Axen dem Quadrate dieser geraden Linie gleich ist. Wenn die projicierte gerade Linie und diejenige, auf welche man sie projiciert, in einer und derselben Ebene enthalten sind, so ist die Projection der Grundlinie eines rechtwinkligen Dreiecks gleich und parallel, dessen Hypotenuse die projicierte gerade Linie ist. Bezeichnet man daher durch l die Länge dieser geraden Linie, durch λ die ihrer Projection, und durch i den Winkel, den diese geraden Linien mit einander einschliefsen, so hat man

$$\lambda = l \cdot \cos i.$$

Die Projection einer ebenen Oberfläche auf eine andere Ebene, ist der Theil dieser Ebene, der durch die Projection des Umrisses der projicierten Oberfläche begränzt wird, das heifst, durch die krumme Linie, welche die Endpunkte der senkrechten Linien bilden, die von allen Punkten dieses Umrisses herab gefällt worden sind. Die vorstehende Gleichung bleibt aber noch wahr, wenn man statt l die Fläche der projicierten Oberfläche, und statt λ die Fläche ihrer Projection setzt; i bedeutet alsdann den Winkel, den beide ebene Flächen mit einander einschliefsen, an dessen Stelle man auch den Winkel setzen kann, der zwischen den zwei Linien enthalten ist, die bezüglich auf diesen zwei Ebenen senkrecht sind.

Denn man zerlege die Fläche der projicierten Oberfläche in Elemente von unendlich kleiner Breite, die auf dem Durchschnitte derselben mit der Ebene, auf welche man sie projiciert, senkrecht stehen. Die Projection eines jeden Elementes wird diesem Elemente, multipliciert mit dem Cosinus des Winkels, den die beiden Ebenen einschliefsen, gleich seyn; da nun dieser Winkel für alle Elemente derselbe und $= i$ ist, so wird die Summe aller ihrer Projectionen, oder λ, der Summe aller Elemente, oder der ganzen Fläche l, multipliciert mit $\cos i$, gleich seyn, was zu beweisen war.

Es ergiebt sich hieraus, dafs das Quadrat des Flächeninhalts einer ebenen Oberfläche der Summe der Quadrate ihrer

Projectionen auf drei rechtwinklige Ebenen gleich ist, indem man als Neigungswinkel für jede Ebene den Winkel nimmt, den die auf die Oberfläche und diese Ebene gezogenen senkrechten Linien mit einander einschliefsen und die Gleichung (1) berücksichtigt.

11.

Wenn man bei irgend einer Frage ein System von parallelen Kräften betrachtet, so kann man annehmen, dafs eine der drei rechtwinkligen Axen MA, MB, MC (Fig. 1) ihnen ebenfalls parallel ist. Alsdann werden zwei der drei Winkel α, β, γ, die zwei letzten z. B., für alle Kräfte rechte Winkel seyn, und die Gleichung (1) reduciert sich auf

$$\cos^2 \alpha = 1,$$

woraus folgt $\alpha = o$, oder $\alpha = 180^0$.

Auf diese Weise wird die Richtung einer jeden Kraft bestimmt seyn, indem man sagt, dafs sie mit der Axe MA einen Winkel einschliefst, der $= o$ oder $= 180^0$ ist. In diesem besonderen Falle aber wird es einfacher seyn, diese Richtung durch das Zeichen der Kraft zu bestimmen, indem man die Kräfte, die in einem Sinne wirken, als positive, und diejenigen, die in entgegengesetztem Sinne wirken, als negative betrachtet.

Uebrigens ist der Fall der parallelen Kräfte der einzige, in welchem wir positive und negative Kräfte betrachten werden; in allen übrigen Fällen werden die Quantitäten, welche die Gröfse der Kräfte in der Rechnung vorstellen, als positive angesehen werden, und die Aenderung des Zeichens wird nur bei den Cosinus der Winkel vorkommen, die ihre Richtungen mit den festen Axen einschliefsen.

12.

Das Vorhergehende enthält die einleitenden Erklärungen und hinlängliche Erläuterungen über die Bestimmung der Gröfse und Richtung der Kräfte. Da ich aber in diesem Werke ausschliefslich die Methode des unendlich Kleinen anwenden werde, so ist es nothwendig, in dieser Einleitung eine Uebersicht der Principien der Infinitesimalrechnung zu geben, und unter den Formeln, die man am

Einfachsten daraus ableiten kann, diejenigen auswählen, deren wir im Folgenden am Meisten bedürfen werden.

„Das unendlich Kleine ist eine Gröſse, die kleiner ist als jede gegebene Gröſse derselben Art. Man wird mit Nothwendigkeit auf die Idee des unendlich Kleinen geführt, wenn man die auf einander folgenden Aenderungen einer Gröſse betrachtet, die dem Gesetze der Stätigkeit unterworfen ist. So z. B. wächst die Zeit durch Stufen, die kleiner sind, als jeder angebbare Zeitraum, mag dieser auch noch so klein seyn. Die Räume, welche durch die verschiedenen Punkte eines Körpers durchlaufen werden, wachsen ebenfalls durch unendlich kleine Zunahmen, da kein Punkt auf andere Weise aus einer Lage in die andere kommen kann, als wenn er alle dazwischen befindlichen Lagen durchlauft, und man keine, wenn auch noch so kleine, Distanz zwischen zwei auf einander folgenden Lagen angeben kann. Die unendlich kleinen Gröſsen sind daher in der Wirklichkeit vorhanden, und nicht ein bloſses Hülfsmittel, das die Mathematiker erdacht haben.

Ein unendlich Kleines kann das Doppelte, Dreifache, Vierfache u. s. w. eines anderen seyn; die unendlich kleinen Gröſsen stehen unter einander in gewissen Verhältnissen, deren Bestimmung ein wesentlicher Gegenstand der Infinitesimalrechnung ist.

Bedeuten a und b zwei unendlich kleine Gröſsen, und ist das Verhältniſs von b zu a ebenfalls unendlich klein, so ist b das, was man ein unendlich Kleines des zweiten Ranges nennt. Nimmt man z. B. an, daſs die Sehne eines Kreisbogens unendlich klein ist, so ist der Sinus versus desselben Bogens ein unendlich Kleines des zweiten Ranges, weil sich der Sinus versus immer zu der Sehne verhält, wie die Sehne zum Durchmesser, und daher das erste Verhältniſs unendlich klein wird, sobald dies bei dem zweiten der Fall ist.

Ist b ein unendlich Kleines des zweiten Ranges, und nimmt man ferner an, daſs das Verhältniſs von c zu b ein unendlich Kleines des ersten Ranges ist, so nennt man c ein unendlich Kleines des dritten Ranges und so weiter.

Hieraus folgt, daſs ein Produkt, welches aus n Factoren, die sämmtlich unendlich Kleine des ersten Ranges sind, zu-

sammen gesetzt ist, zu der Klasse der unendlich Kleinen des $n$ten Ranges gezählt werden muſs.

Der Flächeninhalt einer Oberfläche, die in allen ihren Dimensionen unendlich klein ist, ist wenigstens ein unendlich Kleines des zweiten Ranges, denn er beträgt weniger, als das Quadrat der längsten geraden Linie, die man von einem Punkte des Umrisses der Oberfläche zum anderen ziehen kann, und diese Linie ist, nach der Voraussetzung, unendlich klein. Ebenso ist der Inhalt eines Körpers, der in allen seinen Dimensionen unendlich klein ist, wenigstens ein unendlich Kleines des dritten Ranges, weil er kleiner ist, als der Cubus der längsten geraden Linie, die man von einem Punkte seiner Oberfläche zum anderen ziehen kann. Dies vorausgesetzt, besteht das Grundprincip der Infinitesimalrechnung darin, daſs zwei endliche Quantitäten, die nur um ein unendlich Kleines von einander verschieden sind, als völlig gleiche Gröſseh angesehen werden müssen, weil man gar keinen Unterschied zwischen denselben angeben kann, möge dieser auch noch so klein seyn.

Ebenso verhält sich die Sache bei zwei unendlich kleinen Gröſsen des ersten Ranges, deren Unterschied ein unendlich Kleines des zweiten Ranges ist, und allgemein ist es ebenso bei zwei unendlich kleinen Gröſsen irgend eines Ranges, die nur um ein unendlich Kleines eines höheren Ranges von einander verschieden sind, man betrachtet sie immer wie Gröſsen, die völlig gleich sind, und setzt ihr Verhältniſs der Einheit gleich.

Man kann diese Principien auch noch auf eine andere Weise ausdrücken, indem man sagt, daſs es in der Rechnung erlaubt ist, ohne daſs man einen Fehler in den Resultaten zu fürchten brauchte, sowohl die unendlich kleinen Gröſsen, die zu endlichen addiert sind, als auch die unendlich kleinen Gröſsen irgend eines höheren Ranges, die zu unendlich kleinen Gröſsen eines niedrigeren Ranges addiert sind, zu vernachlässigen.

13.

Das Differential dx einer unabhängigen Veränderlichen x ist der unendlich kleine Zuwachs, den man dieser Veränder-

lichen beilegt; das Differential dy einer Function y von x, ist der entsprechende Zuwachs dieser Function, der, durch die Vernachlässigung der unendlich kleinen Gröfsen der höheren Ränge, auf denselben Rang zurückgeführt ist, wie der Zuwachs der unabhängigen Veränderlichen selbst. Hieraus folgt, dafs das Differential dy immer in der Form Xdx enthalten ist, wo X eine andere Function von x bedeutet. Bei einigen besonderen Werthen von x kann es sich ereignen, dafs der Differentialcoefficient X unendlich grofs wird, wodurch das Differential Xdx eine unbestimmte Gröfse werden würde; in der Mechanik wird sich jedoch dieser Umstand niemals ereignen.

Sey fx eine gegebene Function von x, c eine willkührliche Constante und $Fx + c$ das vollständige oder unbestimmte Integral von $fxdx$. Seyen ferner a und b zwei gegebene Constanten. Bestimmt man die Constante c auf die Weise, dafs dies Integral Null wird, oder anfängt, wenn $x = a$ ist, und setzt man nachher $x = b$, so ist das Resultat $Fb - Fa$ das, was man das bestimmte Integral nennt, welches zwischen den Gränzen a und b genommen ist. Ich werde es durch

$$\int_a^b fxdx$$

bezeichnen, nach der sehr bequemen Bezeichnungsart, die Fourier vorgeschlagen hat, und werde daher schreiben

$$Fb - Fa = \int_a^b fxdx.$$

Giebt man allmälich dem x eine unendlich grofse Anzahl von Werthen, die von a bis b durch unendlich kleine Unterschiede wachsen, und nimmt diese unter einander gleichen oder ungleichen Unterschiede, als Werthe von dx an, so ist es leicht zu zeigen, dafs die Summe aller Werthe des Differentials $fxdx$ dem bestimmten Integrale $Fb - Fa$ gleich ist.

Denn vernachlässigt man die unendlich kleinen Gröfsen der höheren Ränge als des ersten, so hat man nach der Erklärung des Differentials

$$F(x + dx) - F(x) = fxdx.$$

Bezeichnet man daher durch $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ eine unendlich grofse Anzahl unendlich kleiner Gröfsen, so dafs

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots . + \delta_n = b - a$$

ist, und nimmt man allmälich für x und dx die Werthe a und δ_1, $a + \delta_1$ und δ_2, $a + \delta_1 + \delta_2$ und $\delta_3 \ldots . b - \delta_n$ und δ_n, so folgt hieraus

$$F(a + \delta_1) - F(a) = fa\delta_1$$
$$F(a + \delta_1 + \delta_2) - F(a + \delta_1) = f(a + \delta_1)\,\delta_2$$
$$F(a + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) - F(a + \delta_1 + \delta_2) = f(a + \delta_1 + \delta_2)\,\delta_3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$Fb - F(b - \delta_n) = f(b - \delta_n)\,\delta_n.$$

Die Summe dieser Gleichungen ist

$$Fb - Fa = fa\delta_1 + f(a + \delta_1)\,\delta_2 + f(a + \delta_1 + \delta_2)\,\delta_3 \\ \ldots . + f(b - \delta_n)\,\delta_n$$

und dieser Ausdruck enthält den Lehrsatz, der bewiesen werden sollte.

Wenn die Function fx zwischen den Gränzen a und b unendlich grofs wird, so findet der Beweis nicht mehr statt, und der Lehrsatz ist alsdann nicht mehr anwendbar. In diesem Ausnahmefall, auf den wir in der Folge niemals stofsen werden, steht das bestimmte Integral in keiner weiteren Beziehung zu der Summe der Werthe des Differentials, und es kann selbst negativ seyn, wenn alle diese Werthe positiv sind, oder positiv, wenn sie alle negativ sind. Um den Lehrsatz wieder her zu stellen, mufs man es alsdann verhindern, dafs fx zwischen den Gränzen a und b unendlich grofs wird, indem man die Veränderliche x von der einen dieser Gränzen zu der anderen durch eine Reihe imaginärer Werthe übergehen läfst *).

Der vorstehende Lehrsatz kann ohne Schwierigkeit auf die vielfachen Integrale ausgedehnt werden. Ist z. B. $f(x, y)$ eine gegebene Function zweier unabhängigen Veränderlichen x und y, und giebt man diesen Veränderlichen allmälich Werthe, die durch unendlich kleine Unterschiede wachsen, nimmt man ferner für dx die Unterschiede zwischen den auf einander folgenden Werthe von x, und für dy die Unterschiede der auf einander folgenden Werthe von y, so wird die Summe aller Werthe von

*) Man sehe hierüber das Journal de l'Ecole Polytechnique cah. 18. pag. 320.

dem Integrale
$$f(x,y)\,dx\,dy$$
$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$
gleich seyn, vorausgesetzt, daſs dieses zwischen schicklichen Gränzen genommen wird.

14.

Wenn die Function fx eine Gröſse α enthält, die bei der Integration wie eine Constante betrachtet wird, so ist der Werth des Integrals
$$\int_a^b fx\,dx$$
selbst eine Function von α. Es kommen Fragen vor, bei welchen man dieses Integral nicht unter endlicher Form kennt, und es dennoch erforderlich ist, sein Differential in Beziehung auf α zu bestimmen. Diese Operation bietet aber zwei verschiedene Fälle dar, je nachdem die Gränzen a und b von α unabhängig sind, oder auf irgend eine Weise von demselben abhängen. Im ersten Falle ist es hinreichend, fx in Beziehung auf α unter dem Zeichen $\int$ zu differentiieren, so daſs man hat
$$\frac{d.\int_a^b fx\,dx}{d\alpha}=\int_a^b \frac{dfx}{d\alpha}\,dx.$$
Denn nach dem Lehrsatze des vorhergehenden §. ist der erste Theil dieser Gleichung der Differentialcoefficient der Summe der Werthe von $fx\,dx$, die zwischen $x=a$ und $x=b$ enthalten sind, in Beziehung auf α, während der zweite Theil die Summe der Werthe des Differentialcoefficienten von $fx\,dx$ in Beziehung auf α und zwischen denselben Gränzen genommen, andeutet, und es ist einleuchtend, daſs diese zwei Summen identisch sind.

Im zweiten Falle, wenn α in $\alpha+\delta\alpha$ übergeht, so geht die Gränze b in $b+\frac{db}{d\alpha}d\alpha$ über, und aus diesem Grunde wird die Summe der Werthe von $fx\,dx$ oder das Integral $\int_a^b fx\,dx$ um den Werth $fx\,dx$, der den Werthen $x=b$ und $dx=\frac{db}{d\alpha}.d\alpha$ entspricht, d. h. um $fb.\frac{db}{d\alpha}d\alpha$ vergröſsert.

Zu gleicher Zeit geht die Gränze α in $a + \frac{da}{d\alpha} d\alpha$ über, wodurch das Integral um den Werth $fxdx$, der den Werthen $x = a$ und $dx = \frac{da}{d\alpha} d\alpha$ entspricht, oder um $fa.\frac{da}{d\alpha} d\alpha$ vermehrt wird. Daher wird wegen der gleichzeitigen Veränderung der beiden Gränzen a und b, die durch die Veränderung von α hervorgebracht wird, das Integral um das Differential

$$\left(\frac{db}{d\alpha} fb - \frac{da}{d\alpha} fa\right) d\alpha$$

gröfser werden, und ebenso wird sein Differentialcoefficient in Beziehung auf α, um diesen Coefficienten in Beziehung auf $d\alpha$ vermehrt. Addiert man ihn daher zum zweiten Theile der vorhergehenden Gleichung, so hat man

$$\frac{d\int_a^b fxdx}{d\alpha} = \int_a^b \frac{dfx}{d\alpha} dx + \frac{db}{d\alpha} fb - \frac{da}{d\alpha} fa$$

als vollständigen Werth des Differentialcoefficienten von $\int_a^b fxdx$.

Ist α nicht in fx enthalten, ist diese Gröfse einer der beiden Gränzen b oder a gleich, und hängen diese Gränzen nicht von einander ab, so geht dieser Ausdruck in

$$\frac{d\int_a^b fxdx}{db} = fb \text{ oder } \frac{d\int_a^b fxdx}{da} = -fa$$

über, was aufserdem auch an und für sich einleuchtend ist.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich auch bei den vielfachen Integralen anstellen, deren Differentialcoefficienten in Beziehung auf eine Gröfse, die man anfänglich als constant betrachtet hat, man ebenfalls erhält, wenn man unter dem Integrationszeichen differentiiert, und zu dem Resultate noch Glieder hinzufügt, die von den Veränderungen der Gränzen abhängen, wenn diese von jener Gröfse, die nun eine Veränderliche geworden ist, abhängen.

15.

Die Integralrechnung giebt die Regeln an, vermöge welcher man, entweder genau oder doch näherungsweise, die

numerischen Werthe der bestimmten Integrale erhalten kann, seyen diese nun einfache oder zusammengesetzte, so daſs man eine Aufgabe als gelöst ansehen kann, sobald es gelungen ist, die Unbekannten durch solche Integrale auszudrücken. Man sagt alsdann, daſs die Aufgabe auf die Quadraturen zurück geführt sey, weil einerseits ein vielfaches Integral nichts Anderes ist, als ein mehrmals wiederholtes einfaches Integral, und andererseits ein Integral $\int_a^b fxdx$ immer durch ein Quadrat vorgestellt werden kann, welches dem Inhalt einer ebenen krummen Linie gleich ist, in welcher x und fx die Coordinaten irgend eines Punktes sind, und a und b die Abscissen der äuſsersten Punkte vorstellen.

Von den verschiedenen Formeln, die man anwendet, um die Näherungswerthe des Integrals $\int_a^b fxdx$ zu berechnen, will ich nur die folgende anführen, welche voraussetzt, daſs die Functionen fx und $\frac{dfx}{dx}$ zwischen den Gränzen a und b nicht unendlich groſs werden.

Mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen setze man

$$\frac{dfx}{dx} = f'x, \quad \frac{d^2fx}{dx^2} = f^2x$$

u. s. w. Ferner nehme man an, daſs die Unterschiede δ_1, δ_2, δ_3 u. s. w. nicht unendlich klein, sondern blos sehr klein sind; man setze sie alle einander gleich und bezeichne ihre gemeinschaftliche Gröſse durch δ, so erhalten wir nach dem Taylorschen Lehrsatze:

$$F(a+\delta) = Fa + \delta fa + \tfrac{1}{2}\delta^2 f'a + \ldots$$
$$F(a+2\delta) = F(a+\delta) + \delta f(a+\delta) + \tfrac{1}{2}\delta^2 f'(a+\delta) + \ldots$$
$$F(a+3\delta) = F(a+2\delta) + \delta f(a+2\delta) + \tfrac{1}{2}\delta^2 f'(a+2\delta) + \ldots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$F(a+n\delta) = F(a+n\delta-\delta) + \delta f(a+n\delta-\delta) + \tfrac{1}{2}\delta^2 f'(a+n\delta-\delta) + \ldots$$

Setzt man daher $n\delta = b - a$ und nimmt die Summe aller vorstehenden Gleichungen, so hat man

$$Fb - Fa = \delta\Sigma f(a+i\delta) + \tfrac{1}{2}\delta^2\Sigma f'(a+i\delta) + \tfrac{1}{6}\delta^3\Sigma f''(a+i\delta) + \ldots$$

wo i eine ganze Zahl oder Null bedeutet, und die Charakteristik Σ die Summen anzeigt, die sich auf die n Werthe

von i erstrecken, die zwischen $i=o$ und $i=n-1$ enthalten sind. Nimmt man nach einander fx und $f'x$, $f'x$ und f^2x u. s. w. statt Fx und fx, so hat man auf dieselbe Weise

$$fb-fa=\delta\Sigma f'(a+i\delta)+\tfrac{1}{2}\delta^2\Sigma f''(a+i\delta)+\ldots$$
$$f'b-f'a=\delta\Sigma f''(a+i\delta)+\ldots.$$

. . . .

Will man nun, dies vorausgesetzt, die Potenzen von δ, die höher sind als das Quadrat, in dem Werthe von $Fb-Fa$ vernachlässigen, so könnte man, vermöge der letzten Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}\delta^2\Sigma f'(a+i\delta)=\tfrac{1}{2}\delta(fb-fa)-\tfrac{1}{4}\delta^2(fb-fa),$$
$$\tfrac{1}{6}\delta^3\Sigma f''(a+i\delta)=\tfrac{1}{6}\delta^2(f'b-f'a)$$

setzen, und hieraus erhält man

$$Fb-Fa=\delta\Sigma f(a+i\delta)+\tfrac{1}{2}\delta(fb-fa)-\tfrac{1}{12}\delta^2(f'b-f'a)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\int_a^b fxdx=\delta\,[\tfrac{1}{2}fa+f(a+\delta)+f(a+2\delta)\ldots.$$
$$+f(a+n\delta-\delta)+\tfrac{1}{2}fb]-\tfrac{1}{12}\delta^2(f'b-f'a).$$

Diese Formel wird desto genauer seyn, je kleiner der Unterschied δ oder $\frac{1}{n}(b-a)$ ist, und in demselben Verhältniſs werden auch die Werthe von fx zwischen den Gränzen a und b variieren. In den meisten Fällen kann man auch das Glied vernachlässigen, welches von δ^2 abhängt; alsdann enthält die Formel nur Werthe von fx, die in Zahlen gegeben seyn können, ohne daſs die Form dieser Function bekannt ist.

16.

In der Theorie des unendlich Kleinen betrachtet man die krummen Linien wie Vielecke, die aus einer unendlich groſsen Zahl unendlich kleiner Seiten bestehen. Dies setzt voraus, daſs die Sehne eines unendlich kleinen Bogens diesem Bogen gleich ist, oder, was dasselbe sagen will, daſs das Verhältniſs ihrer Längen als der Einheit gleich angenommen werden kann; dies kann man auch wirklich auf folgende Art beweisen:

Sey $Mmm'M'$ (Fig. 3) ein unendlich kleines Stück einer krummen Linie; man ziehe die Sehnen Mm, mm', $m'M'$ und verlängere die dritte, bis sie die Verlängerung MT der ersten in dem Punkte K trifft. Da der Bogen mm' gröſser ist, als

die Sehne mm', und kleiner als die gebrochene Linie mKm', so braucht man nur zu beweisen, dafs diese Linie und diese Sehne, die beide unendlich klein sind, nur um ein unendlich Kleines eines höheren Ranges von einander verschieden sind, und man daher ihr Verhältnifs der Einheit gleich setzen darf; um so mehr wird dies alsdann in Beziehung auf den Bogen mm' und seine Sehne wahr seyn.

Ist nemlich innerhalb der Länge des Bogens $Mmm'M'$ kein besonderer Punkt, in welchem sich die Richtung der krummen Linie plötzlich ändert, so werden die Sehnen, die von einem Punkte der krummen Linie nach einem anderen gezogen werden, Winkel einschliefsen, die unendlich wenig von zwei rechten verschieden sind. Der Winkel TKM' als Supplement von MKM' wird daher unendlich klein seyn. Ich werde ihn durch δ bezeichnen, und setzt man ferner

$$mK = a,\ m'K = b,\ mm' = c,$$

so hat man in dem Dreiecke mKm' die Gleichung

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \,.\cos\delta,$$

welche man auch in folgende umändern kann:

$$c^2 = (a+b)^2 - 4ab \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta,$$

indem man bemerkt, dafs

$$\cos\delta = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\delta$$

ist. Wir haben also

$$\frac{c^2}{(a+b)^2} = 1 - \frac{4ab\,.\sin^2\frac{1}{2}\delta}{(a+b)^2}.$$

Diese Formel drückt das Quadrat des Verhältnisses der Sehne mm' zur gebrochenen Linie mKm' aus. Nun hat man aber aufserdem noch

$$\frac{4ab}{a^2+b^2} = 1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$$

und hieraus folgt, dafs der Coefficient von $\sin^2\frac{1}{2}\delta$ nicht unendlich grofs werden kann, weil er immer kleiner als die Einheit ist. Vernachlässigt man das unendlich Kleine des zweiten Ranges, so findet man daher, dafs das Verhältnifs von c zu $a+b$ der Einheit gleich ist, was zu beweisen war.

17.

Da die krumme Linie wie ein Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachtet wird, so sind die Tangenten die Ver-

längerungen seiner unendlich kleinen Seiten; am Punkte M, wo die Seite Mm ist, ist daher die Tangente die unbegränzte gerade Linie $T' MmT$.

Bezeichnet man durch x, y, z, die drei rechtwinkligen Coordinaten des Punktes M, so sind die des Punktes m

$$x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz.$$

Nennt man ds das Element der krummen Linie, das heifst seine Seite Mm, so sind die Differentiale dx, dy, dz, seine Projectionen auf die Axen der x, y, z; bezeichnet man daher durch α, β, γ, die drei Winkel, welche die Richtung der geraden Linie MT mit den Linien, die diesen Axen parallel durch den Punkt M gezogen sind, einschliefst, so hat man

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds} \qquad (1)$$

und zugleich

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

Nimmt man nun auf der krummen Linie, die man betrachtet, einen festen Punkt C an, und setzt man voraus, dafs s der Bogen CM ist, der von diesem Anfangspunkte aus gezählt wird, so kann dieser Bogen als die unabhängige Veränderliche angesehen werden, von welcher x, y, z Functionen sind, die durch die Gleichungen der krummen Linie gegeben sind. In diesem Falle ist ds positiv, aber dx, dy, dz, und folglich auch $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ können positiv oder negativ seyn. Die Winkel α, β, γ, beziehen sich immer auf die Verlängerung MT der Seite Mm, oder auf den Theil MmT der Tangente; die Winkel, die sich auf den anderen Theil MT' beziehen, sind die Supplemente von α, β, γ (§. 7).

Da die Richtung der Tangente am Punkte M durch die Gleichungen (1) bestimmt ist, so kann man daraus die Gleichung der normalen Ebene desselben Punktes ableiten; doch kann man diese Gleichung auch unmittelbar durch folgende Betrachtung finden:

Sey K der Halbmesser einer Kugel, deren Mittelpunkt im Punkte M ist, so ist die Gleichung desselben

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = K^2;$$

wo x', y', z' die Coordinaten eines Punktes der Kugel vorstellen. Die Gleichung der Kugel, die denselben Halbmesser

hat, und dessen Mittelpunkt im Punkte m liegt, kann aus der vorhergehenden abgeleitet werden, wenn man

$$x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz$$

bezüglich an die Stelle von x, y, z setzt. Zieht man diese zwei Gleichungen von einander ab, und vernachlässigt die unendlich kleinen Gröfsen des zweiten Ranges, so erhält man

$$(x' - x)dx + (y' - y)dy + (z' - z)dz = o,$$

welche Gleichung dem Durchschnitte der beiden Kugelflächen angehört. Da dies die Gleichung einer Ebene ist, deren Punkte durch die Coordinaten x', y', z' bestimmt werden, so ist sie daher die Gleichung der Ebene der krummen Linie, die durch den Durchschnitt gebildet wird, und folglich die Gleichung der normalen Ebene, weil sich die beiden Kugeln in einem Kreise schneiden, der auf der Linie TT', die durch ihre Mittelpunkte M und m geht, senkrecht steht.

Dividiert man diese Gleichung durch ds und berücksichtigt man die Formeln (1), so geht sie in folgende über:

$$(x' - x) \cos \alpha + (y' - y) \cos \beta + (z' - z) \cos \gamma = o.$$

Stellt daher

$$a(x' - x) + b(y' - y) + c(z' - z) = o$$

die Gleichung einer Ebene vor, die durch den Punkt gezogen ist, dessen Coordinaten x, y, z sind, und die zugleich senkrecht auf der geraden Linie steht, deren Richtung durch die Winkel α, β, γ bestimmt ist, so mufs sie mit der vorhergehenden übereinstimmen, es mufs daher

$$a = h \cdot \cos \alpha, \quad b = h \cdot \cos \beta, \quad c = h \cdot \cos \gamma$$

seyn, wo h einen unbestimmten Factor andeutet. Aus der Gleichung (1) in §. 6 folgt aber überdies

$$a^2 + b^2 + c^2 = h^2,$$

woraus sich der Werth von h, abgesehen von dem Zeichen, ergiebt. Alsdann hat man

$$\cos \alpha = \frac{a}{h}, \quad \cos \beta = \frac{b}{h}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{h}, \qquad (2)$$

was mit den bekannten Formeln übereinstimmt, durch welche man die Richtung der geraden Linie, die auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht, bestimmt. Das Zeichen von h bleibt unbestimmt, weil die Winkel α, β, γ, sich auf den einen oder auf den anderen Theil der geraden Linie, die auf den zwei verschiedenen Seiten der Ebene liegen, beziehen können.

18.

Winkel der Contingenz nennt man den unendlich kleinen Winkel, der zwischen zwei auf einander folgenden Tangenten enthalten ist. Sind z. B. Mm und mm' (Fig. 4) zwei auf einander folgende Seiten der krummen Linie, so wird dieser Winkel, am Punkte M, das Supplement von Mmm', oder der Winkel Tmt seyn, unter welchem die Tangente MmT' von der folgenden Tangente $mm't$ geschnitten wird. Ich werde ihn durch δ bezeichnen. Nimmt man an, dafs die Winkel α, β, γ, sich immer auf die Richtung MT' beziehen, und bezeichnet man durch α', β', γ', die Winkel, in die sie übergehen, wenn man sie auf die Richtung mt bezieht, so hat man vermöge der Gleichung (2) in §. 9

$$\sin^2\delta = 1 - (\cos\alpha . \cos\alpha' + \cos\beta . \cos\beta' + \cos\gamma . \cos\gamma')^2.$$

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze hat man auch

$$\cos\alpha' = \cos\alpha + d.\cos\alpha + \tfrac{1}{2}d^2.\cos\alpha + \ldots$$
$$\cos\beta' = \cos\beta + d.\cos\beta + \tfrac{1}{2}d^2.\cos\beta + \ldots$$
$$\cos\gamma' = \cos\gamma + d.\cos\gamma + \tfrac{1}{2}d^2.\cos\gamma + \ldots$$

Substituiert man diese Werthe in den Werth $\sin^2\delta$, und berücksichtigt die Gleichung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

und sein Differential

$$\cos\alpha\, d.\cos\alpha + \cos\beta\, d.\cos\beta + \cos\gamma\, d.\cos\gamma = o,$$

so sieht man, dafs die endlichen Gröfsen und die unendlich kleinen des ersten Ranges sich aufheben, so dafs, wenn man die unendlich kleinen Gröfsen der höheren Ränge als des zweiten vernachlässigt, man alsdann erhält

$$\sin^2\delta = -(\cos\alpha\, d^2.\cos\alpha + \cos\beta\, d^2.\cos\beta + \cos\gamma\, d^2.\cos\gamma).$$

Differentiiert man die vorhergehende Gleichung, so hat man aufserdem

$$\cos\alpha\, d^2\cos\alpha + \cos\beta\, d^2.\cos\beta + \cos\gamma\, d^2.\cos\gamma$$
$$+ (d.\cos\alpha)^2 + (d.\cos\beta)^2 + (d.\cos\gamma)^2 = o,$$

wodurch der Werth von $\sin^2\delta$ in folgenden übergeht:

$$\sin^2\delta = (d.\cos\alpha)^2 + (d.\cos\beta)^2 + (d.\cos\gamma)^2,$$

welche Gleichung ebenfalls den Werth von δ^2 ausdrückt, weil der Bogen δ, als ein unendlich kleiner, seinem Sinus gleich ist.

Die Differentiale $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, erhält man aus den Formeln (1) des vorhergehenden §. Läfst man die unabhängige Veränderliche unbestimmt, so hat man

$$d.\cos\alpha = \frac{ds^2 d^2 x - dx . ds . d^2 s}{ds^3}$$

und da

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$dsd^2 s = dxd^2 x + dyd^2 y + dzd^2 z$$

ist, so folgt daraus

$$d.\cos\alpha = \frac{dy}{ds^3}(dyd^2 x - dxd^2 y) + \frac{dz}{ds^3}(dzd^2 x - dxd^2 z);$$

ebenso findet man

$$d.\cos\beta = \frac{dx}{ds^3}(dxd^2 y - dyd^2 x) + \frac{dz}{ds^3}(dzd^2 y - dyd^2 z)$$

$$d.\cos\gamma = \frac{dx}{ds^3}(dxd^2 z - dzd^2 x) + \frac{dy}{ds^3}(dyd^2 z - dzd^2 y).$$

Nimmt man nun die Summe der Quadrate dieser drei Werthe, so findet man, nach einigen Reductionen, daſs man den Werth von $\sin^2\delta$ oder δ^2 unter folgende Form bringen kann:

$$\delta^2 = \frac{1}{ds^4}[(dxd^2 y - dyd^2 z)^2 + (dzd^2 x - dxd^2 z)^2 + dyd^2 z - dzd^2 y)^2].$$

Der berührende Kreis ist derjenige, der zwei auf einander folgende Seiten mit der krummen Linie gemeinschaftlich hat. Am Punkte M ist dieser Kreis derjenige, der durch die drei Punkte M, m, m', geht, deren Mittelpunkt sich im Durchschnitte O der beiden senkrechten Linien befindet, die in der Mitte der Linien Mm und mm' in der Ebene dieser zwei auf einander folgenden Elemente errichtet sind, und dessen Halbmesser die gerade Linie mO ist. Werden diese zwei Elemente gleich groſs angenommen, so theilt diese gerade Linie den Winkel Mmm' in zwei gleiche Theile. Wir können diese Hypothese annehmen, ohne fürchten zu müssen, daſs hierdurch der Werth von mO geändert werde, denn es ist leicht zu sehen, daſs das numerische Verhältniſs der zwei unendlich kleinen Seiten Mm und mm' nur einen unendlich kleinen Einfluſs auf die Gröſse dieses Halbmessers haben kann, der daher derselbe bleibt, man möge diese beiden auf einander folgenden Elemente gleich groſs oder nicht gleich groſs annehmen.

Da die Länge der Seiten Mm und $mm' = ds$ ist, so ist, wenn man durch ρ die Länge der Seite mO vorstellt,

die Projection von ϱ auf Mm gleich $\frac{1}{2}ds$, so dafs man alsdann hat

$$\frac{1}{2}ds = \varrho \cos Mmo,$$

und da dieser Winkel Mmo die Hälfte des Supplements von δ oder $= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\delta$ ist, so folgt hieraus

$$\frac{1}{2}ds = \varrho . \sin \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\varrho\delta,$$

wenn man den Bogen $\frac{1}{2}\delta$ statt dessen Sinus nimmt.

Ist daher der Krümmungshalbmesser schon anderweitig bekannt, so hat man

$$\delta = \frac{ds}{\varrho}$$

als Werth des Contingenzwinkels, und umgekehrt erhält man aus dem vorhergehenden Werthe von δ^2 den Werth von ϱ

$$\varrho = \frac{ds^3}{[(dxd^2y - dyd^2x)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dyd^2z - dzd^2y)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

19.

Um die Beschaffenheit der krummen Linie in irgend einem Punkte M vollständig kennen zu lernen, mufs man noch seine Berührungsebene bestimmen, das heifst, die Ebene, welche die zwei auf einander folgenden Seiten Mm und mm' enthält.

Da diese Ebene durch den Punkt M geht, so wird man ihre Gleichung durch

$$A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = o,$$

wo x', y', z' die Coordinaten eines unbestimmten Punktes der Ebene sind, darstellen können. Da nun diese Ebene auch durch die Punkte m und m' gehen mufs, so mufs dem ersten und zweiten Differentiale dieser Gleichung, nemlich

$$Adx' + Bdy' + Cdz' = o$$
$$Ad^2x' + Bd^2y' + Cd^2z' = o$$

ebenso wie der Gleichung selbst, Genüge geleistet werden, wenn man $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ setzt, so dafs man alsdann hat

$$Adx + Bdy + Cdz = o$$
$$Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = o.$$

Die Werthe von A, B, C, die diese beiden Bedingungen erfüllen, sind, wie man sich leicht überzeugen kann,

$$C = D(dxd^2y - dyd^2x)$$

$$B = D(dzd^2x - dxd^2z)$$
$$A = D(dyd^2z - dzd^2y),$$

wo D einen unbestimmten Factor bedeutet. Substituiert man diese Ausdrücke in die Gleichung der berührenden Ebene, und läſst diesen Factor, der allen Gliedern gemeinschaftlich ist, weg, so erhält man

$$(z' - z)(dxd^2y - dyd^2x) + (y' - y)(dzd^2x - dxd^2z)$$
$$+ (x' - x)(dyd^2z - dzd^2y) = o.$$

Nennt man λ, μ, ν, die Winkel, welche die auf der berührenden Ebene senkrecht stehende Linie mit den Linien einschlieſst, die durch den Punkt M, den Axen der x, y, z parallel, gezogen sind, so hat man, nach den Gleichungen (2) im §. 17,

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{1}{h}(dyd^2z - dzd^2y) \\ \cos\mu &= \frac{1}{h}(dzd^2x - dxd^2z) \\ \cos\nu &= \frac{1}{h}(dxd^2y - dyd^2x) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wenn man durch h^2 die Summe der Quadrate der drei Zähler bezeichnet.

Auf dieselbe Weise, wie man im Vorhergehenden den Winkel bestimmt hat, den zwei auf einander folgende Tangenten mit einander einschlieſsen, kann man auch den unendlich kleinen Winkel bestimmen, der zwischen zwei auf einander folgenden Normalen enthalten ist, und der daher der Winkel seyn wird, den zwei auf einander folgende berührende Ebenen mit einander einschlieſsen. Bezeichnet man ihn durch ε, so hat man, nach einer Rechnung, die der des vorhergehenden §. ganz ähnlich ist,

$$\varepsilon^2 = (d.\cos\lambda)^2 + (d.\cos\mu)^2 + (d.\cos\nu)^2.$$

20.

Der Mittelpunkt des Krümmungshalbmessers O ist zugleich in der berührenden Ebene und im Durchschnitte der beiden auf einander folgenden normalen Ebenen enthalten, woraus sich ein Mittel ergiebt, seine Coordinaten nach den Gleichungen dieser drei Ebenen, die jetzt bekannt sind, zu bestimmen.

Die Gleichung der normalen Ebene im Puncte M ist (§. 17)

$$(x'-x)\,dx+(y'-y)\,dy+(z'-z)\,dz=o;$$

man erhält daher die der folgenden Ebene, wenn man

$$x+dx,\quad y+dy,\quad z+dz$$

bezüglich statt x, y, z setzt, daher gehört das Differential der ersten dieser beiden Ebenen, in Beziehung auf x, y, z genommen, nemlich

$$(x'-x)\,d^2x+(y'-y)\,d^2y+(z'-z)\,d^2z=ds^2,$$

ihrem Durchschnitte an.

Aus diesen zwei Gleichungen findet man

$$(x'-x)\,(dxd^2y-dyd^2x)=(z'-z)\,(dyd^2z-dzd^2y)-ds^2dy$$

$$(y'-y)\,(dyd^2x-dxd^2y)=(z'-z)\,(dxd^2z-dzd^2x)-ds^2dx$$

und hieraus findet man, mit Hülfe der Gleichung der berührenden Ebene,

$$z'-z=\frac{\varrho^2}{ds^4}\,[dy\,(dyd^2z-dzd^2y) \\ -dx\,(dzd^2x-dxd^2z)],$$

indem man, der Kürze halber, durch ϱ denselben Werth bezeichnet, wie in §. 18.

Ebenso findet man

$$y'-y=\frac{\varrho^2}{ds^4}\,[dx\,(dxd^2y-dyd^2x) \\ -dz\,(dyd^2z-dzd^2y)],$$

$$x'-x=\frac{\varrho^2}{ds^4}\,[dz\,(dzd^2x-dxd^2z) \\ -dy\,(dxd^2y-dyd^2x)],$$

wodurch man den Werth der drei Coordinaten x', y', z' des Mittelpunktes des Krümmungshalbmessers und folglich auch die Richtung der Krümmung erfährt, während der Halbmesser der Krümmung nur ihre Gröſse angiebt.

Addiert man die Quadrate der Werthe von $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$, und nimmt die gehörigen Reductionen vor, so erhält man

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=\varrho^2;$$

woraus folgt, daſs die Gröſse ϱ der Abstand des Punktes O vom Punkte M, oder der Krümmungshalbmesser MO ist, wie dies auch schon früher gefunden wurde.

21.

Die Formeln der fünf vorhergehenden Paragraphen enthalten Alles, was sich auf die Richtung und die Krümmung

irgend einer Linie bezieht, sey sie nun eine ebene oder eine Linie doppelter Krümmung. Betrachtet man irgend eine Oberfläche, so mufs man auch ihre Krümmung und die Richtung der berührenden Ebene berücksichtigen. Was die Krümmung betrifft, so verweise ich auf die Abhandlung, die ich über diesen Gegenstand in dem 21sten Cahier des Journal de l'Ecole polytechnique gegeben habe; hier werde ich mich nur mit dem beschäftigen, was die berührende Ebene und die Normale betrifft.

Hat man einen Punkt M, dessen Coordinaten x, y, z sind, so kann die Gleichung der berührenden Ebene durch

$$A(x'-x)+B(y'-y)+C(z'-z)=o$$

dargestellt werden, wo x', y', z' die Coordinaten eines beliebigen Punktes derselben bedeuten. Diese Ebene mufs alsdann auch durch einen anderen Punkt M' der Oberfläche gehen, der dem Punkte M unendlich nahe ist; man mufs daher dieser Gleichung Genüge leisten können, wenn man $x'=x+dx$, $y'=y+dy$, $z'=z+dz$ setzt, oder wenn man sein Differential in Beziehung auf x', y', z' nimmt, und alsdann x, y, z an die Stelle dieser Veränderlichen setzt. Folglich hat man

$$Adx+Bdy+Cdz=o.$$

Die Gleichung der Oberfläche giebt

$$dz=pdx+qdy,$$

wo p und q bekannte Functionen von x, y, z bedeuten.

Die vorhergehende Gleichung geht daher in folgende über:

$$(A+pC)dx+(B+qC)dy=o,$$

und da sie für alle Richtungen der geraden Linie MM' gültig seyn mufs, das heifst für alle Verhältnisse, die man zwischen dx und dy bilden kann, so mufs man jeden Coefficienten dieser Differentiale für sich $=o$ setzen, hierdurch erhält man

$$A+pC=o,\quad B+qC=o.$$

Hieraus finde ich die Werthe von A und B, substituiere sie in die Gleichung der berührenden Ebene, und lasse den gemeinschaftlichen Factor C weg. Dies giebt

$$z'-z-p(x'-x)-q(y'-y)=o.$$

Sind a, b, c die Winkel, die die Normale am Punkte M mit den Verlängerungen der Coordinaten x, y, z einschliefst, so hat man, nach den Gleichungen (2) des §. 17,

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\\ \cos b &= -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\\ \cos c &= -\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Das Wurzelzeichen wird in diesen drei Formeln positiv oder negativ seyn, je nachdem der Theil der Normale, den man betrachten will, einen spitzen oder stumpfen Winkel c mit der geraden Linie einschliefst, die durch den Punkt M, nach der Richtung der positiven z gezogen ist.

Nennt man ω das Element der Oberfläche, dessen Projection auf die Fläche der x und y den Werth $dx.dy$ hat, so hat man

$$dx.dy = \pm\, \omega \cos c,$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem c ein spitzer oder stumpfer Winkel ist; da dieses Element nach jeder Richtung unendlich klein und in der berührenden Ebene enthalten ist, deren Neigung gegen die Ebene der x und y der Winkel c oder sein Supplement ist, und der Lehrsatz des §. 10 auch für die Projection einer ebenen unendlich kleinen Oberfläche gültig ist.

Hiernach hat man

$$\omega = dxdy\, \sqrt{1+p^2+q^2},$$

wo man die Wurzelgröfse immer positiv nehmen mufs.

Sey L eine gegebene Function von x, y, z; man bezeichne durch

$$L = o$$

die Gleichung der Oberfläche, die man betrachtet; differentiiert man sie nach einander in Beziehung auf x und in Beziehung auf y, so hat man

$$\frac{dL}{dx} + p.\frac{dL}{dz} = o$$

$$\frac{dL}{dy} + q.\frac{dL}{dz} = o.$$

Entwickelt man hieraus die Werthe von p und q, und substituiert sie in die Gleichung der berührenden Ebene, so nimmt diese die Form

$$(x'-x)\frac{dL}{dx}+(y'-y)\frac{dL}{dy}+(z'-z)\frac{dL}{dz}=o$$

an. Zu gleicher Zeit verwandeln sich die Formeln (4) in

$$\cos a = V.\frac{dL}{dx},\quad \cos b = V.\frac{dL}{dy},\quad \cos c = V.\frac{dL}{dz},\qquad (5)$$

wenn man, zur Abkürzung,

$$\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=V$$

setzt.

22.

Ich will hier eine Bemerkung mittheilen, die dazu dienen kann, analoge Formeln, die verschiedenen Axen entsprechen, zu bewahrheiten oder aus einander abzuleiten.

Man nehme an, daſs bei irgend einer Frage Alles in Beziehung auf die drei Coordinatenaxen x, y, z gleich sey. Hat man eine Gleichung $X=o$, die sich auf die Axe der x bezieht, so wird es eine ähnliche $Y=o$ geben, die der Axe der y entspricht, und eine dritte $Z=o$, die sich auf die Axe der z bezieht. Die zwei anderen Gleichungen $Y=o$, $Z=o$ wird man durch einfache Vertauschungen der Buchstaben aus der ersten $X=o$ ableiten können. Diese Vertauschungen müssen aber auf folgende Weise ausgeführt werden:

Man setzt in X alle Gröſsen, die sich auf die Axe der x beziehen, an die Stelle aller analogen Gröſsen, die der Axe der y entsprechen, alsdann diese wieder an die Stelle aller derer, die der Axe der z entsprechen, und endlich diese letzten Gröſsen an die Stelle der ersten, die der Axe der x entsprechen.

Durch diese umgehende Vertauschung leitet man Z aus X ab. Durch eine zweite ähnliche Vertauschung, die man an Z ausführt, erhält man Y, und durch eine dritte ähnliche Vertauschung, die man an Y ausführt, erhält man wieder X.

Hat man es z. B. mit den Gleichungen (3) des §. 19 zu thun, von welchen die erste der Axe der x, die zweite der Axe der y und die dritte der Axe der z entspricht, so schreibe ich auf dieselbe Linie, aber in zwei getrennten Abtheilungen, die Coordinaten x, y, z und die Winkel λ, μ, ν, die ihnen

bezüglich entsprechen; alsdann setze ich dieselben sechs Grösen, ebenfalls in zwei Abtheilungen, auf eine zweite Linie und in einer verschiedenen Ordnung, so dafs man hat

$$x, y, z, \quad \lambda, \mu, \nu,$$
$$z, x, y, \quad \nu, \lambda, \mu.$$

Alsdann vertausche ich in der ersten Gleichung (3) jede Gröfse aus der ersten Linie mit der entsprechenden Gröfse aus der zweiten. Durch diese Vertauschung wird h nicht geändert werden, und man erhält die dritte Gleichung. Ich setze nun von Neuem in dieser, die Gröfsen aus der unteren Linie an die Stelle derer, die ihnen in der oberen Linie entsprechen. Dies giebt die zweite Gleichung (3), verfährt man nun auf dieselbe Weise mit dieser Gleichung, so findet man die erste Gleichung wieder, von welcher man ausgegangen ist.

Jede dieser Operationen kommt auf eine Aenderung der Coordinatenaxen zurück, indem man zuerst die Axen der x und der y sich in ihrer Ebene umdrehen läfst, so dafs die Axe der positiven x auf die Axe der positiven y fällt, und letztere wieder auf die Axe der negativen x; alsdann dreht man wieder diese Axe der positiven y aus der Lage, die sie nunmehr einnimmt, und die Axe der z, so dafs die erstere auf die Axe der positiven z und letztere wieder auf die ursprüngliche Axe der positiven x fällt, so dafs zuletzt jede Axe der positiven Coordinaten die Stelle einer anderen Axe der positiven Coordinaten eingenommen hat. Dies ist der Grund, weswegen sich die Gleichungen, die sich auf die drei Coordinatenaxen beziehen, durch einfache Vertauschungen der Buchstaben aus einander ableiten lassen, was nicht der Fall seyn würde, wenn man nicht gleichzeitig die drei Coordinaten und die Gröfsen, die sich auf dieselben beziehen, auf die angegebene Weise vertauschen würde.

23.

Es möge hier noch eine allgemeine Bemerkung Platz finden, mit welcher ich diese Einleitung schliefsen werde.

Die Gleichungen, die im Folgenden vorkommen werden, enthalten abstracte Zahlen, wie z. B. die Zahl π, die Logarithmen, die trigonometrischen Functionen u. s. w.; aufserdem kommen in denselben auch andere Gröfsen verschiedener Art

vor, die ebenfalls durch Zahlen ausgedrückt werden, die ihr Verhältnifs zu willkührlich gewählten Einheiten ausdrücken, wobei es sich von selbst versteht, dafs jede Einheit für alle Gröfsen derselben Art dieselbe seyn mufs. Aendert man aber die Gröfse einer oder mehrerer Einheiten, so werden sich die Zahlen, welche die entsprechenden Gröfsen ausdrücken, im umgekehrten Verhältnisse dieser Gröfse ändern, und ungeachtet dieser, durchaus freiwilligen Aenderung werden die Gleichungen, die sie enthalten, noch immer fortbestehen müssen. Es ist daher nöthig, dafs die Form dieser Gleichungen gewisse Bedingungen erfülle, die in jedem einzelnen Falle leicht zu bewahrheiten sind, und die man, in der ausgedehntesten Auffassung, die Bedingungen der Homogenität der Gröfsen nennt. Jede Gleichung, die ihnen nicht Genüge leistet, wird eben deswegen ungenau seyn, und mufs verworfen werden.

Bezeichnet man z. B. durch F eine gegebene Function, so nehme man an, es sey

$$F(f, f' \ldots l, l' \ldots m, m', \ldots\ldots t, t', \ldots) = o; \qquad (a)$$

wo $f, f', \ldots$ Kräfte, $l, l', \ldots$ Linien, $m, m', \ldots$ Massen, $t, t' \ldots$ Zeiten bezeichnen. Stellt man durch n, n', n'', n''' abstracte Zahlen vor, und vermindert man zu gleicher Zeit die Einheit der Kraft in dem Verhältnisse von eins zu n, die Einheit der Länge in dem Verhältnisse von eins zu n', die Einheit der Masse in dem Verhältnisse von eins zu n'', die Einheit der Zeit in dem Verhältnisse von eins zu n''', so gehen die Zahlen $f, f', \ldots l, l', \ldots m, m', \ldots t, t' \ldots$ in

$$nf, nf' \ldots n'l, n'l', \ldots n''m, n''m' \ldots n'''t, n'''t' \ldots$$

über, und die Gleichung (a) wird immer statt haben müssen, das heifst, man wird noch immer haben müssen

$$F(nf, nf' \ldots n'l, n'l' \ldots n''m, n''m' \ldots n'''t, n'''t', \ldots) = o,$$

was auch immer n, n', n'', n''' seyn mögen. Würde die Gleichung (a) Oberflächen $s, s' \ldots$ und Volumina $v, v' \ldots$ enthalten, so müfsten ihre Dimensionen auf dieselbe Einheit bezogen werden, wie die der Linien $l, l' \ldots$, und die Gröfsen $s, s' \ldots v, v' \ldots$ würden folglich durch die Aenderung dieser Einheit in $n'^2 s, n'^2 s' \ldots n'^3 v, n'^3 v'$ übergehen.

Die Gleichung in §. 18, die den Werth von ϱ angiebt, leistet offenbar dieser Bedingung Genüge; denn sie enthält nur endliche oder unendlich kleine Linien

$$\varrho,\ ds,\ dx,\ dy,\ dz,\ d^2x,\ d^2y,\ d^2z.$$

Verändert man nun die Längeneinheit, und multipliciert, wie eben gesagt wurde, jede dieser Linien durch dieselbe Zahl n', so verschwindet diese Zahl, und die Gleichung bleibt unverändert. Die in demselben §. vorkommende Gleichung, von welcher der Werth von δ^2 abhängt, leistet ebenfalls der Bedingung der Homogeneität Genüge, indem man nur zu bemerken braucht, dafs δ^2 eine abstracte Zahl ist, die, eben so wenig wie dieser Werth, sich mit der Gröfse der linearen Einheit ändert.

Es ist nicht möglich, dafs die Gleichung (a) nur eine Gröfse einer Gattung enthalte; enthält sie deren zwei, z. B. zwei Kräfte f und f', und man löfst sie in Beziehung auf eine derselben auf, wodurch man

$$f' = F(f, l, l' \ldots m, m' \ldots t, t' \ldots)$$

erhält, so mufs, wegen der Homogeneität der Gröfsen, f ein gemeinschaftlicher Factor aller Glieder der neuen Function F seyn, oder, mit anderen Worten, es mufs

$$f' = Nf$$

seyn, wo N einen Factor bedeutet, der keine Gröfse von derselben Gattung, wie f und f', enthält, und sich nicht mit der Einheit der Kraft ändert.

Zuweilen wird es scheinen, als habe das Princip der Homogeneität nicht statt, weil man als Einheit der Kraft eine der Kräfte, die man betrachtet, oder als Einheit der Linie den Abstand zweier materieller Punkte, mit welchen man sich beschäftigt, oder als Einheit der Masse die einer der Körper, die in der Aufgabe vorkommen u. s. w., genommen haben wird. Aendert man aber alsdann diese Einheiten willkührlich, und wird die Kraft, die Linie, die Masse, die Zeit, die man vorher als Einheit angenommen hatte, nun durch φ, λ, μ, ϑ ausgedrückt, so gehen die anderen Gröfsen dieser verschiedenen Gattungen, die in der Gleichung (a) vorkommen, in

$$\frac{f}{\varphi}, \frac{f'}{\varphi}, \ldots \frac{l}{\lambda}, \frac{l'}{\lambda}, \ldots \frac{m}{\mu}, \frac{m'}{\mu}, \ldots \frac{t}{\vartheta}, \frac{t'}{\vartheta}$$

über, man mufs also

$$F\left(\frac{f}{\varphi}, \frac{f'}{\varphi} \ldots \frac{l}{\lambda}, \frac{l'}{\lambda} \ldots \frac{m}{\mu}, \frac{m'}{\mu} \ldots \frac{t}{\vartheta}, \frac{t'}{\vartheta} \ldots\right) = o$$

haben, und diese Gleichung kann man auch auf folgende Weise schreiben:

$$F_1(\varphi, f, f' \ldots \lambda, l, l' \ldots \mu, m, m' \ldots \vartheta, t, t' \ldots) = o.$$

Diese letztere mufs nun dem Gesetze der Homogeneität Genüge leisten; F_1 bezeichnet hier eine Function, die man, in jedem Falle, aus der gegebenen Gleichung F ableiten kann.

Erstes Buch.

Statik.

Erster Theil.

Erstes Kapitel.

Von der Zusammensetzung und dem Gleichgewichte der Kräfte, die an denselben Punkt angebracht sind.

24.

Wenn ein materieller Punkt der gleichzeitigen Wirkung mehrerer Kräfte unterworfen ist, die sich nicht im Gleichgewichte halten, so bewegt er sich nach einer bestimmten Richtung, und man kann die Bewegung, die er annimmt, einer einzigen Kraft zuschreiben, die nach dieser Richtung wirkt. Diese Kraft ist das, was man die Mittelkraft der Kräfte nennt, die den beweglichen Körper fortgetrieben haben, und diese Kräfte selbst nennt man die Seitenkräfte der ersteren. Wird die Mittelkraft in dem ihrer Richtung entgegengesetzten Sinne angebracht, so hält sie den Seitenkräften das Gleichgewicht, weil sie dem Körper eine Bewegung mitzutheilen sucht, die derjenigen gleich und entgegengesetzt ist, die er durch die gleichzeitige Wirkung der Seitenkräfte erhalten würde, und weil eben deswegen kein Grund vorhanden ist, weswegen er sich eher nach der einen als nach der anderen Seite bewegen sollte.

Sind alle Seitenkräfte nach derselben geraden Linie gerichtet, und wirken sie alle in demselben Sinne, so folgt aus der Ansicht, die wir über das Maafs der Kräfte gegeben haben (§. 5), dafs die Mittelkraft ihrer Summe gleich seyn wird. Wird der bewegliche Körper durch zwei Kräfte getrieben, die sich gerade entgegengesetzt sind, so kann man

die gröſsere in zwei andere zerlegen, von welchen die eine, die der kleineren gleich ist, durch diese aufgehoben wird; die andere, die dem Ueberschusse der gröſseren über die kleinere gleich ist, wird die Mittelkraft seyn. Aus diesen zwei Sätzen kann man die Folgerung ziehen, daſs, wenn man eine Anzahl von Seitenkräften hat, die, theils nach einer geraden Linie, theils in entgegengesetztem Sinne nach deren Verlängerung gerichtet sind, alsdann die Mittelkraft der Summe derjenigen, die in einem Sinne wirken, weniger der Summe derer, die in entgegengesetztem Sinne wirken, gleich seyn wird, und daſs sie in dem Sinne der gröſseren Summe wirken wird. Wenn beide Summen gleich sind, so wird die Mittelkraft Null seyn, und die gegebenen Kräfte werden sich im Gleichgewichte halten.

25.

Es giebt noch einen anderen Fall, in welchem man ebenfalls sehr leicht die Gröſse und Richtung der Mittelkraft bestimmen kann.

Seyen MA, MB, MC (Fig. 5) die Richtungen der drei gleichen Kräfte, die an den Punkt M angebracht sind; man nehme an, daſs diese drei Kräfte in derselben Ebene enthalten sind, und daſs die drei Winkel AMB, BMC, CMA einander gleich oder alle drei einzeln $= 120^0$ sind. Der Punkt M wird daher im Gleichgewichte bleiben, denn es ist kein Grund vorhanden, weswegen er aus der Ebene, in welcher die drei Kräfte liegen, heraus gehen sollte, noch warum er sich eher in dem einen als in dem andern der erwähnten Winkel bewegen sollte. Jede der drei Kräfte wird daher der Mittelkraft der beiden übrigen gleich und entgegengesetzt seyn. Nimmt man nun auf den Richtungen MA und MB zweier dieser Kräfte gleich groſse Linien MG und MH, um ihre Gröſse vorzustellen, und bildet man die Raute $GMHK$, so wird die Diagonale MK auf die Verlängerung MD der Linie MC fallen; der Winkel MGK wird 60^0 betragen, so wie auch jeder der zwei anderen Winkel desselben Dreiecks, welches ein gleichseitiges seyn wird. Man hat daher

$$MK = MG,$$

folglich stellt die Diagonale MK der Raute, die aus den zwei Kräften MG und MH construiert worden ist, die Mittelkraft

dieser zwei Kräfte, sowohl der Gröſse als der Richtung nach, vor.

Dieser Satz ist in einem anderen enthalten, den wir nun zuerst für den Fall beweisen wollen, wenn zwei gleiche Kräfte gegeben sind, deren Richtungen einen beliebigen Winkel mit einander einschlieſsen, und den wir nachher auf ungleiche Kräfte ausdehnen werden.

26.

Die Mittelkraft zweier gleicher Kräfte theilt jedenfalls den Winkel, der zwischen ihren Richtungen enthalten ist, in zwei gleiche Theile; denn es ist kein Grund vorhanden, warum sie sich der einen dieser zwei Kräfte mehr nähern sollte als der anderen, noch warum sich ihre Richtung eher nach der einen als nach der anderen Seite von der Ebene entfernen sollte, in welcher diese Kräfte enthalten sind. Die Richtung dieser Mittelkraft ist daher bekannt, und wir haben nur noch ihre Gröſse zu bestimmen.

Um diese zu finden, nehme man an, es seyen MA und MB (Fig. 6) die Richtungen der Seitenkräfte, deren gemeinschaftlicher Werth durch P dargestellt wird. Sey $2x$ der Winkel AMB und MD die Richtung der Mittelkraft, so daſs man hat

$$AMD = BMD = x.$$

Die Gröſse der Mittelkraft kann nur von den Gröſsen P und x abhängen, bezeichnet man sie durch R, so hat man

$$R = f\,(P, x).$$

In dieser Gleichung sind R und P die einzigen Gröſsen, deren numerischer Werth sich mit der Einheit der Kraft ändert; nach dem Gesetze der Homogeneität der Gröſsen (§. 23) muſs daher die Function $f\,(P, x)$ die Form $P\varphi x$ haben. Man hat also

$$R = P\varphi x,$$

und die Frage kommt darauf zurück, die Form der Function φx zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke ziehe ich willkührlich durch den Punkt M die vier Linien MA', MA'', MB', MB'', ich nehme an, daſs die vier Winkel $A'MA$, $A''MA$, $B'MB$, $B''MB$ unter einander gleich sind, und stelle jeden derselben

durch z vor. Ich zerlege die Kraft P, die nach MA gerichtet ist, in zwei gleiche Kräfte, die nach MA' und MA'' gerichtet sind, das heifst, ich betrachte P als die Mittelkraft zweier gleicher Kräfte, deren Werth unbekannt ist, und die nach den Richtungen MA' und MA'' wirken; bezeichnet man diesen Werth durch Q, so hat man

$$P = Q\varphi z,$$

denn es mufs zwischen den Gröfsen P, Q, z dasselbe Verhältnifs bestehen, wie zwischen den Gröfsen R, P, x. Ebenso zerlege ich die Kraft P, die nach MB gerichtet ist, in zwei Kräfte Q, die nach MB' und MB'' gerichtet sind. Auf diese Weise sind die zwei Kräfte P durch die vier Kräfte Q ersetzt, folglich mufs die Mittelkraft der letzteren, sowohl der Gröfse als der Richtung nach, mit der Kraft R zusammenfallen, die die Mittelkraft der beiden Kräfte P ist.

Nennt man aber Q' die Mittelkraft der beiden Kräfte Q, die nach MA' und MB' gerichtet sind, und bemerkt, dafs

$$A'MD = B'MD = x - z$$

ist, so wird diese Kraft Q' nach MD gerichtet seyn, und man hat

$$Q' = Q\varphi(x - z).$$

Ebenso wird auch die Mittelkraft der beiden anderen Kräfte Q nach MD gerichtet seyn, weil diese gerade Linie auch den Winkel $A''MB''$ in zwei gleiche Theile theilt, und da

$$A''MD = B''MD = x + z,$$

so hat man

$$Q'' = Q\varphi(x + z),$$

wo Q'' diese zweite Mittelkraft bedeutet. Da die zwei Kräfte Q' und Q'' nach derselben geraden Linie MD gerichtet sind, so wird ihre Mittelkraft, die zugleich die der vier Kräfte Q ist, ihrer Summe gleich seyn; man mufs daher auch

$$R = Q' + Q''$$

haben. Man hat aber auch schon

$$R = P\varphi x = Q\varphi z\varphi x.$$

Substituiert man nun diesen Werth von R und die Werthe von Q' und Q'' in die vorhergehende Gleichung, und unterdrückt den allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor Q, so hat man

$$\varphi x . \varphi z = \varphi(x + z) + \varphi(x - z) \qquad (1)$$

Dies ist die Gleichung, die wir auflösen müssen, um daraus den Werth von φx abzuleiten.

27.

Zuerst bemerkt man, dafs man dieser Gleichung Genüge leistet, wenn man

$$\varphi x = 2 \cos ax$$

setzt, wo a eine willkührliche Constante ist, so dafs man zu gleicher Zeit

$$\varphi z = 2 \cos az$$
$$\varphi(x+z) = 2 \cos a(x+z)$$
$$\varphi(x-z) = 2 \cos a(x-z)$$

hat; substituiert man diese Werthe in die Gleichung (1), so erhält man wirklich die bekannte Gleichung

$$2 \cos ax . \cos az = \cos a(x+z) + \cos a(x-z).$$

Ich behaupte aber, dafs dieser Werth der Function φx der einzige ist, der der Gleichung (1) Genüge leistet, und dafs aufserdem die Constante a, bei der Frage die uns beschäftigt, der Einheit gleich ist, so dafs man hat

$$\varphi x = 2 \cos x. \qquad (2)$$

Dies ist von selbst einleuchtend, wenn $x = o$ ist, denn alsdann fallen die Richtungen der zwei Kräfte P zusammen, und die Mittelkraft R ist $2P$ gleich, was voraussetzt, dafs $\varphi x = 2$ ist. Nimmt man nun an, dafs es noch einen Werth α von x giebt, für welchen man ebenfalls $\varphi\alpha = 2 \cos \alpha$ hat, so behaupte ich, dafs die Gleichung auch noch für alle Werthe 2α, 3α, 4α ... $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha$, $\frac{1}{8}\alpha$ ... von x und allgemein für

$$x = \frac{m\alpha}{2^n} \qquad (3)$$

gültig ist, wenn m und n beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Ist nemlich die Gleichung (2) für die drei Winkel x, z, $x - z$ gültig, so dafs man hat

$$\varphi x = 2 \cos x, \quad \varphi z = 2 \cos z, \quad \varphi(x-z) = 2 \cos(x-z),$$

so hat sie auch für einen vierten Winkel $x + z$ statt, denn vermöge der Gleichung (1) hat man alsdann

$$\varphi(x+z) = 4 \cos x . \cos z - 2 \cos(x-z),$$

welche Gleichung sich auf

$$\varphi(x+z) = 2 \cos(x+z)$$

reduciert. Da nun die Gleichung (2) für die Werthe $x = o$

und $x = \alpha$ statt hat, so folgt daraus, daſs sie auch noch für den Werth $x = 2\alpha$ gültig seyn muſs. Da sie aber für die Werthe $x = \alpha$, $x = 2\alpha$ gültig ist, so muſs sie auch noch für den Werth $x = 3\alpha$ bestehen, und indem man auf diese Weise fortgeht, so sieht man, daſs sie auch für den Werth $x = m\alpha$ gültig seyn wird.

Ich setze nun $m\alpha = \beta$, man hat also

$$\varphi\beta = 2 \cos \beta,$$

und hieraus kann man schlieſsen, daſs die Gleichung (2) auch noch für den Werth $x = \frac{1}{2}\beta$ bestehen wird, denn wenn man $x = z = \frac{1}{2}\beta$ setzt, so verwandelt sich die Gleichung (1) in

$$(\varphi \tfrac{1}{2}\beta)^2 = 2 \cos \beta + 2,$$

woraus sich

$$\varphi \tfrac{1}{2}\beta = 2 \cos \tfrac{1}{2}\beta$$

ergiebt. Setzt man nun $x = z = \frac{1}{4}\beta$, so hat man, der Gleichung (1) und dieser letzteren zufolge,

$$(\varphi \tfrac{1}{4}\beta)^2 = 2 \cos \tfrac{1}{2}\beta + 2$$

$$\varphi \tfrac{1}{4}\beta = 2 \cos \tfrac{1}{4}\beta,$$

und indem man so fortfährt, kann man die Gleichung (2) für $x = \frac{\beta}{2^n}$ beweisen, d. h. für alle Werthe von x, die in der Formel (3) enthalten sind.

Da aber die Zahlen m und n so groſs seyn können als man will, und selbst unendlich groſs werden können, so kann man diese Werthe von x durch unendlich kleine Stufen wachsen lassen. Die Formel (3) enthält also alle möglichen Werthe des Winkels x, und die Gleichung (2) ist vollständig bewiesen, sobald sie nur für den besonderen Werth $x = \alpha$, der von Null verschieden ist, statt hat. Nach dem Lehrsatze des §. 25 ist aber die Mittelkraft $R = P$, wenn $x = 60^0$ ist; man hat also

$$\varphi x = 1 = 2 \cos 60^0.$$

Die Gleichung (2) hat daher für $x = 60^0$ statt, und folglich auch für alle Werthe von x.

28.

Vermittelst dieser Gleichung hat man

$$R = 2P \,.\, \cos x.$$

Werden daher die Mittelkraft R und die beiden Seitenkräfte P, wie in §. 25, durch gerade Linien vorgestellt, die auf ihren Richtungen, von ihrem Angriffspunkte aus, genommen sind, so wird die Kraft R das Doppelte der Projection von P auf ihre Richtung, oder der Diagonale der Raute gleich seyn, die man aus den beiden Kräften P gebildet hat.

Seyen nun zwei ungleiche Kräfte P und Q an einen Punkt M (Fig. 7) angebracht, und zwar nach den Richtungen MA und MB, man stelle ihre Gröfsen durch die Linien MG und MH vor, die auf ihren Richtungen genommen sind, und vollende das Parallelogramm $MGKH$, so mufs man zwei Fälle unterscheiden, je nachdem der Winkel AMB im ersten Falle ein rechter, oder im anderen Falle ein spitzer oder stumpfer Winkel ist.

Im ersten Falle ziehe man die beiden Diagonalen MK und GH, die sich im Punkte L schneiden, durch die Punkte G und H ziehe man die Linien GN und HO mit ML parallel, diese werden in N und O die Linie NO treffen, die durch den Punkt M mit GH parallel gezogen ist. Der Punkt L ist die Mitte von MK und GH, und da in einem Rechtecke die beiden Diagonalen gleich sind, so folgt hieraus, dafs man

$$GL = LH = LM$$

hat. Die beiden Parallelogramme $GLMN$ und $HLMO$ sind also Rauten, folglich kann, nach dem vorhergehenden Satze, die Kraft MG wie die Mittelkraft der zwei Kräfte MN und ML angesehen werden, und ebenso die Kraft MH wie die Mittelkraft von MO und ML. Substituiert man nun statt der gegebenen Kräfte ihre Seitenkräfte, so hat man statt MH und MG die beiden Kräfte MN und MO, die sich aufheben, weil sie einander gleich und entgegengesetzt sind, und die beiden Kräfte ML, die sich vereinigen und eine Mittelkraft geben, die, der Gröfse und Richtung nach, durch die Diagonale MK dargestellt werden kann.

Im zweiten Falle ziehe man durch die Punkte G und H (Fig. 8) die senkrechten Linien GE und HF auf die Diagonale MK, und die Linien GN und HO, die mit derselben Linie parallel sind; durch den Punkt M ziehe man die Linie NMO senkrecht auf die gerade Linie MK. Die beiden Parallelogramme $GEMN$ und $HFMO$ werden Rechtecke seyn, in

welchen die gleich grofsen Seiten MN und MO enthalten sind, da diese die Höhen der gleichen Dreiecke GMK und HMK sind. Nach dem ersten Falle kann man die Kräfte MG und MH durch ihre rechtwinkligen Seitenkräfte ME und MN, MF und MO ersetzen; statt der zwei gegebenen Kräfte hat man daher die zwei Kräfte MN und MO, die sich als gleich grofse und entgegengesetzte aufheben, und die beiden Kräfte ME und MF, die nach derselben Richtung wirken, und sich daher vereinigen, und, weil $ME = FK$ ist, eine Mittelkraft geben, die der Gröfse und Richtung nach durch die Diagonale MK vorgestellt werden kann.

Hieraus kann man also den Schlufs ziehen, dafs die Mittelkraft zweier Kräfte, die an denselben Punkt angebracht sind, und durch Linien dargestellt werden, die auf ihren Richtungen genommen werden, indem man von diesem Punkte ausgeht, der Gröfse und Richtung nach durch die Diagonale des Parallelogramms dargestellt werden kann, das aus den zwei gegebenen Kräften gebildet worden ist.

29.

Aus diesem Lehrsatze lassen sich unmittelbar mehrere Folgerungen ableiten.

Zuerst sieht man, dafs alle Fragen, die man über die Zusammensetzung zweier Kräfte in eine einzige, und über die Zerlegung einer Kraft in zwei andere aufwerfen kann, auf die Auflösung eines Dreiecks zurück geführt sind. Denn die Gröfsen der Mittelkraft und der zwei Seitenkräfte werden durch die drei Seiten MK, MG, GK des Dreiecks MGK dargestellt, und die drei Winkel dieses Dreiecks sind diejenigen, welche die Mittelkraft mit jeder der Seitenkräfte einschliefst und das Supplement des Winkels, der zwischen den zwei Mittelkräften enthalten ist. Hieraus folgt, dafs, wenn drei der sechs Stücke, nemlich der drei Kräfte und der drei Winkel, die zwischen ihren Richtungen enthalten sind, gegeben sind, man die drei anderen findet, wenn man das Dreieck MGK auflöst, wobei vorausgesetzt wird, dafs wenigstens eine Kraft unter den gegebenen Stücken ist.

Seyen z. B. P und Q die Werthe der beiden Seitenkräfte, und m der Winkel, der zwischen ihren Richtungen enthalten ist, man will die Mittelkraft R finden, und den Winkel x, den sie mit der Kraft P einschliefst. Zuerst hat man die Gleichung

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,PQ \cos m,$$

um den Werth von R zu bestimmen, und den Werth von x findet man aus der Proportion

$$\sin x : \sin m = Q : R.$$

Sind die drei Kräfte P, Q, S, die an denselben Punkt M (Fig. 9) angebracht sind, und nach den Richtungen MA, MB, MC wirken, mit einander im Gleichgewichte, so muſs jede dieser Kräfte der Mittelkraft der beiden anderen gleich und entgegengesetzt seyn, und da diese Mittelkraft in der Ebene der beiden Kräfte enthalten ist, so folgt zuerst daraus, daſs die drei gegebenen Kräfte ebenfalls in derselben Ebene liegen müssen. Sey MD die Verlängerung von MC, so wird die Mittelkraft von P und Q nach MD gerichtet seyn, und bezeichnet man sie durch R, so hat man

$$R = S.$$

Vergleicht man auſserdem die Kraft R mit jeder der Seitenkräfte, so hat man, nach dem eben Gesagten,

$$R : Q = \sin AMB : \sin AMD$$
$$R : P = \sin AMB : \sin BMD,$$

weil

$$\sin AMD = \sin AMC, \quad \sin BMD = \sin BMC.$$

Hieraus folgt also

$$S : Q : P = \sin AMB : \sin AMC : \sin BMC,$$

woraus hervorgeht, daſs, wenn die Kräfte an einem Punkte im Gleichgewichte sind, die Gröſse einer jeden derselben durch den Sinus des Winkels dargestellt werden kann, der zwischen den Richtungen der beiden anderen enthalten ist.

Vom Punkte O, der auf der Richtung der Mittelkraft R oder auf deren Verlängerung genommen wird, fälle ich senkrechte Linien OE und OF auf die Richtungen der Seitenkräfte P und Q, alsdann hat man

$$OE = MO \sin AMD, \quad OF = MO \sin BMD.$$

Multipliciert man daher die zwei letzten Glieder der Proportion

$$P : Q = \sin BMD : \sin AMD$$

mit MO, so folgt daraus

$$P : Q = OF : OE,$$

so dafs die Seitenkräfte im umgekehrten Verhältnisse der senkrechten Linien stehen, die auf ihre Richtungen von irgend einem Punkte aus gefällt sind, der der Richtung der Mittelkraft angehört. Stehen umgekehrt die Seitenkräfte P und Q im umgekehrten Verhältnisse der senkrechten Linien OE und OF, die auf ihre Richtungen von einem Punkte O aus gefällt werden, der in ihrer Ebene liegt, so gehört dieser Punkt der Richtung der Mittelkraft an, denn dividiert man die zwei letzten Glieder der letzten Proportion durch MO, so erhält man die vorhergehende, die diese Richtung bestimmt.

30.

Ist die Mittelkraft der beiden Kräfte bekannt, so ist es leicht, die irgend einer Anzahl von Kräften, die an denselben Punkt angebracht sind und in derselben Ebene oder in verschiedenen Ebenen liegen, daraus abzuleiten. Man nimmt nemlich zuerst die Mittelkraft zweier dieser Kräfte, verbindet alsdann diese Mittelkraft mit einer dritten Kraft, dies giebt eine zweite Mittelkraft, die man ebenso mit einer vierten Kraft verbindet, und so fährt man fort, bis man alle gegebenen Kräfte erschöpft hat. Bei dieser Construction sieht man leicht, dafs, wenn die Gröfsen aller Kräfte durch Seiten des Theils eines Vielecks dargestellt werden, die ihren Richtungen parallel und in dem Sinne ihrer Wirkungen gezogen sind, die Mittelkraft, der Gröfse und Richtung nach, durch eine gerade Linie dargestellt wird, die die äufsersten Punkte dieser gebrochenen Linie verbindet, und also das Vieleck schliefsen wird. Die Ordnung, in welcher die Seiten, die den Kräften parallel sind, auf einander folgen werden, ist hierbei gleichgültig. Wenn sich das Vieleck von selbst schliefst, so ist die Mittelkraft Null, und die gegebenen Kräfte werden sich alsdann im Gleichgewichte halten.

Hieraus folgt, dafs, wenn drei Kräfte gegeben sind, die nicht in einer Ebene liegen, ihre Mittelkraft, der Gröfse und Richtung nach, durch die Diagonale des Parallelopipedums dargestellt wird, dessen drei anliegende Seiten diese drei Kräfte sind.

31.

Man kann diese Zurückführung einer Anzahl von Kräften auf eine einzige noch auf eine einfachere Weise ausführen, indem man zuerst den besonderen Fall dreier rechtwinkliger Kräfte betrachtet, auf welchen man den allgemeineren Fall zurück führt.

Seyen X, Y, Z die drei Seitenkräfte, R ihre Mittelkraft, a, b, c die Winkel, welche sie mit X, Y, Z einschliefst. Wie man so eben gesehen hat, ist R die Diagonale des Parallelopipedums, dessen anliegende Seiten X, Y, Z sind; da aber dieses Parallelopipedum rechtwinklig ist, so folgt daraus

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \qquad (a)$$

Auch folgt daraus, dafs, wenn man das Ende der Diagonale R mit den Endpunkten der drei Seiten X, Y, Z verbindet, man drei rechtwinklige Dreiecke bilden wird, deren gemeinschaftliche Hypotenuse R seyn wird, woraus alsdann folgt

$$X = R \,.\, \cos a, \quad Y = R \,.\, \cos b, \quad Z = R \,.\, \cos c. \quad (b)$$

Diese Gleichungen stimmen mit der vorhergehenden überein, da die drei Winkel a, b, c durch die Gleichung

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$$

unter einander verbunden sind.

Sind die Seitenkräfte X, Y, Z gegeben, so giebt die Gleichung (a) den Werth der Mittelkraft an, und die Gleichungen (b) bestimmen deren Richtung, mit Hülfe der drei Winkel a, b, c; ist dagegen die Mittelkraft R gegeben, und will man sie in drei rechtwinklige Seitenkräfte X, Y, Z, die mit ihr die Winkel a, b, c einschliefsen, zerlegen, so kann man die Werthe der verlangten Kräfte unmittelbar durch die Gleichungen (b) bestimmen.

Wenn eine der Seitenkräfte, z. B. die Kraft Z, Null ist, so ist R nur die Mittelkraft zweier Kräfte X und Y, sie ist daher in deren Ebene enthalten, und ihre Richtung hängt nur von den zwei Winkeln a und b ab. Diese Winkel und der Werth von R sind alsdann durch die Gleichungen

$$R^2 = X^2 + Y^2, \quad X = R \,.\, \cos a, \quad Y = R \,.\, \cos b$$

bestimmt.

32.

Man nehme nun an, es sey M (Fig. 1) der Angriffspunkt einer gewissen Anzahl gegebener Kräfte. Man bezeichne diese Kräfte durch

$$P, \; P', \; P'' \text{ etc.},$$

und, um der Einbildungskraft zu Hülfe zu kommen, setze man, es sey die gerade Linie MD die Richtung der Kraft P. Es ist unnöthig, die Richtungen der anderen Kräfte in der Figur anzugeben. Seyen α, β, γ die Winkel, welche die Richtung MD mit den drei rechtwinkligen Axen MA, MB, MC einschliefst, die willkührlich durch den Punkt M gezogen sind. Man bezeichne ebenso durch α' β' γ' die Winkel, welche die Kraft P' mit denselben Axen einschliefst, ebenso durch α'', β'', γ'' diejenigen, die der Kraft P'' entsprechen u. s. w. Alle diese Winkel sind gegeben und müssen sich von Null bis 180^0 erstrecken (§. 7), damit die Kräfte P, P', P'' u. s. w. alle möglichen Lagen um den Punkt M haben können.

Man zerlege jede dieser Kräfte in drei andere, die nach den Axen MA, MB, MC gerichtet sind. Die Seitenkräfte der Kraft P sind

$$P . \cos \alpha, \quad P . \cos \beta, \quad P . \cos \gamma.$$

Die der Kraft P' sind

$$P' . \cos \alpha', \quad P' . \cos \beta', \quad P' . \cos \gamma'$$

und so weiter, und diese Seitenkräfte wirken nach der Richtung der Axen oder deren Verlängerung, je nachdem sie positiv oder negativ seyn werden. Da z. B. die Richtung MD, ebenso wie die Axe MC, über der Ebene AMB der beiden anderen Kräfte liegt, so strebt die Seitenkraft $P . \cos \gamma$ der Kraft P, den Punkt M zu heben, d. h. sie wirkt nach MC, und in diesem Falle ist $P . \cos \gamma$ eine positive Gröfse, weil $\gamma < 90^0$ ist. Fiele im Gegentheil diese Richtung MD unterhalb der Ebene AMB, so hätte man $\gamma > 90^0$, die Seitenkraft $P . \cos \gamma$ wäre negativ, und würde zu gleicher Zeit den Punkt M herab zu drücken streben, das heifst, sie würde nach der Verlängerung von MC wirken. Nimmt man daher auf die Zeichen der Seitenkräfte Rücksicht, so sieht man, nach dem, was in §. 24 gesagt worden ist, dafs alle Kräfte, die nach derselben Axe oder nach ihrer Verlängerung gerich-

tet sind, sich auf eine einzige reducieren, die ihrer Summe gleich ist.

Auf diese Weise sind die gegebenen Kräfte P, P', P'' u. s. w. durch drei rechtwinklige Kräfte ersetzt, und wenn man diese durch X, Y, Z bezeichnet, so hat man

$$\left.\begin{aligned} X &= P \,.\, \cos\alpha + P' \,.\, \cos\alpha' + P'' \,.\, \cos\alpha'' + \ldots \\ Y &= P \,.\, \cos\beta + P' \,.\, \cos\beta' + P'' \,.\, \cos\beta'' + \ldots \\ Z &= P \,.\, \cos\gamma + P' \,.\, \cos\gamma' + P'' \,.\, \cos\gamma'' + \ldots \end{aligned}\right\} (c)$$

Die Werthe von X, Y, Z können positiv oder negativ seyn, ihre Vorzeichen geben die Richtung ihrer Wirkung an. Ist die Kraft X positiv, so wirkt sie nach der Richtung der Axe MA, oder im Sinne der Seitenkräfte $P \,.\, \cos\alpha$, $P' \,.\, \cos\alpha'$ u. s. w., die positiv sind. Ist sie negativ, so muſs man daraus schlieſsen, daſs sie nach der Verlängerung von MA, oder im Sinne der negativen Seitenkräfte wirkt, und ebenso ist es bei den Kräften Y und Z.

Dies angenommen, sey R die Mittelkraft der gegebenen Kräfte P, P', P'', ... oder der drei Kräfte X, Y, Z, seyen zugleich a, b, c die Winkel, die ihre unbekannte Richtung mit den Axen MA, MB, MC einschlieſst. Die Werthe von R, a, b, c werden durch die Gleichungen (a) und (b) gegeben seyn, in welchen man die Formeln (c) an die Stelle von X, Y, Z setzen muſs. Die Winkel a, b, c können spitz oder stumpf seyn; da aber die Kraft R immer eine positive Gröſse seyn muſs, so werden die Zeichen ihrer Cosinus dieselben seyn, wie die der Gröſsen X, Y, Z, vermöge der Gleichung (b). Auf diese Weise wird die Kraft R, sowohl der Gröſse als Richtung nach, vollkommen bestimmt seyn.

33.

Die Gröſse der Mittelkraft R kann nicht von der willkührlichen Richtung der Axen MA, MB, MC abhängen, sie hängt blos von der Gröſse der gegebenen Kräfte und den Winkeln, die zwischen deren Richtungen enthalten sind, ab. Wirklich kann man auch einen Ausdruck finden, der nur diese Gröſsen enthält.

Zu diesem Zwecke bezeichne man durch PMP', PMP'', $P'MP''$ u. s. w. die Winkel, die zwischen den Richtungen

der Kräfte P und P', P und P'', P' und P'' u. s. w. enthalten sind. Nach der Gleichung (2) des §. 9 haben wir

$$\cos PMP' = \cos\alpha . \cos\alpha' + \cos\beta . \cos\beta' + \cos\gamma . \cos\gamma',$$
$$\cos PMP'' = \cos\alpha . \cos\alpha'' + \cos\beta . \cos\beta'' + \cos\gamma . \cos\gamma''$$
$$\cos P'MP'' = \cos\alpha' . \cos\alpha'' + \cos\beta' . \cos\beta'' + \cos\gamma' . \cos\gamma''$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Auch hat man

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$
$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$$
$$\cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' = 1$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

addiert man daher die Quadrate der Formeln (c), und berücksichtigt die Gleichung (a), so findet man

$$R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 + \ldots$$
$$+ 2\,PP' \cos PMP' + 2\,PP'' \cos PMP'' + \ldots$$
$$+ 2\,P'P'' \cos P'MP'' + \ldots$$

als Quadrat des Werthes von R, den man wissen wollte.

34.

Aus den Gleichungen (b) und (c) kann man auch eine Eigenschaft der Mittelkraft ableiten, die uns in einem der folgenden Paragraphen nützlich seyn wird.

In irgend einer Richtung ziehe ich durch den Punkt M eine gerade Linie, deren anderen Endpunkt ich O nenne. Seyen g, h, k die Winkel AMO, BMO, CMO, die diese gerade Linie mit den drei Axen MA, MB, MC einschliefst. Ferner bezeichne man durch RMO, PMO, $P'MO$ u. s. w. die Winkel, die zwischen dieser geraden Linie MO und den Richtungen der Kräfte R, P, P', P'' u. s. w. enthalten sind, alsdann hat man wieder

$$\cos RMO = \cos g . \cos a + \cos h . \cos b + \cos k . \cos c,$$
$$\cos PMO = \cos g . \cos\alpha + \cos h . \cos\beta + \cos k . \cos\gamma,$$
$$\cos P'MO = \cos g . \cos\alpha' + \cos h . \cos\beta' + \cos k . \cos\gamma',$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Nach der ersten dieser Formeln und den Gleichungen (b) hat man

$$R \cos RMO = X \cos g + Y \cos h + Z \cos k,$$

und wenn man die Gleichungen (c) zusammen addiert, nachdem man sie, die erste durch $\cos g$, die zweite durch $\cos h$, die dritte durch $\cos k$ multipliciert hat, so erhält man, vermöge der vorhergehenden Formeln,

$$R \cdot \cos RMO = P \cdot \cos PMO + P' \cos P'MO + \ldots$$

woraus sich deutlich ergiebt, dafs die Seitenkraft der Mittelkraft R, die nach irgend einer Richtung MO wirkt, der Summe der Seitenkräfte von P, P', P'' u. s. w., die nach derselben Richtung wirken, gleich ist.

Dies vorausgesetzt, projiciere ich die gerade Linie MO auf die Richtungen der Kräfte R, P, P', P'' u. s. w., nenne ferner r, p, p', p'' u. s. w. ihre Projectionen, so dafs man hat

$$r = MO \cdot \cos RMO$$
$$p = MO \cdot \cos PMO$$
$$p' = MO \cdot \cos P'MO,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

indem man jede der Gröfsen r, p, p', p'' u. s. w. als eine positive oder negative ansieht, je nachdem die Projection, die sie ausdrückt, auf die Richtung der Kraft selbst oder auf ihre Verlängerung fällt. Multipliciert man daher durch MO die vorhergehende Gleichung, so hat man

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots . \qquad (d)$$

welcher Ausdruck die Eigenschaft der Mittelkraft enthält, die bewiesen werden sollte.

35.

Damit die Kräfte P, P', P'' u. s. w. im Gleichgewichte seyen, ist es hinreichend, dafs ihre Mittelkraft R Null sey, und diese Bedingung ist zugleich nothwendig, wenn ihr Angriffspunkt M gänzlich frei ist, die Gleichung

$$R = o$$

oder

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = o,$$

kann aber nur dann statt finden, wenn man einzeln hat

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = o,$$

das heifst, in Folge der Gleichungen (c),

$$\left.\begin{aligned} P \cdot \cos\alpha + P' \cos\alpha' + P'' \cdot \cos\alpha'' + \ldots &= o \\ P \cdot \cos\beta + P' \cdot \cos\beta' + P'' \cdot \cos\beta'' + \ldots &= o \\ P \cdot \cos\gamma + P' \cdot \cos\gamma' + P'' \cdot \cos\gamma'' + \ldots &= o \end{aligned}\right\} (e)$$

Dieses sind also die Gleichungen des Gleichgewichtes eines materiellen Punktes, den man sich als völlig frei denkt. In diesem Falle mufs jede der Kräfte, die auf ihn wirken, der Mittelkraft aller übrigen gleich und entgegengesetzt seyn, und es ist leicht, sich von der Wahrheit dieser Behauptung zu überzeugen.

Sey R' die Mittelkraft der Kräfte P', P'' u. s. w. Man nenne a', b', c' die Winkel, die sie mit den Axen MA, MB, MC einschliefst, und setze, zur Abkürzung,

$$X' = P' \cos\alpha' + P'' \cos\alpha'' + \ldots$$
$$Y' = P' \cos\beta' + P'' \cos\beta'' + \ldots$$
$$Z' = P' \cos\gamma' + P'' \cos\gamma'' + \ldots$$

so hat man, nach §. 32,

$$X' = R' \cos a', \quad Y' = R' \cos b', \quad Z' = R' \cos c',$$

und folglich, vermöge der Gleichungen des Gleichgewichtes,

$$P \,.\, \cos\alpha = - R' \cos a'$$
$$P \,.\, \cos\beta = - R' \cos b'$$
$$P \,.\, \cos\gamma = - R' \cos c'.$$

Addiert man diese Gleichungen zusammen; nachdem man sie auf das Quadrat erhoben hat, so findet man

$$P^2 = R'^2,$$

da nach §. 6

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$
$$\cos^2 a' + \cos^2 b' + \cos^2 c' = 1,$$

folglich hat man

$$P = \pm R'.$$

Da aber diese beiden Kräfte positive Gröfsen seyn müssen, so mufs man $P = R'$ nehmen. Die vorhergehenden Gleichungen verwandeln sich alsdann in

$$\cos\alpha = - \cos a', \quad \cos\beta = - \cos b', \quad \cos\gamma = - \cos c',$$

folglich sind die Winkel α, β, γ Supplemente von a', b', c', und entsprechen einer Kraft, deren Richtung die Verlängerung der Kraft R' ist (§. 7). Hieraus folgt also, dafs die Kraft P der Mittelkraft R' aller übrigen Kräfte P', P'' u. s. w. gleich und gerade entgegengesetzt ist, was nachgewiesen werden sollte.

36.

Wenn der Punkt M, an welchen die Kräfte P, P', P'' u. s. w. angebracht sind, gezwungen ist, auf einer gegebenen

Oberfläche zu bleiben, so ist es für das Gleichgewicht nicht mehr erforderlich, daſs ihre Mittelkraft Null sey; es ist hinreichend, daſs sie senkrecht auf der Oberfläche stehe, weil sie alsdann den Punkt M, nach keiner Richtung, auf der Oberfläche fortbewegen kann. Diese Bedingung ist aber auch nothwendig, denn wenn sie nicht erfüllt wäre, so würde sich die Mittelkraft in zwei Kräfte zerlegen, von welchen eine senkrecht auf der Oberfläche wäre und aufgehoben würde, die andere dagegen die Oberfläche berühren würde, und daher durch Nichts gehindert wäre, die Körper zu bewegen. Man brauchte also nur in jedem Falle die Richtung der Mittelkraft der Kräfte P, P' P'' u. s. w. zu suchen, und nach zu sehen, ob sie auf der gegebenen Oberfläche senkrecht steht, um zu wissen, ob das Gleichgewicht vorhanden ist. Indessen ist es rathsamer, die Bedingungen des Gleichgewichtes durch Gleichungen, die die gegebenen Gröſsen der Frage enthalten, auszudrücken, wie wir es für den Fall eines freien Punktes gethan haben.

Da nun die normalen Seitenkräfte aller Kräfte, die auf den Punkt M wirken, durch den Widerstand der Oberfläche aufgehoben werden, so ist dieser Widerstand einer Kraft gleich, die den vereinten aufgehobenen Kräften gleich und entgegengesetzt ist. Hieraus ergiebt sich, daſs man von der gegebenen Oberfläche völlig abstrahieren und den Punkt M als völlig frei ansehen kann, wenn man nur zu den gegebenen Kräften P, P' P''... eine neue Kraft hinzufügt, deren Gröſse noch unbekannt ist, und welche senkrecht auf der Oberfläche steht.

Bezeichne also N diese Kraft, und seyen λ, μ, ν die Winkel, die ihre Richtung mit den Axen MA, MB, MC einschlieſst. Jede der Gleichungen des Gleichgewichtes, die früher gefunden wurden, wird daher um ein neues Glied vermehrt, so daſs man statt der Gleichungen (c) nun haben wird

$$\left.\begin{aligned} N\cos\lambda + P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots &= o \\ N\cos\mu + P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots &= o \\ N\cos\nu + P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots &= o \end{aligned}\right\}(f)$$

Ich bezeichne durch x, y, z die drei Coordinaten von M, die sich auf Axen beziehen, die MA, MB, MC parallel sind, und durch

$$L = o$$

die Gleichung der gegebenen Oberfläche. Da die Richtung der Kraft N, angenommener Maſsen, die der Normalen am Punkte M ist, so hat man nach den Gleichungen (5) des §. 21

$$\cos\lambda = V.\frac{dL}{dx}, \quad \cos\mu = V.\frac{dL}{dy}, \quad \cos\nu = V.\frac{dL}{dz},$$

indem man, zur Abkürzung,

$$V = \pm\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

setzt.

Das Vorzeichen von V ist unbekannt, weil man nicht im Voraus wissen kann, nach welchem Theile der Normalen die Kraft N gerichtet seyn wird, V verschwindet aber, wenn man N in den Gleichungen (f) eliminiert, und berücksichtigt man die Gleichungen (c), so findet man

$$\left.\begin{aligned} Y\frac{dL}{dx} - X\frac{dL}{dy} &= o \\ Z\frac{dL}{dx} - X\frac{dL}{dz} &= o \end{aligned}\right\} \quad (g)$$

als die zwei Gleichungen, die, für das Gleichgewicht eines materiellen Punktes, der auf einer gegebenen Oberfläche bleiben muſs, hinreichend und nothwendig sind.

37.

Wenn die Lage dieses Punktes auf dieser Oberfläche nicht bekannt ist, so dienen die Gleichungen (g) in Verbindung mit der gegebenen Gleichung $L = o$ dazu, die Coordinaten der verschiedenen Punkte dieser Oberfläche zu bestimmen, wo der Körper im Gleichgewichte bleiben kann. Ist aber seine Lage gegeben, so braucht man sich nur davon zu überzeugen, daſs die Coordinaten x, y, z, der Angriffspunkte der gegebenen Kräfte den Gleichungen (g) Genüge leisten. In diesem Falle aber erhält man einfachere Gleichungen, wenn man eine der Axen MA, MB, MC, die erste z. B., mit einem der beiden Theile der Normalen zusammen fallen läſst, woraus folgt

$$\cos\lambda = \pm 1, \quad \cos\mu = o, \quad \cos\nu = o,$$

wodurch die Gleichungen (f) in folgende übergehen:

$$\pm N + P.\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots = o$$
$$P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots = o$$
$$P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots = o.$$

Die beiden letzten Gleichungen zeigen, wie dies auch ohnehin einleuchtend ist, daſs in der Berührungsebene der gegebenen Oberfläche die Seitenkräfte der Kräfte, die an den beweglichen Punkt angebracht sind, sich ebenso im Gleichgewichte halten müssen, als wenn diese Oberfläche nicht vorhanden wäre.

Der Widerstand N, den die Oberfläche den Kräften P, P', $P''\ldots$ entgegensetzt, ist dem Drucke, den sie von denselben erleidet, gleich und entgegengesetzt. In Folge der Gleichungen (f) ist dieser Druck, im Zustande des Gleichgewichtes, die Mittelkraft dieser Kräfte selbst. Bei der Anwendung muſs man seine Gröſse vermittelst der Gleichung (a) berechnen, um zu wissen, ob die Oberfläche im Stande ist, ihn auszuhalten. Wenn der bewegliche Punkt blos auf einer solchen Oberfläche aufliegt, die einem festen Körper angehören soll, so muſs auſserdem die Richtung dieses Druckes so beschaffen seyn, daſs sie den beweglichen Punkt gegen diese Oberfläche preſst; diese Bedingung kann nur durch eine Gleichung ausgedrückt seyn, deren Richtigkeit man in jedem Falle untersuchen muſs, indem man die Richtung dieser Kraft nach den Gleichungen (b) bestimmt. Diese Untersuchung kann noch einfacher vermittelst der ersten der drei vorhergehenden Gleichungen geführt werden. Denn nimmt man, um einen bestimmten Fall zu haben, an, daſs der Theil der Normalen, mit welchem man die Axe MA zusammen fallen läſst, der Theil sey, welcher in der Concavität der Oberfläche liegt, so weiſs man, ob die gegebenen Winkel α, α', α'' u. s. w. spitz oder stumpf sind, und auch das Zeichen der Summe X der Seitenkräfte, die nach dieser geraden Linie gerichtet sind, wird bekannt seyn. Da die Gröſse N immer positiv seyn muſs, so muſs man in der Gleichung, von welcher es sich handelt, nemlich

$$\pm N + X = o$$

das Zeichen — oder + vor N setzen, je nachdem die Summe X positiv oder negativ ist. Im ersten Falle hat man $\cos\lambda = -1$,

und der, N entgegengesetzte, Druck wird nach MA gerichtet seyn, im zweiten Falle hat man $\cos\lambda = 1$, und der Druck wird nach der Verlängerung dieses bestimmten Theils der Normalen wirken.

38.

Wenn der materielle Punkt, auf welchen die Kräfte P, P', P''... wirken, gezwungen ist, auf zwei gegebenen Oberflächen, oder auf der krummen Linie, in welcher sie sich durchschneiden, zu bleiben, so ist es für das Gleichgewicht hinreichend, dafs die Mittelkraft aller dieser Kräfte sich in zwei Kräfte zerlegen lasse, die auf den gegebenen Oberflächen senkrecht stehen, und durch deren Widerstand aufgehoben werden. Fügt man also zu den Kräften P, P', P''... noch zwei Kräfte hinzu, die auf dieser Oberfläche normal stehen, deren Gröfse aber unbekannt ist, so kann man von den Oberflächen abstrahieren, und den beweglichen Punkt als völlig frei ansehen.

Sind also N und N' die neuen Kräfte, und λ, μ, ν die Winkel, die die Richtung von N in Beziehung auf die Axen MA, MB, MC bestimmen, und λ' μ' ν' die Winkel, die auf dieselbe Weise die Richtung von N' bestimmen, so verwandeln sich die Gleichungen (e) in

$$\left.\begin{array}{l} N\cos\lambda + N'\cos\lambda' + P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + \ldots = o \\ N\cos\mu + N'\cos\mu' + P\cos\beta + P'\cos\beta' + \ldots = o \\ N\cos\nu + N'\cos\nu' + P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + \ldots = o \end{array}\right\} (h)$$

Bezeichnet man aufserdem durch x, y, z die Coordinaten des Punktes M, die auf Axen bezogen sind, welche MA, MB, MC parallel sind, und durch

$$L = o, \quad L' = o$$

die Gleichungen der beiden gegebenen Oberflächen, so sind die Werthe von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ dieselben, wie im Vorhergehenden, und aus denselben findet man die Werthe von $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$, indem man L in L' umändert. Substituiert man die Werthe in die drei Gleichungen (h), und eliminiert nachher N und N' aus denselben, so erhält man die Gleichung des Gleichgewichtes, der die gegebenen Kräfte P, P', P''.... Genüge leisten müssen; oder, wenn die Lage des beweglichen Punktes auf dem Durchschnitte der beiden Ober-

flächen nicht gegeben ist, so wird diese Gleichung nebst den Gleichungen $L = o$, $L' = o$, die drei Coordinaten x, y, z bestimmen.

Wenn die Lage des beweglichen Punktes auf der krummen Linie, auf welcher er bleiben soll, gegeben ist, so erhält man unmittelbar die Gleichung des Gleichgewichtes der Kräfte P, P', P''..., indem man die Axen MB, MC, welchen die Winkel μ, β, β' u. s. w. ν, γ, γ' u. s. w. entsprechen, in die Ebene der Linien, die auf beiden gegebenen Oberflächen senkrecht stehen, verlegt. Die dritte Axe fällt alsdann auf die Tangente der krummen Linie, die ihr Durchschnitt bildet, und steht daher auf den beiden normalen Kräften N und N' senkrecht, so dafs man hat $\lambda = 90^0$, $\lambda' = 90^0$, und, mit Rücksicht auf die erste Gleichung (h),

$$P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \ldots = o$$

als die verlangte Gleichung.

Diese Gleichung zeigt an, dafs die Summe der Seitenkräfte von P, P', P''..., die den Durchschnitt der beiden gegebenen Oberflächen berühren, gleich Null ist, welche Bedingung wirklich erforderlich ist, damit der Punkt M nicht über diese krumme Linie weggleiten könne. Hat man sich überzeugt, dafs sie erfüllt ist, so bestimmt man die Werthe der Kräfte N und N' und die Richtung, nach welcher sie wirken, vermittelst der zwei letzten Gleichungen (h). Nimmt man alsdann Kräfte, die N und N' gleich und entgegengesetzt sind, und reduciert man sie, mit Hülfe des Parallelogramms der Kräfte auf eine einzige, so ist diese letztere die Mittelkraft der Kräfte P, P P''..., und zeigt den Druck an, der auf die gegebene krumme Linie, auf welcher sie senkrecht steht, ausgeübt wird.

39.

Aus dem Vorhergehenden ist es ersichtlich, dafs man, wenn der bewegliche Punkt gezwungen ist, auf einer gegebenen krummen Linie zu bleiben, nur eine Gleichung des Gleichgewichtes hat, dagegen hat man zwei solche Gleichungen, wenn er sich auf einer gegebenen Oberfläche bewegen kann, und drei, wenn er ganz frei ist, so dafs die Zahl dieser Gleichungen, wie dies auch seyn mufs, zunimmt, so wie

die möglichen Bewegungen, die der Punkt annehmen kann, weniger beschränkt sind. Diese verschiedenen Gleichungen können in eine Formel zusammen gefafst werden, die in der Folge, als allgemeine Gleichung des Gleichgewichtes erscheinen wird, und auf jedes beliebige System materieller Punkte angewandt werden kann.

Um diese Formel zu erhalten, nehme man an, dafs der bewegliche Punkt, von dem Punkte M, in welchem er sich befindet, wenn er in der Lage des Gleichgewichtes ist, nach einem anderen Punkte O versetzt werde, der unendlich nahe bei M ist, und zwar so, dafs sich diese Versetzung mit der Bedingung verträgt, welcher der Körper unterworfen ist, wenn er nicht ganz frei ist. Man bezeichne durch r, p, p', p''... die Projectionen der unendlich kleinen Linie MO auf die Richtungen der Kräfte R, P, P', P''..., die sie in der ersten Lage des beweglichen Punktes haben, und betrachte jede dieser Projectionen als eine positive Gröfse oder eine negative, je nachdem sie auf die Richtung der Kraft selbst, der sie entspricht, oder auf deren Verlängerung fällt. Nimmt man an, dafs die Kraft R die Mittelkraft der Kräfte P, P', P''... ist, so ist das Produkt Rr, im Falle des Gleichgewichtes, immer Null. Es ist Null für einen materiellen Punkt, der ganz frei ist, weil alsdann die Mittelkraft R gleich Null seyn mufs; es ist Null für einen Punkt, der auf einer Oberfläche oder einer gegebenen krummen Linie bleiben mufs, weil einerseits die Kraft R nach der Normalen gerichtet seyn mufs, und andererseits die unendlich kleine Linie MO in der berührenden Ebene oder Linie liegt, wodurch ihre Projection r auf die Richtung R Null wird.

Nach der Gleichung (d), die früher bewiesen worden ist, und die noch immer statt findet, wenn auch die gerade Linie MO unendlich klein ist, hat man also

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = o, \qquad (i)$$

sobald sich die Kräfte P, P', P''... im Gleichgewichte halten. Umgekehrt ist das Gleichgewicht immer vorhanden, wenn diese Gleichung für alle möglichen Versetzungen eines völlig freien materiellen Punktes, oder eines solchen, der gezwungen ist, auf einer gegebenen Oberfläche oder krummen Linie zu bleiben, statt hat.

Man nennt die **virtuelle Geschwindigkeit** eines materiellen Punktes, der im Zustande des Gleichgewichtes ist, jede unendlich kleine Linie, wie MO, die man ihn beschreiben lassen kann, wenn man auf die Bedingungen Rücksicht nimmt, welchen er unterworfen werden kann, und das Princip des Gleichgewichtes, welches in der eben mitgetheilten Gleichung enthalten ist, auf welches wir in der Folge zurück kommen werden, heifst das **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.** Wendet man es allmälich auf einen Punkt an, der gänzlich frei ist, oder auf einer Oberfläche oder einer krummen Linie bleiben soll, so findet man ohne Schwierigkeit die Gleichungen des Gleichgewichtes, die wir früher erhalten haben. Jede der Gleichungen (e) kann man aus der Formel (i) ableiten, indem man für MO die Versetzung des Punktes M auf einer der Axen MA, MB, MC nimmt. Ebenso erhält man die Gleichungen des Gleichgewichtes, die dann statt haben, wenn ein Punkt gezwungen ist, auf einer gegebenen Oberfläche zu bleiben, wenn man seine Versetzungen nach der Richtung zweier Axen betrachtet, die in der berührenden Ebene gezogen sind, und die Formel (i) giebt unmittelbar die Gleichung des Gleichgewichtes eines Punktes, der gezwungen ist, auf einer gegebenen krummen Linie zu bleiben, indem man statt MO das Element dieser krummen Linie, und statt p, p', p'' u. s. w. die Projectionen dieses Elementes auf die Richtungen der Kräfte P, P', P'' u. s. w. nimmt. Nennt man die Winkel, welche diese Richtungen mit der Tangente der krummen Linie machen,

$$\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots,$$

so hat man alsdann

$$p = MO \cdot \cos\alpha, \quad p' = MO \cdot \cos\alpha', \quad p'' = MO \cdot \cos\alpha'' \ldots$$

und wenn man den Factor MO, der allen Gliedern der Gleichung (i) gemeinschaftlich ist, wegläfst, so erhält man

$$P \cos\alpha + P' \cos\alpha' + P'' \cos\alpha'' + \ldots = o$$

wie früher.

Zweites Kapitel.

Vom Gleichgewichte des Hebels.

40.

Man betrachtet hier einen Hebel als eine gerade oder krumme Linie ECF (Fig. 10), die unausdehnbar und von unveränderlicher Gestalt ist, und sich nur, in einer Ebene, um einen ihrer Punkte C, den man als fest annimmt, und welchen man den Stützpunkt des Hebels nennt, drehen kann. Gewöhnlich sind nur zwei Kräfte an diese Maschine angebracht, von welchen die eine bestimmt ist, die andere im Gleichgewichte zu halten; die erste nennt man die Kraft, die zweite die Last. Der größseren Allgemeinheit wegen werden wir aber annehmen, daſs eine beliebig groſse Anzahl von Kräften, deren Richtungen in der Ebene des Hebels liegen, auf verschiedene Punkte dieser Linie wirken, und man verlangt die Bedingungen des Gleichgewichtes zu finden.

Ich habe in diesem Werke nicht die Absicht, die Gesetze des Gleichgewichtes, die darin erörtert werden, auf die verschiedenen Maschinen anzuwenden. Was die einfachen Maschinen betrifft, so verweise ich auf die elementaren Lehrbücher der Statik. Jedoch müssen wir uns hier mit dem Gesetze des Gleichgewichtes am Hebel nothwendig beschäftigen, da es ein Princip der Mechanik ist, und es soll nun gezeigt werden, wie dieses Princip mit dem der Zusammensetzung der Kräfte verbunden ist, die auf einen einzelnen Punkt wirken.

41.

Wenn mehrere Kräfte an einen Körper angebracht sind, dessen Gestalt man als unveränderlich annimmt, so kann man den Angriffspunkt einer jeden dieser Kräfte nach einem anderen Punkte des Körpers hin versetzen, der in der Richtung der Kraft oder deren Verlängerung liegt. Wenn z. B. eine gegebene Kraft P auf das Ende E des Hebels nach der geraden Linie AE wirkt, und M ein anderer Punkt ist, der dieser Richtung angehört, und von welchem man voraussetzt,

dafs er mit dem Hebel auf eine unveränderliche Weise verbunden ist, so ist es erlaubt, die Kraft P durch eine andere gleich grofse Kraft zu ersetzen, die auf den Punkt M nach der Richtung MA wirkt. Man kann nemlich zuerst an den Punkt M zwei gleich grofse Kräfte anbringen, die in entgegengesetztem Sinne wirken, die eine nach MA, die andere nach deren Verlängerung MA'; setzt man noch aufserdem voraus, dafs jede dieser Kräfte gleich P ist, so vernichtet diejenige, die nach MA' wirkt, die Kraft P, die am Punkte E nach EA angebracht ist, weil diese beiden gleichen Kräfte in entgegengesetztem Sinne auf die Endpunkte der Linie ME, deren Länge angenommener Mafsen unveränderlich ist, wirken. Es bleibt also nur noch die Kraft P, die am Punkte M nach der Richtung MA wirkt, und durch welche die gegebene Kraft P, die am Punkte E wirkte, ersetzt ist.

Die Kräfte wirken sehr oft auf die Körper, die sie in Bewegung setzen, oder zu setzen streben, entweder indem sie dieselben vermittelst eines Fadens ziehen, der an denselben befestigt ist, oder indem sie dieselben vermittelst einer Stange fortstofsen, die gegen ihre Oberfläche wirkt. Dieser Faden oder diese Stange können sich mehr oder weniger ausdehnen oder zusammen ziehen; haben sie aufgehört sich zu verlängern oder zu verkürzen, so betrachtet man sie als unveränderliche Linien, die die Richtung einer jeden Kraft vorstellen, deren Wirkung alsdann dieselbe ist, als wenn sie unmittelbar auf die Punkte der Oberfläche des Körpers ausgeübt würde, in welchen sich diese Linien endigen.

Ein Hebel ist keinesweges, wie man es hier voraussetzt, eine Linie von unveränderlicher Gestalt, im Gegentheil ist es eine Stange, die sich, sey es auch noch so wenig, biegt, und sich, wegen der Kräfte, die auf dieselbe wirken, ein wenig ausdehnt oder zusammen zieht. Es wäre sehr schwer, im Voraus die Gestalt zu bestimmen, die er annehmen mufs; hat er aber einmal diese Gestalt angenommen, so betrachtet man ihn als unveränderlich, und auf diese Gestalt, die sich von der ursprünglichen nur sehr wenig unterscheidet, beziehen sich die Bedingungen des Gleichgewichtes, die man finden wollte.

42.

Man nehme an, dafs eine zweite Kraft Q auf das andere Ende F des Hebels wirke, und zwar nach der Richtung FB, und dafs die beiden Richtungen EA und FB in der Ebene enthalten seyen, in welcher sich der Hebel drehen kann. Diese beiden geraden Linien, oder ihre Verlängerungen, werden sich in einem bestimmten Punkte M schneiden, den man, nach dem was bewiesen worden ist, für den gemeinschaftlichen Angriffspunkt von P und Q nehmen kann. Dies vorausgesetzt, kann man, durch die Regel des Parallelogramms der Kräfte, die Mittelkraft dieser beiden Kräfte bestimmen, deren Angriffspunkt also ebenfalls M seyn wird. Damit sie aber aufgehoben werde, und der Hebel in Ruhe bleibe, ist es erforderlich, dafs ihre Richtung durch den Stützpunkt C gehe, und diese Bedingung ist zugleich zur Erhaltung des Gleichgewichtes hinreichend, denn, wenn man die Mittelkraft an jenen Punkt anbringt, so wird sie, durch den Widerstand jenes festen Punktes, aufgehoben werden.

Fällt man vom Punkte C die senkrechten Linien CG, CH auf die Richtungen der Kräfte P und Q, so hat man, nach dem was in §. 29 gesagt worden ist, im Falle des Gleichgewichtes,

$$P : Q = CH : CG,$$

und umgekehrt wird das Gleichgewicht vorhanden seyn, wenn dieses Verhältnifs statt hat. Nennt man daher die senkrechten Linien CG und CH bezüglich p und q, so ist die Gleichung des Gleichgewichtes

$$Pp = Qq.$$

Man nennt das **Moment einer Kraft in Beziehung auf einen Punkt**, das Produkt aus dieser Kraft in die senkrechte Linie, die von diesem Punkte auf seine Richtung gefällt wird. So besteht die Bedingung des Gleichgewichtes am Hebel darin, dafs die Momente der Kraft und der Last, in Beziehung auf den Stützpunkt genommen, einander gleich sind, indem nemlich diese zwei Kräfte den Hebel nach entgegengesetzten Richtungen zu treiben streben.

Nimmt man an, dafs die geraden Linien CG und CH auf unveränderliche Weise mit dem Hebel verbunden sind, so kann man G und H als die Angriffspunkte der Kräfte P

und Q ansehen, und den Hebel ECF, der eine beliebige Gestalt haben kann, durch den gebrochenen Hebel GCH (Fig. 11) ersetzen. Die senkrechten Linien CG und CH nennt man die Arme des Hebels, nemlich den Arm der Kraft und den Arm der Last. Die Bedingung des Gleichgewichts hängt nicht von der Gröſse des Winkels GCH ab, was man auch a priori beweisen kann.

Denn beschreibt man aus dem Punkte C mit dem Halbmesser CH den Kreisbogen HH', den man als unveränderlich mit dem Hebel verbunden annimmt, und bringt man an den Punkt H' zwei Kräfte an, die gleich Q sind, und in entgegengesetzten Richtungen nach den Theilen $H'B'$ und $H'B''$ der Berührungslinie dieses Punktes wirken, so ist es einleuchtend, daſs die Kraft Q, die nach $H'B''$ gerichtet ist, durch die Kraft Q, die nach HB gerichtet ist, aufgehoben wird; denn diese beiden Kräfte streben, das System nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen, und es ist kein Grund vorhanden, warum es mehr der einen als der anderen folgen sollte. Die zweite dieser zwei Kräfte ist daher durch die Kraft Q ersetzt, die nach $H'B'$ gerichtet ist, und der Winkel GCH geht in den Winkel GCH' über, der gröſser oder kleiner ist, ohne daſs hierdurch das Gleichgewicht gestört wird.

Durch diese Aenderung kann der Winkel der beiden Hebelarme 180^0 oder Null werden, alsdann ist der Hebel ein gerader, die Kraft und die Last sind parallele Kräfte, die in demselben oder in entgegengesetztem Sinne gerichtet sind, und für das Gleichgewicht ist es immer erforderlich, daſs ihre Gröſsen im umgekehrten Verhältnisse der Längen ihrer Hebelarme stehen.

43.

Nennt man R die Mittelkraft der beiden Kräfte P und Q, die im Punkte M zusammen treffen (Fig. 10), und m den Winkel AMB, der zwischen ihren Richtungen enthalten ist, so hat man (§. 29)

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos m,$$

und der Werth von R giebt die Last an, die der Stützpunkt C, im Zustande des Gleichgewichtes, tragen muſs. Bringt man die Kraft R an diesen Punkt an, so ist sie nach der

geraden Linie CD, die die Verlängerung von MC ist, gerichtet. In der Figur 10 wird angenommen, daſs der Punkt C zwischen den Angriffspunkten E und F der Kraft und der Last liegt. Das Gegentheil findet in der Figur 12 statt, aber die Betrachtungen, die eben angestellt worden sind, lassen sich auf beide Fälle anwenden, sie sind nur darin von einander verschieden, daſs im ersten Falle die Kräfte P und Q auf zwei verschiedenen Seiten des Hebels wirken, und der Winkel AMB spitz ist, während sie im zweiten Falle auf derselben Seite wirken, und der Winkel AMB stumpf ist.

Da die drei Punkte E, F, C dieselben bleiben, wenn der Punkt M, in welchem die drei Kräfte P, Q, R zusammen treffen, sich in das Unendliche entfernt, so werden alsdann diese Kräfte parallel. In dem Falle der Fig. 10 wird alsdann der Winkel m unendlich klein, man hat $\cos m = 1$ und folglich

$$R = P + Q.$$

Im zweiten Falle wird das Supplement des Winkels m unendlich klein, man hat also $\cos m = -1$ und

$$R = Q - P,$$

indem man $P < Q$ annimmt. Die Mittelkraft zweier paralleler Kräfte ist ihrer Summe oder ihrem Unterschiede gleich, je nachdem diese Kräfte in demselben oder in entgegengesetztem Sinne wirken. Sind ihre Richtungen einander entgegengesetzt, so wirkt die Mittelkraft im Sinne der gröſseren. In diesen zwei Fällen stehen die Seitenkräfte P und Q im umgekehrten Verhältnisse ihrer Abstände CG und CH von der Mittelkraft.

Dies angenommen, zieht man eine gemeinschaftliche senkrechte Linie auf die drei parallelen Kräfte, und nennt man a den Theil GH dieser geraden Linie (Fig. 13 u. 14), der zwischen den zwei Seitenkräften P und Q enthalten ist, und x den Abstand CH der Mittelkraft R von der Seitenkraft Q, die man als die gröſste annimmt, so hat man

$$P : Q = x : a \mp x,$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, je nachdem P und Q nach derselben Richtung (Fig. 13) oder nach entgegengesetzten Richtungen (Fig. 14) wirken. Hieraus findet man

$$P : Q \pm P = x : a,$$

und folglich

$$x = \frac{aP}{Q \pm P},$$

wodurch man die Lage der Mittelkraft erfährt, deren Werth $Q \pm P$ ist.

44.

Wenn die Kräfte P und Q nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und nur sehr wenig von einander verschieden sind, so wird ihre Mittelkraft, immer im Sinne der grösseren gerichtet, in einem sehr grossen Abstande von den gegebenen Kräften sich befinden. Sind sie aber völlig gleich, so wird dieser Abstand unendlich gross. Dies beweist, dass zwei Kräfte, die gleich gross und parallel sind, und in entgegengesetzten Richtungen wirken, nicht durch eine einzige Kraft ersetzt werden können, und es ist auch wirklich gar kein Grund vorhanden, warum diese einzige Kraft eher nach der einen als nach der entgegengesetzten Richtung wirken sollte.

Zwei solche Kräfte, die an den Endpunkten einer geraden Linie GH (Fig. 15) wirken, werden diese Linie um ihren Mittelpunkt K drehen; diese Wirkung kann aber offenbar nicht durch eine einzige Kraft hervorgebracht werden. Man kann diese Kräfte auf unendlich viele verschiedene Arten durch zwei andere Kräfte ersetzen, die sich in ähnlichem Falle befinden, denn man ändert durchaus Nichts in ihrer Wirkung, wenn man z. B. an den Punkten G und H, nach den Verlängerungen GE und HF der geraden Linie, zwei gleiche Kräfte von beliebiger Grösse anbringt. Denn die Mittelkraft der Kräfte, die nach GA und GE gerichtet sind, und die der Kräfte, die nach HB und HF gerichtet sind, werden noch immer Kräfte seyn, die gleich, parallel und in entgegengesetztem Sinne nach den Linien GC und HD gerichtet sind, und diese Mittelkräfte ersetzen die ursprünglichen Kräfte, die nach GA und HB wirkten. Nennt man P die gemeinschaftliche Grösse dieser zwei Kräfte, und a ihren Abstand, so werden sich diese beiden durch die angegebene Operation in andere verwandeln, ihr Produkt aP aber bleibt dasselbe, wie dies sogleich bewiesen werden soll.

45.

Uebrigens ist dieser besondere Fall der einzige, in welchem ein System von einer gewissen Anzahl von Kräften P, P', P''..., die in einer Ebene enthalten sind, und auf materielle Punkte wirken, die auf unveränderliche Weise mit einander verbunden sind, nicht auf eine einzige Kraft zurück geführt werden kann. Denn die zwei Kräfte P und P' mögen in einem Punkte zusammentreffen, oder parallel seyn, man wird sie immer auf eine einzige Kraft Q, durch die Regel des Parallelogramms der Kräfte, oder durch die des vorhergehenden Paragraphen, zurück führen können. Diese Kraft Q und die Kraft P'' kann man wieder auf eine einzige Kraft Q' zurückführen, dann führt man wieder Q' und P''' auf eine neue Mittelkraft Q'' zurück, und so fährt man fort, bis man alle gegebenen Kräfte auf zwei zurück geführt hat, die sich wieder selbst zu einer einzigen R vereinigen lassen, wenn sie nicht in dem in Rede stehenden Ausnahmefall begriffen sind.

Im Allgemeinen ist diese Kraft R die Mittelkraft der gegebenen Kräfte P, P', P''..., und fügt man zu diesen Seitenkräften noch eine Kraft R' hinzu, die der Kraft R gleich und entgegengesetzt ist, so ist das System im Gleichgewichte. Die Gröfse von R und seine Lage in der Ebene der gegebenen Kräfte hängt auf keine Weise von der Ordnung ab, in welcher man diese Kräfte, bei den allmälichen Reductionen die im Vorigen besprochen worden sind, nimmt. Denn würde man, wenn man die Ordnung änderte, eine andere Mittelkraft S erhalten, die von R der Gröfse oder Richtung nach verschieden wäre, so müfste eine dieser Kräfte der anderen das Gleichgewicht halten, wenn sie in entgegengesetzter Richtung genommen würde, was unmöglich ist.

Wenn die Kräfte P, P', P''..., die an einen Hebel angebracht sind, der in ihren Ebenen liegt, im Gleichgewichte seyn sollen, so müssen sie sich zuerst auf eine einzige Kraft zurück führen lassen, denn wenn sie sich auf zwei parallele Kräfte S und S' reducierten, die nicht wieder auf eine einzige Kraft zurück geführt werden könnten, und wenn S' diejenige wäre, die dem Stützpunkte am nächsten läge, so könnte man S' in zwei Kräfte Q und Q' zerlegen, die parallel wären und nach derselben Richtung wirkten, und von wel-

chen die erste der Kraft S gerade entgegengesetzt wäre, die andere aber durch den Stützpunkt ginge. Da jede dieser Seitenkräfte kleiner als S' oder S wäre, so würde die Kraft Q' aufgehoben werden, und es würde nur noch die Kraft $S - Q$ übrig bleiben, die den Hebel im Sinne der Kraft S drehen würde. Sind die gegebenen Kräfte auf eine einzige Kraft R zurückgeführt, so ist es noch aufserdem für das Gleichgewicht erforderlich, dafs diese Kraft durch seinen Stützpunkt gehe. Diese Bedingung kann man, vermittelst des Lehrsatzes, der nun bewiesen werden soll, durch eine Gleichung ausdrücken.

46.

Man betrachte zuerst blos zwei Kräfte und ihre Mittelkraft. Das Moment dieser Mittelkraft, in Beziehung auf einen Punkt, der in der Ebene der drei Kräfte liegt, wird der Summe oder dem Unterschiede der Momente der zwei Seitenkräfte in Beziehung auf denselben Punkt gleich seyn; dem Unterschiede, wenn der Mittelpunkt der Momente in dem Winkel der Seitenkräfte oder in dessen Scheitelwinkel liegt; der Summe dagegen, wenn dieser Punkt aufserhalb dieser zwei Winkel liegt.

Es seyen nemlich P und P' diese zwei Kräfte, MA und MA' (Fig. 16 und 17) ihre Richtungen, Q ihre Mittelkraft, die nach MB wirkt, C *) der Mittelpunkt der Momente, p, p', q die senkrechten Linien Ca, Ca', Cb, die von dem Punkte C auf die Richtungen P, P', Q gefällt sind. Man zerlege jede dieser drei Kräfte in zwei andere, die nach der geraden Linie MC und nach der darauf senkrecht stehenden KMK' gerichtet sind, und betrachte diese senkrechten Seitenkräfte. Man hat alsdann offenbar

$$\cos BMK = \sin BMC = \frac{q}{c},$$

indem man durch c die Länge der Linie MC bezeichnet, daher ist die Seitenkraft von Q, die nach MK gerichtet ist,

*) Der Verfasser hätte hier zuerst bemerken sollen, dafs man den Punkt, von welchem aus die senkrechten Linien gezogen werden, den Mittelpunkt der Momente nennt, wie er dies auch wirklich in der ersten Ausgabe gethan hat. Anm. des Uebers.

gleich $\frac{Qq}{c}$. Ebenso sind die Seitenkräfte von P und P', die senkrecht auf MC stehen,

$$\frac{Pp}{c} \text{ und } \frac{P'p'}{c}.$$

Sie wirken in entgegengesetztem Sinne, wenn die Linie MC durch den Winkel AMA' geht (Fig. 16), und in demselben Sinne, wenn sie aufserhalb dieses Winkels fällt. Nun mufs aber die Summe dieser Seitenkräfte im zweiten Falle, und der Ueberschufs der gröfseren über die kleinere, im ersten Falle, der Seitenkraft von Q gleich seyn, weil Q die Mittelkraft von P und P' ist. Nimmt man daher an, dafs die Seitenkraft von P gröfser ist, als die Seitenkraft von P', und läfst man den gemeinschaftlichen Factor c weg, so hat man

$$Qq = Pp \pm P'p',$$

was zu beweisen war.

Denkt man sich, dafs der Punkt C fest ist, und dafs die senkrechten Linien Ca, Ca', Cb ein unveränderliches System bilden, so können die Kräfte P, P', Q, die man sich als an den Endpunkten a, a', b dieser geraden Linien wirkend denken kann, nur eine drehende Bewegung um den Mittelpunkt der Momente hervorbringen. Der Anblick der Figur 17, welcher das obere Zeichen in der vorhergehenden Gleichung entspricht, zeigt, dafs wenn der Punkt C aufserhalb des Winkels AMA' oder seines Scheitelwinkels fällt, die drei Kräfte ihre Angriffspunkte nach derselben Richtung um den Punkt C zu drehen streben; fällt aber dieser Punkt innerhalb eines dieser zwei Winkel, so zeigt die Figur 16, die dem unteren Zeichen entspricht, dafs die Kräfte P und P' die Punkte a und a' in entgegengesetzter Richtung zu drehen suchen, und man sieht auch, dafs in diesem Falle die Mittelkraft Q ihren Angriffspunkt in demselben Sinne zu drehen strebt, wie die Seitenkraft, die das gröfste Moment hat.

Nach dieser Bemerkung kommt der so eben bewiesene Lehrsatz darauf zurück, dafs das Moment der Mittelkraft der beiden Kräfte der Summe oder dem Unterschiede der Momente dieser beiden Kräfte gleich ist, je nachdem die Seitenkräfte ihre Angriffspunkte in demselben oder in entgegengesetz-

tem Sinne um den Mittelpunkt der Momente zu drehen suchen, und dafs ihre Mittelkraft das Bestreben hat, in demselben Sinne eine Drehung hervorzubringen, wie die Seitenkraft, die das gröfste Moment hat.

Da dieser Lehrsatz für alle möglichen Winkel gültig ist, die die Richtungen der Kräfte einschliefsen können, so mufs er auch noch bestehen, wenn sie parallel sind. Dies kann übrigens auch leicht aus der Zusammensetzung von Kräften dieser Art abgeleitet werden (§. 43).

47.

Der letztere Ausdruck hat den Vortheil, dafs man ihn leicht auf eine beliebige Anzahl von Kräften P, P', P''..., deren Richtungen in dieselbe Ebene fallen, ausdehnen kann.

Betrachtet man nemlich den Mittelpunkt der Momente als einen festen Punkt, um welchen die Kräfte das System ihrer Angriffspunkte zu drehen suchen, die auf eine unveränderliche Weise mit einander verbunden sind, so ist das Moment der Mittelkraft der Summe der Momente der Kräfte, die eine Drehung in demselben Sinne, wie die Mittelkraft, zu bewirken suchen, weniger der Summe der Momente der Kräfte, die eine Drehung in entgegengesetztem Sinne hervorbringen, gleich.

Um einen bestimmten Fall zu betrachten, nehme man an, dafs die drei ersten Kräfte P, P', P'' eine Bewegung in demselben Sinne hervor zu bringen suchen, alle übrigen aber eine Bewegung in entgegengesetztem Sinne. Man nehme die Reihe von Reductionen, die in §. 45 vorgenommen worden sind, wieder auf. Sey Q die Mittelkraft von P und P', und Q' die Mittelkraft von Q und P'' oder von P, P', P''. Seyen ferner p, p', p'', q, q' die senkrechten Linien, die vom Mittelpunkt der Momente auf die Richtungen von P, P', P'', Q, Q' gefällt werden, so hat man nach dem Vorhergehenden

$$Qq = Pp + P'p', \qquad Q'q' = Qq + P''p'',$$

und folglich

$$Q'q' = Pp + P'p' + P''p''.$$

Bezeichnet man ebenso durch Q_1 die Mittelkraft aller übrigen Kräfte P''', P^{iv} u. s. w., durch q_1 die senkrechte Linie,

die vom Mittelpunkte der Momente auf ihre Richtung gefällt wird, durch p''', p^{IV} u. s. w. die senkrechten Linien, die von demselben Punkte auf die Richtungen von P''', P^{IV} u. s. w. gefällt werden, so hat man auch

$$Q_1 q_1 = P'''p''' + P^{\text{IV}}p^{\text{IV}} + \ldots$$

Die Mittelkraft R aller gegebenen Kräfte ist aber auch die Mittelkraft der Kräfte Q' und Q_1, bezeichnet man daher durch r die senkrechte Linie, die vom Mittelpunkte der Momente auf die Richtung von R gefällt wird, und bemerkt man, daſs diese Kräfte Q' und Q_1 eine Drehung nach entgegengesetzten Richtungen hervor zu bringen suchen, so hat man

$$Rr = \pm (Q'q' - Q_1 q_1),$$

je nachdem $Q'q'$ gröſser oder kleiner als $Q_1 q_1$ ist. Im ersten Falle sucht die Kraft R in demselben Sinne zu drehen, wie die Kraft Q', folglich auch in demselben Sinne, wie die drei Kräfte P, P', P''. Wir wollen annehmen, daſs dieser erste Fall statt habe; substituiert man statt $Q'q'$ und $Q_1 q_1$ ihre Werthe, so hat man alsdann

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' - P'''p''' - P^{\text{IV}}p^{\text{IV}} \ldots \quad (1)$$

und diese Gleichung enthält den Lehrsatz, der bewiesen werden sollte.

Setzt man voraus, daſs der Mittelpunkt der Momente der Stützpunkt des Hebels sey, an welchen die Kräfte $P, P', P''\ldots$ angebracht sind, so ist es für das Gleichgewicht dieses Hebels erforderlich, daſs man habe

$$Pp + P'p' + P''p'' - P'''p''' - P^{\text{IV}}p^{\text{IV}} \ldots = o \quad (2)$$

weil in diesem Falle die Kräfte eine Mittelkraft haben müssen, die durch den Stützpunkt geht (§. 45), und für welchen man also

$$V = o$$

hat.

48.

Man kann die Gleichung (1) allgemeiner machen, wenn man annimmt, daſs man die Kräfte P, P', $P''\ldots$ durch Zerlegungen und Zusammensetzungen in andere Kräfte S, S', $S''\ldots$ umgeändert habe, deren Summe den gegebenen Kräften gleich ist. Bezeichnet man durch s, s', s'' u. s. w. die senkrechten

Linien, die vom Mittelpunkte der Momente auf die Richtungen von S, S' S''... gefällt werden, so findet man durch dieselbe Betrachtung, wie im vorhergehenden Paragraphen,

$$Ss + S's' + S''s'' + \ldots = Pp + P'p' + P''p'' - P'''p''' - P^{IV}p^{IV}\ldots \quad (3)$$

in welcher Gleichung man die Momente der Kräfte S, S', S''..., die nach derselben Richtung zu drehen streben, wie die Kräfte P, P', P''..., mit dem Zeichen + nehmen mufs, dagegen die Momente derjenigen, die in demselben Sinne, wie die Kräfte P''', P^{IV},.. zu drehen streben, mit dem Zeichen —.

Der besondere Fall, wenn die Kräfte P, P', P''... sich nicht auf eine einzige zurück führen lassen, ist in dieser letzten Gleichung enthalten. Seyen alsdann S und S' zwei Kräfte, die gleich parallel und sich nicht gerade entgegen gesetzt sind, und nenne man h ihren wechselseitigen Abstand. Liegt der Mittelpunkt der Momente zwischen ihren Richtungen, so hat man

$$s + s' = h,$$

sie streben alsdann, eine Drehung in demselben Sinne um diesen Punkt hervor zu bringen, man mufs daher ihren Momenten dasselbe Zeichen geben, und erhält

$$Ss + S's' = Sh.$$

Ist dagegen der Mittelpunkt der Momente nicht zwischen S und S' enthalten, und man setzt $s > s'$, so hat man

$$s - s' = h,$$

diese beiden Kräfte streben alsdann, eine Drehung in entgegengesetztem Sinne hervor zu bringen, und man mufs dem Moment von S das Zeichen + und dem Moment von S' das Zeichen — geben. Hieraus folgt

$$Ss - S's' = Sh.$$

Folglich wird die Gleichung (3) immer

$$Sh = Pp + P'p' + P''p'' - P'''p''' - P^{IV}p^{IV} - \ldots.$$

Da das zweite Glied dieser Gleichung aus lauter gegebenen Gröfsen besteht, so folgt daraus, dafs wenn sich die Werthe von S und h ändern, ihr Produkt dennoch dasselbe bleibt, wie dies schon früher gesagt worden ist.

Man schliefst auch aus dieser letzten Gleichung, dafs die gegebenen Kräfte, wenn der zweite Theil der Gleichung Null

ist, nicht in dem Ausnahmefall enthalten sind, in welchem sie nicht auf eine einzige zurück geführt werden können. Hieraus folgt also, dafs die Gleichung (2) zugleich ausdrückt, dafs die Kräfte P, P' P''... eine einzige Mittelkraft haben, und dafs diese Mittelkraft durch den Mittelpunkt der Momente geht, folglich ist sie die Gleichung, die für das Gleichgewicht des Hebels, dessen Stützpunkt der Mittelpunkt der Momente ist, nothwendig und hinreichend ist. Die Mittelkraft R, die man durch die Reihe von Reductionen des §. 45 erhält, drückt die Last aus, die der Stützpunkt tragen mufs; ist diese Null, so halten sich die Kräfte P, P', P''... in ihrer Ebene, ohne Hülfe dieses festen Punktes, im Gleichgewichte.

49.

Die Bedingung des Gleichgewichtes am Hebel läfst sich durch eine Gleichung ausdrücken, die der Formel (i) in §. 39 analog ist.

Seyen z. B. M, M', M'' (Fig. 18) die Angriffspunkte der drei Kräfte P, P', P'', die auf den Hebel ECF nach den Richtungen MA, $M'A'$, $M''A''$, die in seiner Ebene enthalten sind, wirken. Man drehe den Hebel um ein unendlich Kleines um seinen Stützpunkt C, so dafs M, M', M'' nach m, m', m'' kommen. Nach der Erklärung des §. 39 sind die unendlich kleinen Bogen Mm, $M'm'$, $M''m''$, die man als gerade Linien ansehen kann, die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte M, M', M'' der drei Kräfte, die man betrachtet. Ich fälle von m, m' m'' senkrechte Linien ma, $m'a'$, $m''a''$ auf die geraden Linien MA, $M'A'$, $M''A''$ oder auf ihre Verlängerung; Ma ist die Projection von Mm auf die Richtung der Kraft P selbst, die den Hebel im Sinne der statt gehabten Umdrehung zu drehen sucht, $M'a'$ und $M''a''$ sind die Projectionen von $M'm'$ und $M''m''$ auf die Verlängerungen der beiden anderen Kräfte P' und P'', die ihn in entgegengesetztem Sinne zu drehen suchen. Aus diesem Grunde betrachte ich die erste dieser Projectionen als eine positive Gröfse, und die zwei anderen als negative Gröfsen. Ich bezeichne diese drei Gröfsen durch Π, Π', Π''.

Dies angenommen, so mufs, in Folge des Princips der virtuellen Geschwindigkeit, die Summe der gegebenen Kräfte,

bezüglich mit den eben erklärten Projectionen der virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte multipliciert, im Falle des Gleichgewichtes Null seyn, und umgekehrt hat das Gleichgewicht statt, wenn diese Summe Null ist, so dafs diese Gleichung des Gleichgewichtes des Hebels

$$P\Pi + P'\Pi' + P''\Pi'' = o \qquad (4)$$

ist. Wirklich kann man sich leicht davon überzeugen, dafs diese Gleichung mit derjenigen zusammenfällt, die aus der Betrachtung der Momente abgeleitet worden ist.

Man bezeichne, zu diesem Zwecke, durch p, p', p'' die senkrechten Linien CG, CG', CG'', die vom Puncte C auf die Richtungen der Kräfte P, P', P'' gefällt werden, durch c, c', c'' die Abstände CM, CM', CM'' ihrer Angriffspunkte vom Punkte C, und durch $\gamma, \gamma', \gamma''$ die virtuellen Geschwindigkeiten $Mm, M'm', M''m''$. Da der unendlich kleine Bogen Mm mit seiner Tangente zusammenfällt, so stehen die Seiten der Dreiecke Mma und CMG senkrecht auf einander, und die Dreiecke sind daher ähnlich, man hat also

$$Ma : Mm = CG : CM,$$

und da

$$Ma = \Pi, \; Mm = \gamma, \; CG = p, \; CM = c,$$

so ergiebt sich hieraus

$$\Pi = \frac{p\gamma}{c}.$$

Ebenso findet man

$$\Pi' = -\frac{p'\gamma'}{c'}, \qquad \Pi'' = -\frac{p''\gamma''}{c''},$$

indem man bemerkt, dafs Π' und Π'', nach der Voraussetzung, negative Gröfsen sind. Da übrigens die Gestalt des Hebels als unveränderlich genommen wird, so entsprechen die drei Bogen $Mm, M'm', M''m''$, die zu gleicher Zeit beschrieben werden, demselben Winkel, und dividiert man sie durch ihre bezüglichen Halbmesser CM, CM', CM'', so hat man drei gleiche Verhältnisse. Bezeichnet man durch ϑ die gemeinschaftliche Gröfse dieser Verhältnisse, so hat man also

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{\gamma'}{c'} = \frac{\gamma''}{c''} = \vartheta,$$

und folglich

$$\Pi = p\vartheta, \; \Pi' = -p'\vartheta, \; \Pi'' = -p''\vartheta.$$

Substituiert man nun diese Werthe in die Gleichung (4), und läſst den allen Gliedern gemeinschäftlichen Factor ϑ weg, so erhält man

$$Pp - P'p' - P''p'' = o,$$

was wirklich die Gleichung des Gleichgewichtes des Hebels, den wir betrachten, ist. Multipliciert man umgekehrt diese letzte Gleichung durch ϑ, so geht sie in die Gleichung (4) über.

Die Betrachtung würde offenbar immer dieselbe bleiben, wie groſs man auch die Anzahl der gegebenen Kräfte P, P', P'' annehmen mag, und nach welcher Richtung sie auch den Hebel drehen mögen.

Drittes Kapitel.

Ueber die Zusammensetzung und das Gleichgewicht der parallelen Kräfte.

50.

Die Zusammensetzung der parallelen Kräfte kann man, wie früher gezeigt worden ist, aus der Regel des Parallelogramms der Kräfte ableiten, indem man die gegebenen Kräfte wie Kräfte betrachtet, deren Richtungen, unendlich verlängert, zusammen treffen. Man kann aber, indem man noch immer von dieser Regel Gebrauch macht, die Mittelkraft zweier paralleler Kräfte auch auf andere Weise erhalten, die ebenfalls von Nutzen ist.

Seyen P und Q die zwei Seitenkräfte, die auf die Punkte E und F der unbiegsamen geraden Linie EF, nach den parallelen Richtungen EA und FB, in demselben Sinne (Fig. 19), oder in entgegengesetztem Sinne (Fig. 20), wirken. An diesem Systeme von Kräften ändert man Nichts, wenn man an die Endpunkte dieser geraden Linie gleiche Kräfte anbringt, die sich entgegengesetzt, nach den Verlängerungen EC und FD dieser geraden Linie gerichtet sind, und deren gemeinschaftliche Gröſse durch S vorgestellt wird. Ich nehme die Mittelkraft der Kräfte P und S, die an den Punkt E angebracht sind, und die eine Kraft P' seyn wird, welche nach der geraden Linie EA' wirkt, die innerhalb des Winkels AEC liegt. Ebenso wird die Mittelkraft der Kräfte Q und S, die am Punkte F wirken, eine Kraft Q' seyn, die nach der Richtung der geraden Linie FB' wirkt, welche innerhalb des Winkels BFD liegt. Nimmt man den Fall des §. 44 aus, wo die Kräfte P und Q gleich sind, und in entgegengesetzter Richtung wirken, so werden die zwei geraden Linien EA' und FB' nicht parallel seyn. Nimmt man daher an, daſs ihr Durchschnittspunkt K unveränderlich mit der Linie EF verbunden ist, so wird es erlaubt seyn, ihn als den gemeinschaftlichen Angriffspunkt der beiden Kräfte P' und Q' anzusehen (§. 41). Durch diesen Punkt K ziehe ich die geraden

Linien $E'F'$ und KH' parallel mit der geraden Linie EF und den Richtungen der Kräfte P und Q; ich zerlege alsdann jede dieser Kräfte P' und Q' nach diesen Parallelen. Auf diese Weise mufs man offenbar die Seitenkräfte S und P wiederfinden, die nach KE' und KH gerichtet sind, und ferner die Seitenkräfte S und Q, die nach KF' und KH gerichtet sind (Fig. 19), oder nach KF' und KH' (Fig. 20). Wir werden also dieselben vier Kräfte haben wie früher, nur dafs sie jetzt alle vier an denselben Punkt K angebracht sind. Vernachlässigt man die beiden Kräfte S, so bleiben noch die beiden Kräfte P und Q, die im Falle der Figur 19 nach derselben geraden Linie KH, oder, im Falle der Figur 20, welche voraussetzt, dafs Q die gröfste der beiden gegebenen Kräfte ist, nach der Linie KH und deren Verlängerung KH' gerichtet sind. Die Mittelkraft dieser beiden Kräfte wird ihnen also parallel seyn, und wenn man sie durch R bezeichnet, so hat man

$$R = Q \pm P,$$

je nachdem sie in demselben oder in entgegengesetztem Sinne gerichtet sind.

Um den Punkt O zu bestimmen, wo die Richtung dieser Mittelkraft die gerade Linie EF oder ihre Verlängerung schneidet, nehme ich an, dafs E' und F' die Durchschnitte der Linien AE und BF mit der Linie $E'F'$ sind, die beiden Vierecke $EE'KO$ und $FF'KO$ sind Parallelogramme, und wenn man ihre Diagonalen KE und KF nimmt, um die Mittelkräfte P' und Q' vorzustellen, so hat man

$$S : P = EO : KO$$
$$S : Q = FO : KO$$

als die Verhältnisse der Seitenkräfte. Hieraus schliefst man

$$P : Q = FO : EO,$$

wodurch man die Lage des Punktes O findet, den man für den Angriffspunkt der Mittelkraft nehmen kann.

Auch findet man

$$P : Q \pm P = FO : EF$$
$$Q : Q \pm P = EO : EF,$$

wo sich die oberen Zeichen auf die Figur 19 und die unteren auf die Figur 20 beziehen; nimmt man nun auf den vorher-

gehenden Werth von R Rücksicht, so hat man daher in beiden Fällen

$$P : Q : R = FO : EO : EF,$$

woraus sich ergiebt, dafs jede der drei Kräfte P, Q, R dem Abstande proportional ist, der zwischen den Angriffspunkten der beiden übrigen enthalten ist.

Dieses Verhältnifs und folglich auch die Lage des Punktes O, ist unabhängig von dem Winkel, unter welchem die Richtungen der gegebenen Kräfte von der Linie EF geschnitten werden, die irgend eine beliebige gerade Linie seyn kann, die in ihren Endpunkten diese zwei Richtungen trifft.

51.

Man kann jetzt ohne Schwierigkeit alle die Fragen lösen, die sich hinsichtlich der Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte in eine einzige, und hinsichtlich der Zerlegung einer Kraft in zwei andere, die ihr parallel sind, darbieten können. Wir werden in dieser Beziehung in keine weitere Erörterung eingehen, und eben so wenig auf den besonderen Fall zurück kommen, wenn zwei gleiche und nicht gerade entgegengesetzte Kräfte gegeben sind, welchen wir von dem vorhergehenden Beweise ausgeschlossen haben, und der auch hinlänglich in §. 44 untersucht worden ist.

Ich will nun eine beliebige Anzahl paralleler Kräfte betrachten, von welchen ein Theil in einem Sinne, der andere in entgegengesetztem Sinne wirkt, und die entweder in derselben oder in verschiedenen Ebenen liegen, und an Punkte angebracht sind, die auf unveränderliche Weise unter sich verbunden sind, wie z. B., wenn sie an verschiedene Punkte eines festen Körpers angebracht sind. Setzt man zwei dieser Kräfte in eine einzige zusammen, alsdann diese und eine dritte wieder in eine einzige und so weiter, so kann man zuletzt die Gröfse der Mittelkraft aller gegebenen Kräfte und ihre Lage im Raume bestimmen, wenn nicht die zwei letzten Kräfte, die man zu betrachten hat, unter den Ausnahmefall des §. 44 fallen. Diese Mittelkraft ist offenbar der gemeinschaftlichen Richtung der Seitenkräfte parallel, aufserdem ist sie der Summe derjenigen, die in einem Sinne wirken, weniger der Summe derjenigen, die in entgegengesetztem Sinne

wirken, gleich, und wirkt in dem Sinne der gröfseren Summe. Betrachtet man daher die einen als positive, und die anderen als negative Gröfsen (§. 11), und stellt sie durch P, P', P''... und ihre Mittelkraft durch R vor, so hat man immer

$$R = P + P' + P''....$$

52.

Wenn die gegebenen Kräfte sich um ihre Angriffspunkte drehen, ohne aufzuhören parallel zu seyn, so dreht sich ihre Mittelkraft ebenfalls um einen Punkt ihrer Richtung, denn ihr Angriffspunkt, den man findet, wenn man allmälich die gegebenen Kräfte, wie so eben angegeben wurde, zusammensetzt, hängt auf keine Weise von der gemeinschaftlichen Richtung dieser Kräfte ab, und bleibt daher derselbe, wenn diese Richtung sich ändert.

Man nehme z. B. an, dafs die Anzahl der gegebenen Kräfte drei sey, nemlich P, P', P'', die nach den geraden Linien MA, $M'A'$, $M''A''$ gerichtet sind (Fig. 21). Sey zuerst NB die Richtung der Mittelkraft von P und P', die gleich $P + P'$ seyn wird, ferner sey $N'B'$ die Richtung der Mittelkraft von $P + P'$ und P'', indem in der Figur angenommen wird, dafs die letztere P'' in einer Richtung wirkt, die der Richtung von P und P' entgegengesetzt, und gröfser als $P + P'$ ist. Nun denke man sich, dafs die drei Kräfte P, P', P'' sich um die Punkte M, M', M'' drehen, indem sie ihren Parallelismus und die relative Richtung ihrer Wirkungen beibehalten. Seyen Ma, $M'a'$, $M''a''$ ihre neuen Richtungen. In diesem neuen Zustande trifft die Mittelkraft der Kräfte P und P' die gerade Linie MM' in demselben Punkte N wie früher, da die Lage dieses Punktes nur von dem Verhältnifs der Seitenkräfte abhängt, und keinesweges von dem Winkel, den die gerade Linie MM' mit ihren Richtungen einschliefst (§. 50); sie wird nun nach der geraden Linie Nb gerichtet seyn, die mit Ma und $M'a'$ parallel ist, und noch immer gleich $P + P'$ seyn. Aus demselben Grunde trifft die Mittelkraft der Kräfte $P + P'$ und P'' die Verlängerung der geraden Linie MM' in demselben Punkte N' wie früher, und wird nach der geraden Linie $N'b'$ gerichtet seyn, die mit Nb parallel ist; hieraus folgt, dafs, während die

drei Kräfte P, P' P'' sich um ihre Angriffspunkte M, M', M'' drehen, auch ihre Mittelkraft sich um den Punkt N' dreht.

53.

Wir werden **Mittelpunkt der parallelen Kräfte** den Punkt nennen, in welchem sich alle auf einander folgenden Richtungen der Mittelkraft schneiden, wenn sich ihre Seitenkräfte um ihre Angriffspunkte drehen, die man als unveränderliche annimmt.

Man wird in der Folge sehen, wie wichtig es ist, den Mittelpunkt der parallelen Kräfte zu betrachten, besonders bei den Fragen, die sich auf das Gleichgewicht und die Bewegung der schweren Körper beziehen. Man kann schon hier die Bemerkung machen, dafs, wenn ein fester Körper durch beliebige Kräfte getrieben wird, und man den Mittelpunkt dieser Kräfte bestimmt, den man als fest annimmt, das Gleichgewicht in allen Lagen statt hat, die der Körper um diesen Punkt annehmen kann, sobald nur die gegebenen Kräfte immer parallel und an dieselben Punkte dieses Körpers angebracht bleiben, denn ihre Mittelkraft wird alsdann beständig durch den festen Punkt gehen, was hinreichend ist, um sie aufzuheben.

Die Coordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte, auf drei rechtwinklige Axen bezogen, hängen, wie man sieht, von den Produkten dieser Kräfte, multipliciert mit den Coordinaten ihrer Angriffspunkte, ab. Da diese Produkte sehr häufig vorkommen, hat man ihnen einen besonderen Namen gegeben; man nennt nemlich **Moment einer Kraft in Beziehung auf eine Ebene** das Produkt aus dieser Kraft in ihren Abstand von dieser Ebene. Ist z. B. P die Gröfse einer Kraft, die an einen Punkt angebracht ist, dessen Coordinaten x, y, z sind, so sind die Produkte Pz, Py, Px ihre Momente in Beziehung auf die Ebenen der x und y, x und z, y und z. Die Momente dieser Art haben, im Allgemeinen, durchaus nichts Gemeinschaftliches mit den Momenten in Beziehung auf einen Punkt, die im §. 42 erklärt worden sind. Diese hängen nemlich von der **Richtung** der Kraft ab, und sind von seinem **Angriffspunkte** unabhängig; die Momente in Beziehung auf eine Ebene dagegen hängen

nur von der Lage des Angriffspunktes der Kraft ab, und sind von ihrer Richtung unabhängig. Man braucht die Letzteren nur da, wo parallele Kräfte in Betrachtung kommen, so dafs sie positive oder negative Gröfsen seyn können, da die Kraft und die Coordinaten des Punktes, an welchen sie angebracht ist, ebenfalls positiv oder negativ seyn können.

54.

Seyen M, M', M'' u. s. w. (Fig. 22) die Angriffspunkte der parallelen Kräfte P, P', P'' u. s. w., deren Richtungen nicht weiter in Betracht kommen. Man ziehe willkührlich die drei rechtwinkligen Axen Ox, Oy, Oz, die die Coordinatenaxen seyn werden. Man bezeichne durch x, y, z die Coordinaten von M, durch x', y', z' die Coordinaten von M', durch x'' y'', z'' die Coordinaten von M'' u. s. w., und setze voraus, dafs alle diese Coordinaten und diese Kräfte gegebene Gröfsen seyen, die positiv oder negativ seyn können.

Seyen ferner Q, Q', Q'' u. s. w. die Projectionen der Punkte M, M', M'' u. s. w. auf die Ebene der x und y, so dafs man hat

$$MQ = z, \quad M'Q' = z', \quad M''Q'' = z'' \text{ u. s. w.}$$

Ferner bezeichne man durch x_1, y_1, z_1 die drei Coordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte, deren Werthe man finden will.

Die Mittelkraft $P + P'$ der zwei Kräfte P und P' wird in irgend einem Punkte N die gerade Linie MM' oder ihre Verlängerung treffen, je nachdem diese beiden Kräfte dasselbe oder entgegengesetzte Zeichen haben, in beiden Fällen hat man aber

$$P' : P + P' = MN : MM'.$$

Sey K die Projection von N auf die Ebene von x und y. Durch den Punkt M ziehe man die Linie MGH parallel mit der geraden Linie QKQ', die die geraden Linien NK und $M'Q'$ in den Punkten G und H trifft, so dafs man hat

$$MQ = GK = HQ',$$

auch hat man

$$MN : MM' = NG : M'H,$$

und aus dieser Proportion, verbunden mit der vorhergehenden, findet man

$$(P + P')\, NG = P'.\, M'H.$$

Zu dieser Gleichung addiere ich die identische Gleichung

$$(P + P')\, GK = P.\, MQ + P'.\, HQ'$$

und erhalte

$$(P + P')\, NK = Pz + P'z'.$$

Die Mittelkraft der beiden Kräfte $P + P'$ und P'' wird in einem Punkte N' die gerade Linie NM'' oder ihre Verlängerung treffen, je nachdem diese beiden Kräfte dasselbe oder entgegengesetzte Zeichen haben werden, und wenn K' die Projection von N' auf die Ebene der x und y ist, so findet man, wie im vorhergehenden Falle,

$$(P + P' + P'')\, N'K' = (P + P')\, NK + P''z'',$$

folglich hat man

$$(P + P' + P'')\, N'K' = Pz + P'z' + P''z''.$$

Auf diese Weise fährt man fort, bis man alle gegebenen Kräfte P, P', P'' u. s. w. erschöpft hat, und wenn R die Mittelkraft aller ist, so hat man zuletzt

$$Rz_1 = Pz + P'z' + P''z'' + \dots.$$

Die Figur 22 setzt voraus, daſs alle Punkte M, M', M'' u. s. w. auf derselben Seite der Ebene der x und y liegen, oder daſs ihre Ordinaten, die der Axe der z parallel sind, alle dasselbe Zeichen haben; man sieht aber leicht, daſs, wenn die vorhergehende Gleichung in diesem Falle richtig ist, dies auch noch dann statt finden wird, wenn diese Ordinaten theilweise positiv und theilweise negativ sind. Denn man verschiebe die Ebene der x und y, mit sich selbst parallel, bis zu einem beliebigen Abstande h von seiner früheren Lage. In Beziehung auf diese neue Ebene seyen Z, Z', Z'' u. s. w. die Coordinaten von M, M', M'' u. s. w., und Z_1 die Coordinate des Mittelpunktes der parallelen Kräfte, so daſs man hat

$$Z_1 = z_1 - h,\quad Z = z - h,\quad Z' = z' - h,\quad Z'' = z'' - h$$

u. s. w. Zieht man nun von der vorhergehenden Gleichung die identische Gleichung

$$Rh = Ph + P'h + P''h + \dots$$

ab, so erhält man

$$RZ_1 = PZ + P'Z' + P''Z'' + \ldots,$$

in welcher Gleichung die Ordinaten Z, Z', Z'' u. s. w. positiv oder negativ seyn können.

Man sieht also, daſs in allen Fällen das Moment der Mittelkraft einer beliebigen Anzahl von parallelen Kräften in Beziehung auf eine Ebene, die man willkührlich gewählt hat, der Summe der Momente dieser Kräfte, in Beziehung auf dieselbe Ebene, gleich ist.

55.

Nimmt man allmälich die Momente in Beziehung auf die drei Coordinatenebenen, so hat man, nach den vorhergehenden Bezeichnungen,

$$\left.\begin{array}{l} Rx_1 = Px + P'x' + P''x'' + \ldots \\ Ry_1 = Py + P'y' + P''y'' + \ldots \\ Rz_1 = Pz + P'z' + P''z'' + \ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

und da

$$R = P + P' + P'' + \ldots \quad (2)$$

ist, so sind die drei Coordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte vollkommen bestimmt. Zieht man durch diesen Punkt, nach der Richtung, die das Zeichen von R angiebt, eine gerade Linie parallel mit den gegebenen Kräften, so hat man die Richtung der Mittelkraft. Diese vier Gleichungen enthalten auf die allgemeinste Weise die Theorie der parallelen Kräfte.

Die Summe der Momente der Kräfte P, P', P''... ist gleich Null, in Beziehung auf jede Ebene, die durch den Mittelpunkt der parallelen Kräfte geht. Denn nimmt man diese Ebene für die der x und y, so muſs man nothwendig $Z_1 = o$ haben, und folglich

$$Pz + P'z' + P''z'' + \ldots = o.$$

In dem besonderen Falle, wenn sich die Kräfte P, P', P''... auf zwei gleiche Kräfte reducieren, die in entgegengesetztem Sinne wirken, ist ihre Summe R gleich Null, wodurch die Werthe von x_1, y_1, z_1 unendlich groſs werden. Der Mittelpunkt der parallelen Kräfte liegt alsdann unendlich weit entfernt, oder, was dasselbe ist, dieser Mittelpunkt ist gar nicht vorhanden, eben so wenig, wie die Mittelkraft.

56.

Wenn alle Angriffspunkte M, M' M''... der gegebenen Kräfte in derselben Ebene liegen, so ist, nach der Beschaffenheit des Mittelpunktes der parallelen Kräfte (§. 52) klar, dafs dieser Punkt, wenn er vorhanden ist, sich ebenfalls in dieser Ebene befinden mufs; dies kann man auch aus den Gleichungen (1) und (2) schliefsen.

Bezeichnet man nemlich drei gegebene Constanten durch a, b, c, so hat man in diesem Falle

$$z = ax + by + c$$
$$z' = ax' + by' + c$$
$$z'' = ax'' + by'' + c$$

u. s. w.

Ich substituiere diese Werthe von z, z', z'' u. s. w. in die dritte Gleichung (1) und erhalte

$$Rz_1 = (Px + P'x' + P''x'' + \ldots)\, a$$
$$+ (Py + P'y' + P''y'' + \ldots)\, b$$
$$+ (P + P' + P'' + \ldots)\, c.$$

Vermöge der zwei anderen Gleichungen (1) und der Gleichung (2) kann man die Coefficienten a, b, c durch Rx_1, Ry_1, Rz_1 ersetzen, und wenn man alsdann den gemeinschaftlichen Factor R wegläfst, so hat man

$$z_1 = ax_1 + by_1 + c,$$

woraus hervorgeht, dafs der Mittelpunkt der parallelen Kräfte in der Ebene der Punkte M, M', M''... liegt.

Wenn alle diese Punkte in einer geraden Linie liegen, so befindet sich dieser Mittelpunkt ebenfalls auf derselben, und die erste der Gleichungen (1) ist alsdann hinreichend, um seine Lage zu bestimmen, wenn man diese gerade Linie für die Axe der x nimmt. Sind aufserdem die Kräfte P, P', P''... senkrecht auf dieser geraden Linie, so fallen die Momente, die wir gegenwärtig betrachten, mit den Momenten in Beziehung auf einen Punkt, der hier der Anfangspunkt O der Abscissen x ist, zusammen, und die erste Gleichung (1) fällt mit der Gleichung (1) des §. 47 zusammen. Es ist nemlich leicht zu sehen, dafs unter den gegebenen Kräften P, P', P''..., die Kräfte, welche nach derselben Richtung um den Punkt O zu drehen suchen, wie die Mittelkraft R, diejenigen

sind, die dasselbe Zeichen, wie ihre Abstände x, x', x''... von diesem Punkte, haben, während diejenigen, welche eine Drehung in entgegengesetztem Sinne zu bewirken suchen, die Kräfte sind, deren Zeichen dem ihrer entsprechenden Abstände entgegengesetzt ist; folglich werden die Momente der ersteren Kräfte addiert, die der letzteren abgezogen, gerade so, wie es in dem erwähnten Paragraphen gelehrt worden ist.

57.

Aus der eben erläuterten Theorie kann man leicht die Gleichungen des Gleichgewichtes paralleler Kräfte P, P', P''... ableiten.

Ist gar kein fester Punkt in dem Systeme, so ist es für das Gleichgewicht erforderlich, dafs, wenn man eine dieser Kräfte, z. B. die Kraft P, absondert, alle übrigen eine Mittelkraft haben, die gleich P und ihm entgegengesetzt ist. Sey also R' die Mittelkraft der Kräfte P', P''...; weil die Kräfte P und R' gleich und in entgegengesetztem Sinne gerichtet sind, so müssen sie gleich seyn und entgegengesetzte Zeichen haben, das heifst, es mufs

$$P + R' = o$$

seyn. Da aber R' die Summe der Seitenkräfte P' P''... ist, so folgt hieraus, als erste Gleichung des Gleichgewichtes,

$$P + P' + P'' + \ldots = o. \qquad (a)$$

Um aufserdem auszudrücken, dafs die Kräfte P und R' gerade entgegengesetzt sind, seyen α, β, γ die drei Coordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte P', P''..., so dafs man hat

$$R'\alpha = P'x' + P''x'' + \ldots$$
$$R'\beta = P'y' + P''y'' + \ldots$$
$$R'\gamma = P'z' + P''z'' + \ldots$$

Da dieser Mittelpunkt der Angriffspunkt ihrer Mittelkraft R ist, so ist es nothwendig, dafs er sich auf der Richtung der Kraft P befinde, damit R' dieser Kraft gerade entgegengesetzt sey, oder, was dasselbe ist, dieser Punkt und der Angriffspunkt M der Kraft P müssen auf einer Linie liegen, die der gemeinschaftlichen Richtung der gegebenen Kräfte parallel ist. Nimmt man daher, der gröfseren Einfachheit wegen,

an, daſs die Ebene der x und y senkrecht auf dieser Richtung steht, so müssen diese beiden Punkte auf derselben Linie, die auf dieser Ebene senkrecht steht, liegen; sie haben also dieselbe Projection auf diese Ebene, folglich müssen ihre Coordinaten, die den Axen der x und y parallel sind, einander gleich seyn, so daſs man hat

$$\alpha = x, \quad \beta = y.$$

Ich substituiere daher x und y statt α und β in den zwei ersten der vorhergehenden Gleichungen, und da

$$R' = -P,$$

so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} Px + P'x' + P''x'' + \ldots = o \\ Py + P'y' + P''y'' + \ldots = o \end{array}\right\} \quad (b)$$

welche Gleichungen andeuten, daſs die Summe der Momente aller Kräfte P, P', $P''\ldots$ in Beziehung auf die Ebenen der x und z, und der y und z, die ihren Richtungen parallel sind, Null ist.

Das Gleichgewicht dieser Kräfte erfordert also, daſs die Gleichungen (a) und (b) zu gleicher Zeit statt finden. Und umgekehrt ist das Gleichgewicht vorhanden, wenn diesen drei Gleichungen Genüge geleistet wird. Denn betrachtet man die Mittelkraft R' aller Kräfte weniger eine, so hat man, in Folge dieser Gleichungen,

$$R' = -P, \quad R'\alpha = -Px, \quad R'\beta = -Py,$$

und folglich

$$\alpha = x, \quad \beta = y,$$

so daſs diese Mittelkraft der Kraft P, die man weggelassen hatte, gleich und gerade entgegengesetzt ist. Hierzu ist es nicht erforderlich, daſs die beiden Ebenen, in Beziehung auf welche die Summe der Momente der gegebenen Kräfte Null ist, auf einander senkrecht stehen, es genügt schon, wenn sie den Richtungen dieser Kräfte parallel sind, und man kann sich leicht überzeugen, daſs wenn diese Bedingungen in Beziehung auf zwei Ebenen, die dieser Richtung parallel sind, erfüllt sind, sie es auch in Beziehung auf alle übrigen seyn werden.

Wir können also nun behaupten, daſs zum Gleichgewichte eines Systems paralleler Kräfte, die an einen festen

völlig freien Körper angebracht sind, es hinreichend und nothwendig ist,

1) dafs die Summe dieser Kräfte Null sey;

2) dafs die Summe ihrer Momente, in Beziehung auf zwei beliebige Ebenen, die ihrer gemeinschaftlichen Richtung parallel sind, Null sey.

Wenn alle Kräfte in derselben Ebene enthalten sind, so ist diese zweite Bedingung, in Beziehung auf diese Ebene, schon erfüllt, und es ist hinreichend, wenn sie auch noch in Beziehung auf eine andere Ebene erfüllt wird.

58.

Wenn ein Punkt des festen Körpers als unbeweglich angenommen wird, so ist es für das Gleichgewicht der parallelen Kräfte hinreichend, dafs die Summe ihrer Momente in Beziehung auf zwei Ebenen, die durch diesen Punkt gehen, und ihrer Richtung parallel sind, Null sey, und es ist alsdann nicht mehr nöthig, dafs ihre Mittelkraft Null sey, denn die Abstände der Mittelkraft von den beiden Ebenen werden alsdann Null seyn, diese wird daher mit ihrem Durchschnitte zusammenfallen, und durch den Widerstand des festen Punktes aufgehoben werden.

Ist dieser Punkt der Mittelpunkt der parallelen Kräfte, so ist die Summe der Momente, in Beziehung auf jede Ebene, die durch diesen Punkt geht, Null, folglich halten sich die gegebenen Kräfte im Gleichgewichte, wie auch ihre gemeinschaftliche Richtung beschaffen sey, wie dies schon früher (§. 53) gefunden worden ist.

Wenn ein fester Körper durch eine unbewegliche Axe zurückgehalten wird, um welche er sich nur frei herum drehen kann, so ist es für das Gleichgewicht der parallelen Kräfte, die an seine verschiedenen Punkte angebracht sind, hinreichend, dafs die Summe der Momente in Beziehung auf die Ebene, die durch diese Axe parallel mit der Richtung der Kräfte gezogen ist, Null sey; denn ihre Mittelkraft fällt alsdann in diese Ebene, trifft dort die feste Axe und wird durch ihren Widerstand aufgehoben. Wenn die feste Axe

selbst den gegebenen Kräften parallel ist, so ist die in Rede stehende Ebene unbestimmt, daher fällt die Gleichung des Gleichgewichtes ganz weg, was auch seyn muſs, da Kräfte, die alle einer festen Axe parallel sind, einen festen Körper nicht um diese Axe drehen können, so daſs, in diesem Falle, das Gleichgewicht, ohne Rücksicht auf ihre Gröſse und ihre Abstände von dieser Axe, statt hat.

Viertes Kapitel.

Allgemeine Betrachtungen über die schweren Körper und die Schwerpunkte.

59.

Man nennt ohne Unterschied Schwere oder Schwerkraft die Kraft, welche alle Körper zur Oberfläche der Erde hintreibt, sobald sie nicht gehalten werden. Ihre Wirkung erstreckt sich auf alle materiellen Punkte, nach Richtungen, die senkrecht auf dieser Oberfläche sind, oder nach verticalen Linien. Die verlängerten Richtungen der Schwere, an verschiedenen Orten der Erde, müssen daher in ihrem Mittelpunkte zusammentreffen, da sie eine fast kugelförmige Gestalt hat. Berücksichtigt man aber die Gröfse eines Erdhalbmessers, im Verhältnisse zu den Ausdehnungen der Körper, die man gewöhnlich betrachtet, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dafs die Richtungen der Schwere, in der ganzen Ausdehnung eines und desselben Körpers, parallel sind.

Die Beobachtung hat gezeigt, dafs die Intensität dieser Kraft an der Oberfläche der Erde sich mit der Breite ändert, und dafs sie sich auf einer und derselben Verticalen mit der Höhe über dieser Oberfläche ändert; die Unterschiede in der Höhe und Breite müssen aber sehr beträchtlich seyn, wenn diese Aenderungen merklich werden sollen, und sie sind es keinesweges in der Ausdehnung eines Körpers von gewöhnlichen Dimensionen.

60.

Hieraus kann man schliefsen, dafs die Mittelkraft der unendlich vielen parallelen Kräfte, die auf alle Punkte eines schweren Körpers wirken, von seiner Gestalt unabhängig ist; diese Mittelkraft ist das, was man das Gewicht des Körpers nennt. In den gleichartigen Körpern ist das Gewicht offenbar seinem körperlichen Inhalte proportional; aber die tägliche Erfahrung zeigt uns, dafs verschiedene Körper von gleichem Inhalte nicht gleiches Gewicht haben. Dies kann

entweder daher rühren, dafs die Anziehungskraft der Erde, die die wesentliche Ursache der Schwere ist, wie man später sehen wird, von der Natur der materiellen Punkte, auf welche sie wirkt, abhängt, oder auch daher, dafs ungleichartige Körper, bei gleichem Inhalte, verschiedene Quantitäten materieller gleich schwerer Punkte enthalten. Wir werden in einem anderen Kapitel zeigen, wie man aus der beobachteten Bewegung der schweren Körper geschlossen hat, dafs es der zweite dieser zwei denkbaren Fälle ist, der wirklich in der Natur statt hat.

Es folgt hieraus, dafs das Gewicht eines beliebigen Körpers im zusammengesetzten Verhältnisse seiner Masse und der Intensität der Schwere an dem Orte wo er sich befindet, steht. Nennt man daher dieses Gewicht P, M die Masse und g das Maafs der Schwere, so hat man

$$P = gM.$$

Diese Gröfse g, die nicht von der besonderen Natur eines jeden Körpers abhängt, ist, wie man sieht, das Gewicht desjenigen, dessen Masse man willkührlich als Einheit annimmt. In der Folge wird man sehen, wie ihr Werth an verschiedenen Punkten der Erde nach der Bewegung der Körper, die blos der Wirkung der Schwere unterworfen sind, bestimmt worden ist.

Wir können auch schreiben

$$P = \Pi V$$

indem man durch Π das Gewicht des Körpers in der Einheit des Volumens, und durch V das Volumen bezeichnet. Das Gewicht Π ist das, was man die specifische Schwere des Körpers, den man betrachtet, nennt, was aber eine sehr unpassende Benennung ist, da die Schwere allen Körpern von verschiedenen Arten gemeinschaftlich ist, und die man durch den Ausdruck specifisches Gewicht ersetzen sollte.

Bezeichnet man endlich durch D die in der Einheit des Volumens enthaltene Masse des Körpers, den man betrachtet, so ist D das, was man die Dichtigkeit des Körpers nennt, und man hat

$$M = DV, \quad P = gDV.$$

Dies sind die Gleichungen, die zwischen den fünf Gröfsen P, g, M, D, V statt finden, von welchen jede in Zah-

len ausgedrückt seyn mufs, indem man sie auf die Einheit ihrer Art bezieht.

61.

Das Gramme oder die Gewichtseinheit, ist das Gewicht eines Kubikcentimeters destillierten Wassers im Maximum seiner Dichtigkeit, welches ungefähr 4 Graden des hunderttheiligen Thermometers entspricht. Dies Gewicht ändert sich mit dem Orte auf der Erde, den es einnimmt; da aber das Gewicht aller übrigen Körper, zu deren Abwägung es dient, in demselben Verhältnisse sich ändert, so folgt hieraus, dafs das Gewicht irgend eines Körpers, in Grammen ausgedrückt, überall dasselbe ist und dafs man nicht nöthig hat anzugeben, an welchem Orte es bestimmt worden ist. Nach Hallström's Versuchen ist das Gewicht eines Kubikcentimeters destillierten Wassers, bei der Temperatur Null,

$$0,^{gram.}9998918.$$

Gewöhnlich nimmt man als Einheit der Dichtigkeit, die Dichtigkeit des destillierten Wassers bei dieser letzteren Temperatur. Die Dichtigkeit einer grofsen Anzahl von Substanzen ist durch Versuche bestimmt und vermittelst dieser Einheit in Zahlen angegeben worden. So z. B. ist die Dichtigkeit des Quecksilbers bei dieser Temperatur

$$13,5975,$$

und sie nimmt um

$$\frac{1}{5550},$$

bei jeder Verminderung oder Erhöhung der Temperatur von einem Grade, zu oder ab. Die Dichtigkeit der Luft, bei der Temperatur des schmelzenden Eises, und unter dem barometrischen Drucke von 76 Centimeter ist auf der Pariser Sternwarte zu

$$\frac{1}{769,4}$$

bestimmt worden, und bei jeder Veränderung von einem Grade in der Temperatur ändert sie sich in umgekehrtem Verhältnisse um

$$0,00375,$$

wie die eines jeden anderen Gases.

Da sich das Gewicht der Quecksilbersäule, die den baro-

metrischen Druck angiebt, mit der geographischen Breite und der Höhe über der Oberfläche der Erde ändert, so ändert sich zugleich auch die Dichtigkeit der Luft, die dem Drucke einer Quecksilbersäule von gegebener Höhe unterworfen seyn soll. Es ist daher nicht hinreichend, dafs man diese Höhe angiebt, man mufs auch sagen, auf welchen Ort sie sich bezieht, so wie z. B. auf die Pariser Sternwarte. Das Verhältnifs der Dichtigkeit des Quecksilbers zu dem der Luft, welches den vorhergehenden Zahlen entspricht, ist

10462.

Sobald man irgend eine Erscheinung, wie z. B. die Wärme, von einer materiellen Substanz ableitet, so ist diese Substanz der Schwerkraft unterworfen; der Ausdruck unwägbar kann daher nur von einer Materie gebraucht werden, deren Dichtigkeit so gering ist, da sie sich allen, uns zu Gebote stehenden, Mitteln sie ausfindig zu machen, entzieht, so dafs ihre Anwesenheit weder das mefsbare Gewicht, noch die mefsbare Masse des Körpers, zu dem sie gehört, vermehrt, wie grofs auch die Quantität derselben sey.

62.

Die Gewichte sind die uns am genauesten bekannten Kräfte und deren Verhältnisse wir, vermittelst der Wage, mit der gröfsten Genauigkeit und Leichtigkeit bestimmen können. Es ist daher sehr naturgemäfs, sie als Vergleichmittel für Kräfte anderer Art anzuwenden. Wenn daher z. B. die Muskelkraft eines Thiers oder irgend eine andere Kraft auf einen Körper vermittelst eines Seils, das an seine Oberfläche angebracht ist, wirkt, so können wir uns immer denken, dafs diese Kraft einem gewissen bestimmten Gewichte gleich sey, und wir können sogar, ohne ihre Richtung zu ändern, ihre Wirkung durch die jenes Gewichtes ersetzen, indem man es an das Ende des Seils anbringt, nachdem man dieses über eine Rolle geführt hat, die auf eine passende Art angebracht worden ist.

Das Gewicht bietet das bequemste Maafs der Masse dar; ohne Hülfe der Schwerkraft würde es sehr schwierig seyn, das Verhältnifs der Masse zweier Körper zu bestimmen. In der Folge wird man zwar sehen, dafs man es, mit Genauig-

keit, aus dem wechselseitigen Stofse dieser Körper bestimmen könnte; es ist aber viel einfacher, das Verhältnifs der Massen durch das Verhältnifs der Gewichte zu ersetzen, welchem es, in Folge der Gleichung

$$P = gM,$$

an jedem Orte auf der Erde gleich ist. Indessen mufs man doch einen Begriff von der Gleichheit und dem Verhältnisse der Massen haben, ohne dafs man auf die Schwerkraft zurück geht, die nur eine untergeordnete Eigenschaft der Körper ist, da sie, ohne dafs die Massen sich ändern, ganz unmerklich wird, wenn man die Körper in einen hinlänglich grofsen Abstand von der Erde bringt. Wir werden an einer anderen Stelle dieses Werkes auf diesen Punkt zurück kommen.

63.

Da alle Punkte eines schweren Körpers durch parallele Kräfte getrieben werden, so folgt daraus, dafs, wenn man diesem Körper verschiedene Lagen in Beziehung auf die Richtung dieser Kräfte giebt, ihre Mittelkraft beständig durch denselben Punkt des Körpers gehen wird. Dieser Punkt, den wir im Allgemeinen Mittelpunkt der parallelen Kräfte genannt haben (§. 53), erhält hier den besonderen Namen Schwerpunkt. Seine charakteristische Eigenschaft bei den festen Körpern, die nur der Wirkung der Schwerkraft unterworfen sind, besteht darin, dafs, wenn man ihn als fest annimmt, der Körper, dem er angehört, in allen möglichen Lagen um diesen Punkt im Gleichgewichte bleibt, weil in allen diesen Lagen die Mittelkraft der Kräfte, die an alle Punkte des Körpers angebracht sind, durch den festen Punkt geht.

Auch sieht man, dafs, wenn ein fester schwerer Körper durch einen anderen festen Punkt zurück gehalten wird, es alsdann für das Gleichgewicht nothwendig und hinreichend ist, dafs die Linie, die diesen Punkt und den Schwerpunkt verbindet, vertical sey, wobei sich übrigens der Schwerpunkt über oder unter dem festen Punkte befinden kann. Da nemlich das Gewicht des Körpers eine verticale Kraft ist, die an seinen Schwerpunkt angebracht ist, so fällt, in dieser Voraussetzung, ihre Richtung mit der geraden Linie, die diesen Mittelpunkt und den festen Punkt verbindet, oder mit ihrer

Verlängerung, zusammen. Folglich wird diese Kraft durch den Widerstand des festen Punktes aufgehoben, ebenso, als wenn sie unmittelbar an denselben angebracht wäre.

Hängt man einen schweren festen Körper an einem festen Punkte vermittelst eines Fadens auf, dessen unteres Ende an einen Punkt seiner Oberfläche befestigt ist, so folgt aus demselben Grunde, dafs die Richtung dieses Fadens im Zustande des Gleichgewichtes vertical seyn und seine Verlängerung durch den Schwerpunkt des Körpers gehen wird. Ebenso wird sich die Sache verhalten, wenn man den Körper an demselben festen Punkte aufhängt, während man das untere Ende des Fadens an andere Punkte seiner Oberfläche anbringt. Die Verlängerungen des Fadens werden sich im Innern des Körpers in seinem Schwerpunkte schneiden, welcher Umstand ein praktisches Mittel darbietet, die Lage des Schwerpunktes in einem Körper von beliebiger Gestalt, er sey gleichartig oder ungleichartig, zu bestimmen.

Bei allen Fragen über das Gleichgewicht, die sich auf einen festen Körper beziehen, kann man von dem Gewichte seiner verschiedenen Theile absehen, sobald man nur zu den anderen gegebenen Kräften, die auf diesen Körper wirken, eine Kraft hinzufügt, die seinem Gewichte gleich und vertical an seinen Schwerpunkt angebracht ist. So z. B. mufs man, im Falle des Gleichgewichtes des Hebels, unter die Zahl der gegebenen Kräfte, deren Momentensumme, in Beziehung auf den Stützpunkt, Null seyn soll (§. 47), auch das Gewicht des Hebels aufnehmen, das an seinem Schwerpunkte nach der Richtung der Schwere wirkt.

64.

Wenn man die Schwerpunkte G und G' zweier Theile eines Körpers und ihre Gewichte p und p' kennt, so kann man hieraus unmittelbar den Schwerpunkt K dieses Körpers finden. Denn dieser Punkt ist der Stützpunkt der Mittelkraft der parallelen Kräfte p und p', die in demselben Sinne an den Endpunkten G und G' der Linie GG' wirken, und liegt auf dieser Linie; um seine Lage zu bestimmen, hat man daher

$$GK : GG' = p' : p + p'.$$

Kennt man ebenso die Schwerpunkte K und G des Körpers und eines seiner Theile, und sind die Gewichte des Körpers und dieses Theils P und p, so kann man hieraus den Schwerpunkt G' des anderen Theils finden; denn dieser Punkt liegt oberhalb des Punktes K auf der Verlängerung der geraden Linie GK, und sein Abstand vom Punkte G wird durch die Proportion

$$GG' : GK = P : P - p$$

bestimmt seyn.

Ist ein Körper in eine beliebige Anzahl von Theilen getheilt, deren Gewichte und Schwerpunkte bekannt sind, so kann man hieraus seinen Schwerpunkt durch eine Reihe von Verhältnissen finden. Es ist aber besser, seine drei Coordinaten vermittelst des Lehrsatzes zu bestimmen, der sich auf die Momente der parallelen Kräfte bezieht (§. 54).

Es seyen z. B. $p, p', p''...$ die Gewichte der verschiedenen Theile des Körpers, und P sein völliges Gewicht, so dafs man hat

$$P = p + p' + p'' + \ldots.$$

Seyen ferner x, y, z die Coordinaten des Schwerpunktes des Theils, dessen Gewicht p ist, x', y', z' die des Schwerpunktes des Theils, dessen Gewicht p' ist u. s. w. Alle diese Gröfsen sind nach der Voraussetzung gegeben, und wenn man x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Schwerpunktes des ganzen Körpers nennt, die auf dieselben Axen, wie die vorhergehenden, bezogen sind, so hat man, nach dem angeführten Lehrsatze,

$$Px_1 = px + p'x' + p''x'' + \ldots$$
$$Py_1 = py + p'y' + p''y'' + \ldots$$
$$Pz_1 = pz + p'z' + p''z'' + \ldots$$

wodurch man die Werthe von x_1, y_1, z_1 erhält.

65.

Man kann auch in diesen Gleichungen die Gewichte durch die Massen, welchen sie proportional sind, ersetzen. Bezeichnet man daher durch $m, m', m''...$ die Massen der verschiedenen Theile des Körpers, deren Gewichte durch $p, p', p''...$ bezeichnet werden, und nennt man die ganze Masse M, so dafs man hat

$$M = m + m' + m'' + \ldots,$$

so folgt hieraus

$$\left.\begin{aligned} Mx_1 &= mx + m'x' + m''x'' + \ldots \\ My_1 &= my + m'y' + m''y'' + \ldots \\ Mz_1 &= mz + m'z' + m''z'' + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

woraus hervorgeht, daſs der Schwerpunkt von der Intensität der Schwere unabhängig ist, und daſs es, in allen Höhen über der Oberfläche der Erde und unter allen geographischen Breiten, immer derselbe Punkt seyn wird. Durch die Bemerkung, daſs dieser Punkt die Wirkung der Schwere nicht voraussetzt, und nur von den Massen und ihrer Vertheilung abhängt, sind Euler und andere Schriftsteller veranlaſst worden, ihn den Mittelpunkt der Trägheit zu nennen; die Benennung Schwerpunkt hat aber eine allgemeinere Aufnahme gefunden.

Wenn die Masse M in eine unendlich groſse Anzahl unendlich kleiner Theile m, m', $m''\ldots$ eingetheilt worden ist, so kann man jeden beliebigen Punkt eines jeden derselben als seinen Schwerpunkt ansehen, da die Coordinaten, auf die Axen aller Punkte eines jeden Elementes bezogen, nur um ein unendlich Kleines von einander verschieden sind. Die zweiten Theile der Gleichung (1) bestehen alsdann aus einer unendlich groſsen Anzahl unendlich kleiner Glieder, deren Summen, nach dem auf vielfache Integrale ausgedehnten Lehrsatze des §. 13, bestimmte Integrale seyn werden. Man kann daher immer, durch die Regeln der Integralrechnung, den Schwerpunkt irgend eines Körpers genau oder näherungsweise bestimmen, ohne daſs man den eines seiner Theile kennt.

Wenn alle Theile eines Körpers gleichartig sind, so verhalten sich ihre Massen wie ihre körperlichen Inhalte, man kann daher alsdann diese Inhalte an die Stelle der Massen in die Gleichungen (1) setzen, und wenn man durch V den ganzen Inhalt und durch v, v', $v''\ldots$ seine Theile, die m, m', $m''\ldots$ entsprechen, darstellt, so hat man

$$\begin{aligned} V &= v + v' + v'' + \ldots \\ Vx_1 &= vx + v'x' + v''x'' + \ldots \\ Vy_1 &= vy + v'y' + v''y'' + \ldots \\ Vz_1 &= vz + v'z' + v''z'' + \ldots. \end{aligned}$$

Der Punkt, den man durch diese Gleichungen bestimmt, ist der Mittelpunkt der parallelen Kräfte, die an alle Punkte des Körpers angebracht, und den Elementen seines Inhalts proportional sind; diesen Punkt nennt man den Schwerpunkt des Inhalts, wiewohl ein Inhalt als solcher weder Masse noch Schwere hat. Man nennt auch Schwerpunkt einer Oberfläche oder einer Linie, den Mittelpunkt der parallelen Kräfte, die an alle ihre Punkte angebracht, und ihren Elementen proportional sind. Die Coordinaten dieses Punktes bestimmt man, indem man in den vorhergehenden Gleichungen, die Volumina V, v, v', v''..., durch den Flächenraum der Oberfläche und ihrer Theile, oder durch die Länge der Linie und ihrer Theile ersetzt.

66.

Die Massen M, m, m', m''.... und die wechselseitigen Abstände ihrer Schwerpunkte, sind unter einander durch eine Gleichung verbunden, die man leicht aus der Gleichung (1) ableiten kann.

Zu diesem Endzwecke setze man den Anfang der Coordinaten in den Schwerpunkt von M, alsdann werden diese Gleichungen

$$mx + m'x' + m''x'' + \ldots = o$$
$$my + m'y' + m''y'' + \ldots = o$$
$$mz + m'z' + m''z'' + \ldots = o.$$

Erhebt man die erste auf das Quadrat, so findet man

$$m^2x^2 + m'^2x'^2 + m''^2x''^2 + \ldots$$
$$= -2\,mm'xx' - 2\,mm''xx'' - 2\,m'm''x'x'' - \ldots$$

Ich addiere auf beiden Seiten dieser Gleichung den Ausdruck

$$m\,(m' + m'' + \ldots)\,x^2 + m'\,(m + m'' + \ldots)\,x'^2$$
$$+ m''\,(m + m' + \ldots)\,x''^2 + \ldots,$$

so folgt hieraus

$$M\,(mx^2 + m'x'^2 + m''x''^2 + \ldots) = mm'\,(x - x')^2$$
$$+ mm''\,(x - x'')^2 + m'm''\,(x' - x'')^2 + \ldots.$$

Die zweite und dritte der Gleichungen (1) geben auf dieselbe Weise

$$M\,(my^2 + m'y'^2 + m''y''^2 + \ldots) = mm'\,(y - y')^2$$
$$+ mm''\,(y - y'')^2 + m'm''\,(y' - y'')^2 + \ldots$$

$$M(mz^2 + m'z'^2 + m''z''^2 + \ldots) = mm'(z - z')^2 + mm''(z - z'')^2 + m'm''(z' - z'')^2 + \ldots.$$

Addieren wir diese drei letzten Gleichungen, und setzen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2$$
$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = r''^2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \varrho^2$$
$$(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2 = \varrho'^2$$
$$(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 = \varrho''^2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

so erhalten wir

$$M(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \ldots) = mm'\varrho^2 + mm''\varrho'^2 + m'm''\varrho''^2 + \ldots.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung, in welcher $\varrho, \varrho', \varrho''\ldots$ die wechselseitigen Abstände der Schwerpunkte, $m, m', m''\ldots$ und $r, r', r''\ldots$ die Abstände dieser Punkte vom Schwerpunkte von M sind.

67.

Aus den Gleichungen (1) kann man auch eine merkwürdige Eigenschaft des Gleichgewichtes eines völlig freien materiellen Punktes ableiten. Sie besteht in Folgendem:

Sey O (Fig. 23) der Punkt, der im Gleichgewichte ist; man bezeichne durch die geraden Linien $OA, OA', OA''\ldots$ die ihn bewegenden Kräfte ihrer Gröſse und Richtung nach; sind alsdann ihre Endpunkte $A, A', A''\ldots$ die Schwerpunkte gleicher Massen, so ist der Punkt O der Schwerpunkt des ganzen Systems.

Denn wendet man die Gleichungen (1) auf die Massen an, und nimmt man an, daſs ihre Anzahl $= n$ sey, so hat man

$$nx_1 = x + x' + x'' + \ldots$$
$$ny_1 = y + y' + y'' + \ldots$$
$$nz_1 = z + z' + z'' + \ldots.$$

Bezeichnet man ferner durch α, β, γ die Winkel, welche die Kraft OA mit drei rechtwinkligen Axen einschlieſst, die durch den Punkt O gezogen sind, durch α', β', γ' das, was diese Winkel in Beziehung auf die Kraft OA' werden, durch

α'', β'' γ'' das, was sie in Beziehung auf die Kraft OA'' werden u. s. w., so werden die Gleichungen des Gleichgewichtes dieser Kräfte

$$OA \cos\alpha + OA' \cos\alpha' + OA'' \cos\alpha'' + \ldots = o$$
$$OA \cos\beta + OA' \cos\beta' + OA'' \cos\beta'' + \ldots = o$$
$$OA \cos\gamma + OA' \cos\gamma' + OA'' \cos\gamma'' + \ldots = o.$$

Wenn man aber den Anfangspunkt der Coordinaten in den Punkt O setzt, so hat man

$$x = OA \cos\alpha,\quad y = OA \cos\beta,\quad z = OA \cos\gamma,$$
$$x' = OA' \cos\alpha',\quad y' = OA' \cos\beta',\quad z' = OA' \cos\gamma',$$
$$x'' = OA'' \cos\alpha'',\quad y'' = OA'' \cos\beta'',\quad z'' = OA'' \cos\gamma'',$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

als Coordinaten der Punkte A, A', A''.... In Folge der Gleichungen des Gleichgewichtes hat man also

$$x + x' + x'' + \ldots = o$$
$$y + y' + y'' + \ldots = o$$
$$z + z' + z'' + \ldots = o,$$

und hieraus findet man

$$x_1 = o,\quad y_1 = o,\quad z_1 = o$$

als Coordinaten des Schwerpunktes der gleichen Massen; folglich fällt dieser Schwerpunkt mit dem Punkte O zusammen, was zu beweisen war.

68.

Es giebt viele besondere Fälle, in welchen der Schwerpunkt unmittelbar bekannt ist. So z. B. ist der Schwerpunkt einer Kugel oder eines Ellipsoids offenbar im Mittelpunkte der Figur, der eines Parallelopipedums im Durchschnitte seiner vier Diagonalen, der eines Cylinders mit parallelen Grundflächen im Mittelpunkte seiner Axe. Der Schwerpunkt eines Kreises oder einer Ellipse ist ebenfalls im Mittelpunkte der Figur, und der eines Parallelogramms im Durchschnitte seiner beiden Diagonalen. Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt in ihrer Mitte, woraus man, ohne Schwierigkeit, den Schwerpunkt des Umfangs eines beliebigen Vielecks, entweder durch eine Reihe von Verhältnissen (§. 64), oder durch die Gleichungen der Momente paralleler Kräfte finden kann. Auch sieht man, daſs, wenn man die Schwerpunkte eines Dreiecks

oder einer dreieckigen Pyramide gefunden hat, man hieraus, auf dem einen oder dem anderen dieser Wege, die Schwerpunkte eines jeden gegebenen Vielecks oder Polyëders finden kann, da man diese immer in Dreiecke oder dreieckige Pyramiden zerlegen kann.

Im Allgemeinen aber erfordert die Bestimmung der Schwerpunkte den Gebrauch der Integralrechnung, und im folgenden Kapitel werden wir alle Aufschlüsse geben, die man über diese Aufgabe wünschen kann.

Fünftes Kapitel.

Bestimmung der Schwerpunkte.

I. Schwerpunkte krummer Linien.

69.

Sey s der Bogen der gegebenen krummen Linie, der bei einem beliebigen Punkte M aufhört, und von einem festen Punkte aus gezählt wird, den ich C nenne. Seyen auch x, y, z, die drei rechtwinkligen Coordinaten von M. Man kann diese krumme Linie als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten, ds wird die Seite oder das Element der krummen Linie seyn, das dem Punkte M entspricht, und wo auch der Schwerpunkt dieses Elements sey, immer kann man x, y, z als seine drei Coordinaten ansehen, da diese in jedem Falle nur um unendlich kleine Werthe von x, y, z verschieden sind *).

Man nenne l die Länge des bestimmten Theils der krummen Linie, dessen Schwerpunkt man bestimmen will, und bezeichne durch s_0 und s_1 die gegebenen Werthe von s, die den beiden Endpunkten von l entsprechen. Seyen x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Schwerpunktes dieses Bogens l, auf die Axen der x, y, z bezogen. Nach dem Lehrsatze des §. 13 ist die Summe der Werthe der einzelnen Produkte xds, yds, zds, in der ganzen Ausdehnung von l, ein bestimmtes Integral, das von $s = s_0$ bis zu $s = s_1$ genommen wird, indem man x, y, z als Functionen von s betrachtet, die durch die Natur der krummen Linie, die man betrachtet, gegeben sind. Wir haben also (§. 65)

$$lx_1 = \int_{s_0}^{s_1} xds, \quad ly_1 = \int_{s_0}^{s_1} yds, \quad lz_1 = \int_{s_0}^{s_1} zds, \quad (1)$$

durch welche drei Gleichungen x_1, y_1, z_1 bestimmt werden.

*) Man vergl. Zusatz II. Anm. des Uebers.

Man nehme z. B. an, es sey die gegebene Linie eine gerade, und ihr Theil l endige im Punkte C, so dafs man $s_0 = o$, $s_1 = l$ hat. Man bezeichne durch α, β, γ die drei Winkel, die dieser Theil mit den Axen einschliefst, die durch den Punkt C nach der Richtung der positiven x, y, z gezogen sind. Seyen auch a, b, c die Coordinaten des Punktes C, so hat man für irgend einen Punkt M

$$x = a + s \cos\alpha, \quad y = b + s \cos\beta, \quad z = c + s \cos\gamma.$$

Ich substituiere diese Werthe in die Gleichungen (1); führt man die Integrationen aus, und dividiert durch l, so hat man

$$x_1 = a + \tfrac{1}{2}l.\cos\alpha, \quad y_1 = b + \tfrac{1}{2}l.\cos\beta, \quad z_1 = c + \tfrac{1}{2}l.\cos\gamma,$$

woraus hervorgeht, wie dies auch seyn mufs, dafs der Schwerpunkt der geraden Linie l in ihrem Mittelpunkte liegt.

70.

Betrachtet man eine ebene krumme Linie, und nimmt ihre Ebene für die der x und y, so sind die zwei ersten Gleichungen (1) hinreichend, um die Lage ihres Schwerpunktes in dieser Ebene zu bestimmen. Ist aufserdem der Theil l der krummen Linie zu beiden Seiten des Punktes C symmetrisch, so hat man $s_0 = -\frac{1}{2}l$ und $s_1 = \frac{1}{2}l$, der Schwerpunkt wird daher auf der Normalen am Punkte C liegen, und wenn man diese gerade Linie für die Axe der x nimmt, so ist es hinreichend, den Werth von x_1 zu bestimmen, welcher durch die Gleichung

$$l x_1 = \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} x\,ds$$

bestimmt ist.

Der Kreisbogen ist in diesem besonderen Falle enthalten, wenn man den Durchmesser, der durch seine Mitte geht, für die Axe der x nimmt. Verlegt man zu gleicher Zeit den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt des Kreises, und nennt seinen Halbmesser a, so hat man

$$x = a\,.\cos\frac{s}{a},$$

als Abscisse eines beliebigen Punktes M. Hieraus findet man

$$l x_1 = 2a^2 \sin\frac{l}{2a},$$

und wenn man die Sehne des Bogens l durch c bezeichnet, so hat man

$$c = 2a \sin \frac{l}{2a}, \quad l x_1 = ac.$$

woraus hervorgeht, daſs der Abstand x_1 des Schwerpunktes eines Kreisbogens vom Mittelpunkte des Kreises, die vierte Proportionale zu dem Halbmesser, der Sehne und dem Bogen ist.

71.

Die Gleichung der ebenen krummen Linie giebt eine der beiden Veränderlichen x und y als Function der anderen. Nimmt man an, daſs der Werth von y als Function von x gegeben ist, so hat man

$$ds = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx,$$

und nennt man α und β die Werthe von x_1, die den beiden Endpunkten des Bogens l entsprechen, so hat man, statt der vorhergehenden Gleichungen,

$$\left.\begin{aligned} l &= \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx \\ l x_1 &= \int_\alpha^\beta x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx \\ l y_1 &= \int_\alpha^\beta y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ist die gegebene krumme Linie ein Kegelschnitt, so erhält man durch die gewöhnlichen Regeln die Werthe der Integrale, die in den zwei letzten Gleichungen (2) enthalten sind, unter endlicher Form. Bei der Parabel kann man auch den Werth des Integrals finden, welches die erste dieser Gleichungen enthält, so daſs die zwei Coordinaten des Schwerpunktes eines parabolischen Bogens immer durch Functionen der Abscissen α und β seiner Endpunkte ausgedrückt werden können. Nach einem Lehrsatze von Landen, kann man immer einen hyperbolischen Bogen vermittelst zweier elliptischer Bogen und eines algebraischen Theils ausdrücken. Was den elliptischen Bogen betrifft, so betrachtet man ihn als eine Function, die nicht auf andere einfachere Functionen zurückgeführt werden kann, und

Legendre hat sehr ausgedehnte Tafeln für diese Function berechnet, die ihre Zahlenwerthe mit einer grofsen Annäherung geben. Sind daher die Zahlenwerthe von α und β und die der Axen der Hyperbel oder der Ellipse gegeben, so wird es leicht seyn, die Werthe von l, und folglich auch die Coordinaten x_1 und y_1 des Schwerpunktes eines Bogens, der einer oder der anderen dieser krummen Linien angehört, zu berechnen.

72.

Ich nehme den Bogen der Cykloide als anderes Beispiel der Anwendung der Gleichungen (2). Bei dieser krummen Linie kann man die Länge, den Flächeninhalt, die Oberfläche und den Inhalt des Körpers, der durch ihre Umdrehung entsteht, und die Coordinaten ihrer Schwerpunkte genau bestimmen. Die Construction der Tangente an einem beliebigen Punkte dieser krummen Linie ist auch sehr einfach, ihre Evolute ist ebenfalls eine Cykloide, und aufserdem nähert sich, durch eine Reihe allmälicher Evolutionen, jede krumme Linie der Cykloide immer mehr und mehr und fällt zuletzt genau mit ihr zusammen, wenn die Evolutionen ins Unendliche fortgesetzt werden *). Auch findet man die Cykloide, wie man in der Folge sehen wird, wenn man die krumme Linie sucht, welche die merkwürdigsten Eigenschaften, in Beziehung auf krummlinige Bewegung schwerer Körper, besitzt. Dieses merkwürdige Zusammentreffen einer grofsen Anzahl auffallender Eigenschaften von ganz verschiedener Art bei derselben krummen Linie, macht ihre Betrachtung sehr nützlich und sie kommt daher häufig in der Geometrie und der Mechanik vor. Ihre Gleichung erhält man auf folgende Weise:

Die Cykloide ist eine ebene krumme Linie ACB (Fig. 24), die durch einen bestimmten Punkt M des Umrings eines Kreises erzeugt wird, während sich dieser, ohne zu gleiten, auf einer geraden Linie AB fortwälzt. Ist der erzeugende Punkt zuerst im Punkte A, und kommt er alsdann nach dem Punkte B dieser geraden Linie, so ist der Zwischenraum AB dem Umringe des gegebenen Kreises gleich. Auch sieht man, dafs

*) Journal de l'Ecole polyt. cah. 18. pag. 431.

sein Durchmesser der senkrechten Linie CD gleich ist, die von der Spitze C der Cykloide auf AB gefällt wird, und die krumme Linie in zwei symmetrische Theile theilt. Nennt man c den Halbmesser des gegebenen Kreises, so hat man also

$$AB = 2\pi c, \quad CD = 2c.$$

In irgend einer Lage des Kreises, sey HG sein Durchmesser, der auf der Basis AB senkrecht steht, und H der Punkt, in welchem er diese gerade Linie berührt. Vom Punkte M fälle man die senkrechten Linien MP und MK auf AB und GH, und setze

$$AP = p, \quad MP = q,$$

so hat man

$$AH = AP + MK = p + \sqrt{2cq - q^2}$$

$$\text{arc } MH = c \,.\, \text{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{2cq - q^2}}{c}\right)$$

Da sich aber der erzeugende Kreis dreht, ohne auf der geraden Linie AB zu gleiten, so folgt daraus, daſs man immer hat

$$AH = \text{arc } MH,$$

die verlangte Gleichung ist daher

$$p + \sqrt{2cq - q^2} = c \,.\, \text{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{2cq - q^2}}{c}\right)$$

wo p und q die unbestimmten Coordinaten bedeuten.

Differentiiert man, so hat man

$$dp = \frac{q\,dq}{\sqrt{2cq - q^2}},$$

als ihre Differentialgleichung. Man schlieſst hieraus, daſs die beiden Sehnen MG und MH des erzeugenden Kreises die Tangente und Normale der Cykloide sind, die dem Punkte M entsprechen. Bestimmt man durch die bekannte Formel ihren Krümmungskreis an demselben Punkte, so findet man, daſs er das Zweifache von MH ist; woraus hervorgeht, daſs, wenn man MH um eine Gröſse HN verlängert, die MH gleich ist, alsdann der Punkt N der Mittelpunkt des Krümmungskreises seyn wird. Ist ferner die Linie CDE das Doppelte von CD, so ist der Punkt E der Mittelpunkt des Krümmungskreises, der der Spitze C entspricht, und hieraus kann

man leicht den Schlufs ziehen, dafs die Evolute ANE der halben Cykloide AMC dieselbe krumme Linie ist, nur in umgekehrter Lage, so dafs die Spitze C in A liegt und der Anfangspunkt A in E. Hieraus folgt, dafs die Länge von ANE oder von AMC der geraden Linie CDE gleich ist, und dafs daher die Länge der ganzen Cykloide dem Vierfachen ihres erzeugenden Kreises gleich ist.

(des Durchmessers)

73.

In Rücksicht auf die Anwendungen, die wir von dieser Gleichung machen werden, wird es bequemer seyn, den Anfangspunkt der Coordinaten in die Spitze C zu verlegen (Fig. 25). Ich nehme als Axen der x und der y die geraden Linien Cx und Cy, die auf der Basis AB bezüglich senkrecht stehen und ihr parallel sind. Fällt man von einem beliebigen Punkte M eine senkrechte Linie MP auf Cx, so hat man daher

$$CP = x, \quad MP = y,$$

und vergleicht man diese Coordinaten mit den vorhergehenden und nennt man a den Durchmesser CD des erzeugenden Kreises, so sieht man, dafs

$$p = \tfrac{1}{2}\pi a - y, \quad q = a - x.$$

Substituiert man daher diese Werthe in die Differentialgleichung der Cykloide und setzt zugleich a an die Stelle von $2c$, so hat man

$$dy = \frac{(a - x)\, dx}{\sqrt{ax - x^2}} \qquad (a)$$

hieraus folgt

$$ds = \sqrt{\frac{a}{x}} \,.\, dx.$$

Nimmt man das Integral auf die Weise, dafs es verschwindet, wenn $x = o$ wird, so hat man

$$s = 2\sqrt{ax}$$

für die Länge des Bogens CM, dessen Anfangspunkt in der Spitze C liegt. Im Punkte A hat man auch $x = a$, was, wie das Vorhergehende, $2a$ als Länge der halben Cykloide CMA giebt. Man bemerke, dafs

$$s^2 = 4\,ax$$

eine Gleichung der Cykloide ist, die Aehnlichkeit mit der Gleichung der Parabel hat, von welcher sie sich nur dadurch unterscheidet, daſs statt der Ordinate y der Bogen s gesetzt ist.

Wendet man die beiden letzteren Gleichungen (2) auf den Schwerpunkt des Bogens CM an, so hat man

$$s x_1 = \int x \sqrt{\frac{a}{x}} . dx, \quad s y_1 = \int y \sqrt{\frac{a}{x}} dx,$$

wo man die Integrale auf die Weise nehmen kann, daſs sie mit x verschwinden. Setzt man statt s seinen Werth, so erhält man

$$2 x_1 \sqrt{x} = \int \sqrt{x} dx, \quad 2 y_1 \sqrt{x} = \int \frac{y dx}{\sqrt{x}}.$$

Man hat daher

$$x_1 = \tfrac{1}{3} x,$$

woraus man den Schluſs ziehen kann, daſs der Schwerpunkt eines Bogens $M'CM$, der auf beiden Seiten der Spitze C, die in der geraden Linie CD liegt, symmetrisch liegt, sich am Ende des dritten Theils von CP, vom Punkte C aus gerechnet, befindet.

Integriert man theilweise, so hat man

$$\int \frac{y dx}{\sqrt{x}} = 2 y \sqrt{x} - 2 \int \sqrt{x} . dy.$$

Substituiert man statt dy seinen Werth, der durch die Gleichung (a) gegeben ist, so hat man daher

$$y_1 \sqrt{x} = y \sqrt{x} - \int \sqrt{a - x} . dx,$$

und folglich

$$y_1 = y + \frac{2}{3\sqrt{x}} \left[(a - x)^{\frac{3}{2}} - a \sqrt{a} \right].$$

Dies, verbunden mit dem Werthe von x_1, bestimmt vollständig den Schwerpunkt des Bogens CM. Im Falle der halben Cykloide hat man

$$x = a, \quad y = \tfrac{1}{2} \pi a,$$

und hieraus folgt

$$x_1 = \tfrac{1}{3} a, \quad y_1 = a \left(\tfrac{1}{2} \pi - \tfrac{2}{3} \right).$$

74.

Dreht sich eine ebene krumme Linie um eine gerade, die in ihrer Ebene enthalten ist, und die ich für die Abscissen-

axe nehme, so erzeugt sie eine Rotationsfläche, deren Gröfse man aus der Länge dieser krummen Linie und der Ordinate ihres Schwerpunktes ableiten kann.

Um dies zu beweisen, seyen x und y die Abscisse und Ordinate eines beliebigen Punktes M dieser krummen Linie, und s der Bogen CM, der sich in diesem Punkte endigt und von einem festen Punkte E aus genommen wird; das Element ds erzeugt alsdann die Oberfläche eines unvollkommenen Kegels, und die Mitte desselben beschreibt einen Kreis, der $2\pi(y + \frac{1}{2}dy)$, oder einfacher $2\pi y$ gleich ist, da dy unendlich klein ist. Nach der bekannten Regel ist also $2\pi y ds$ das Element dieser Oberfläche. Nennt man daher s_0 und s_1 die Werthe von s, die den beiden Endpunkten der erzeugenden krummen Linie entsprechen, und S die erzeugte Oberfläche, so hat man, nach dem Lehrsatze des §. 13,

$$S = 2\pi \int_{s_0}^{s_1} y ds.$$

Man bemerke, dafs dieser Ausdruck voraussetzt, dafs die erzeugende krumme Linie nicht durch die Axe der x geschnitten wird, da im entgegengesetzten Falle ihre auf beiden Seiten dieser Axe liegenden Theile zwei verschiedene Oberflächen beschreiben würden, deren Unterschied S seyn würde. Mit dieser Einschränkung besteht dieser Ausdruck auch dann noch, wenn die erzeugende krumme Linie ein geschlossener Zug ist, und um ihn auf diesen Fall anzuwenden, ist es hinreichend, statt s_1 den Bogen s_0 zu nehmen, und den ganzen Umring dieser krummen Linie hinzu zu addieren.

Dies vorausgesetzt, vergleicht man nun diese Formel mit der dritten Gleichung (2), so findet man daraus

$$S = 2\pi l y_1,$$

woraus hervorgeht, dafs die erzeugte Oberfläche S der Länge l der erzeugenden krummen Linie, multipliciert mit dem Umringe $2\pi y_1$, den sein Schwerpunkt beschreibt, gleich ist.

Dieser Lehrsatz dient dazu, den Werth von S zu bestimmen, sobald der Schwerpunkt der erzeugenden krummen Linie ohne weitere Rechnung, und, so zu sagen, durch die blofse Anschauung der krummen Linie, bekannt ist. Er würde aber zu Nichts dienen, wenn man die Ordinate y_1 berechnen müfste,

weil man sonst gleich S berechnen könnte. Setzt man z. B. voraus, daſs die erzeugende krumme Linie ein Kreis sey, bezeichnet durch a seinen Halbmesser, durch c den Abstand seines Mittelpunktes von der Drehungsaxe, und setzt voraus, daſs c nicht kleiner als a ist, so hat man

$$l = 2\pi a, \quad y_1 = c,$$

und folglich

$$S = 4\pi^2 a c.$$

Berührt der Kreis die Drehungsaxe, so hat man $c = a$ und die erzeugte Oberfläche ist dem Quadrate gleich, dessen Seiten dem Umringe $2\pi a$ des erzeugenden Kreises gleich ist.

II. Schwerpunkte der Oberflächen.

75.

Seyen noch immer x, y, z die Coordinaten eines Punktes M, und x_1, y_1, z_1 die des Schwerpunktes, den man bestimmen will. Ich betrachte z als eine gegebene Function von x und y, und setze

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q.$$

Ferner nenne ich ω das Element der gegebenen Oberfläche, das dem Punkte M entspricht, so hat man (§. 21)

$$\omega = dx.dy.\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

In welchem Punkte von ω sich auch der Schwerpunkt dieses Elementes befinden mag, immer werden seine Coordinaten nur unendlich wenig von x, y, z verschieden seyn. Man kann daher

$$\omega x, \quad \omega y, \quad \omega z$$

als die Momente von ω in Beziehung auf die drei Coordinatenebenen ansehen, und es folgt daraus (§. 13 und 65)

$$\lambda = \iint \omega, \quad \lambda x_1 = \iint x\omega, \quad \lambda y_1 = \iint y\omega, \quad \lambda z_1 = \iint z\omega,$$

wo λ den Flächeninhalt des Theils der Oberfläche bedeutet, dessen Schwerpunkt man finden will, und die doppelten Integrale sich auf alle Elemente von λ erstrecken.

Ist die Oberfläche eine ebene, und nimmt man ihre Ebene für die der x und y, so sind die Gröſsen p und q Null, und man hat nur die drei Gleichungen

$$\lambda = \iint dx\,dy, \quad \lambda x_1 = \iint x\,dx\,dy, \quad \lambda y_1 = \int y\,dx\,dy.$$

Man nehme an, es sey alsdann λ durch die krummen Linien ABC (Fig. 26) begränzt, so werden jeder Abscisse x oder OP zwei Ordinaten PM und PN entsprechen, die ich durch y und y' bezeichne, und die, in Functionen von x ausgedrückt, durch die Gleichung dieser krummen Linie gegeben sind. Seyen auch α und β die Abscissen OD und OE der Punkte A und B, wo die Tangenten den Ordinaten parallel sind. Die Integrale müssen zuerst von $y = PN$ bis zu $y = PM$ und alsdann von $x = \alpha$ bis zu $x = \beta$ genommen werden. Dies giebt

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \int_\alpha^\beta (y - y')\,dx, \\ \lambda x_1 &= \int_\alpha^\beta (y - y')\,x\,dx \\ \lambda y_1 &= \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta (y^2 - y'^2)\,dx \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ist die Fläche λ nicht durch eine geschlossene krumme Linie ABC begränzt, sondern zwischen zwei verschiedenen krummen und zwei geraden Linien, die der Axe Oy der Ordinaten parallel sind, enthalten, so kann man aus der Gleichung der oberen krummen Linie den Werth von y, und aus der Gleichung der unteren krummen Linie den Werth von y' finden, und für α und β die Abstände dieser beiden Parallelen vom Punkte O nehmen. In dem gewöhnlichsten Falle wird die untere krumme Linie durch die Axe Ox der Abscissen ersetzt werden; man hat also $y' = o$ und

$$\lambda = \int_\alpha^\beta y\,dx, \quad \lambda x_1 = \int_\alpha^\beta y\,x\,dx, \quad \lambda y_1 = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta y^2\,dx, \quad (2)$$

wodurch die Fläche und der Schwerpunkt eines Theils einer ebenen Oberfläche bestimmt wird, der zwischen einer gegebenen krummen Linie, der Abscissenaxe und zweien Ordinaten dieser krummen Linie enthalten ist.

Man bemerke auch, dafs man die Gleichungen (1) auf folgende Weise direct finden kann:

Ich theile die Fläche ABC in Elemente, so wie $MNN'M'$, die unendlich klein und der Axe Oy parallel sind. Ich nenne

u die Länge der geraden Linie MN. Zieht man nun Linien durch die beiden Endpunkte M und N, die der Axe Ox parallel sind, so wird man das Element $MNN'M'$ um unendlich kleine Dreiecke der zweiten Ordnung vermehren oder vermindern, die seine Gröfse nicht verändern werden; dieses Element ist daher gleich udx. Bezeichnet man durch v den Abstand der Mitte von MN von der Axe Ox, so wird man x und v für die zwei Coordinaten des Schwerpunktes dieses Elements nehmen können, denn es ist offenbar, dafs sie von denselben nur um unendlich kleine Gröfsen verschieden seyn können. Nach den früheren Bezeichnungen hat man daher

$$\lambda = \int_\alpha^\beta udx, \quad \lambda x_1 = \int_\alpha^\beta xudx, \quad \lambda y_1 = \int_\alpha^\beta vudx. \quad (3)$$

Da aufserdem y und y' die Ordinaten PM und PN bedeuten, die einer und derselben beliebigen Abscisse entsprechen, so hat man auch

$$u = y - y', \quad v = \tfrac{1}{2}(y + y'),$$

wodurch diese letzteren Formeln mit den Gleichungen (1) zusammen fallen.

76.

Als erstes Beispiel nehme ich an, dafs man den Schwerpunkt des Dreiecks ABC (Fig. 27) sucht.

Ich lege den Anfangspunkt der Coordinaten in die Spitze C, und nehme die Axe der x senkrecht auf die Grundlinie AB, ich bezeichne diese Grundlinie durch b und die Höhe CD durch h. Durch einen beliebigen Punkt P, der zur Linie CD gehört, ziehe ich MN senkrecht auf diese Linie, CP und MN werden die Veränderlichen x und u seyn, und man hat die Proportion

$$u : x = b : h,$$

woraus man findet

$$u = \frac{bx}{h}.$$

Aufserdem hat man $\alpha = o$ und $\beta = h$. Vermittelst dieser Werthe geben die zwei ersten Gleichungen (3)

$$\lambda = \tfrac{1}{2}bh, \quad \lambda x_1 = \tfrac{1}{3}bh^2,$$

und hieraus findet man

$$x_1 = \tfrac{2}{3}h.$$

Den Werth von y braucht man nicht zu berechnen, denn wenn E die Mitte von AB ist, und man die gerade Linie CE zieht, so schneidet sie alle Elemente des Dreiecks, die mit AB parallel sind, in zwei gleiche Theile und enthält daher seinen Schwerpunkt. Nimmt man daher auf CD einen Theil

$$CF = \tfrac{2}{3}\, CD = x_1,$$

und errichtet die gerade Linie FG senkrecht auf CD, so ist der Punkt G, in welchem sie CE trifft, der Schwerpunkt des Dreiecks. Da die gerade Linie FG die Linien CD und CE in proportionale Theile theilt, so hat man auch

$$CG = \tfrac{2}{3}\, CE,$$

woraus hervorgeht, daſs der Schwerpunkt eines Dreiecks auf der geraden Linie liegt, die seine Spitze mit der Mitte der Grundlinie verbindet, und zwar zwei Drittel dieser geraden Linie von der Spitze, oder ein Drittel von der Grundlinie entfernt.

77.

Man kann diesen Lehrsatz auch ohne Hülfe der Integralrechnung beweisen. Zerlegt man nemlich das Dreieck ABC (Fig. 28) in Elemente, die der Seite AB parallel sind, so kann man beweisen, daſs sein Schwerpunkt auf der geraden Linie CD liegt, die die Spitze C mit der Mitte D dieser Seite verbindet. Zerlegt man es alsdann in Elemente, die der Seite CA parallel sind, so beweist man auf dieselbe Weise, daſs sein Schwerpunkt auf der geraden Linie BE liegt, die von der Spitze B nach der Mitte E von CA geht; dieser Punkt liegt daher im Durchschnitte G der beiden geraden Linien CD und BE. Zieht man aber die gerade Linie DE, so ist diese CB parallel, weil sie CA und AB in proportionale Theile theilt, und man hat

$$DE : CB = AD : AB = 1 : 2$$
$$DG : CG = DE : CB = 1 : 2,$$

so daſs DG die Hälfte von CG und daher der dritte Theil von CD ist, was zu beweisen war.

Man kann hieraus schlieſsen, daſs die drei geraden Linien, die von den Spitzen eines Dreiecks nach der Mitte der entgegengesetzten Seiten gezogen werden, sich in einem Punkte

schneiden müssen, was mit einem bekannten Lehrsatze übereinstimmt.

Wenn die Spitzen A, B, C des Dreiecks die Schwerpunkte dreier gleicher Massen sind, so fällt der Schwerpunkt dieser drei Körper mit dem des Dreiecks zusammen, denn der Schwerpunkt der zwei Massen, die A und B entsprechen, ist in der Mitte D der geraden Linie AB, und der Schwerpunkt dieser beiden Massen und der dritten ist der Punkt G der geraden Linie CD, so daſs GD die Hälfte von CG oder der dritte Theil von CD ist.

Hieraus und aus dem Lehrsatze des §. 67 folgt, daſs, wenn man an den Schwerpunkt G eines Dreiecks Kräfte anbringt, die der Gröſse und Richtung nach durch die geraden Linien GA, GB, GC vorgestellt werden, die von diesem Punkte nach den drei Spitzen gehen, diese Kräfte im Gleichgewichte seyn werden.

78.

Kennt man den Schwerpunkt eines Dreiecks, so kann man allmälich daraus den Werth eines Kreisausschnitts und eines Kreisabschnitts finden.

Sey $CADB$ der Kreisausschnitt und C der Mittelpunkt des Kreises. Betrachtet man den Bogen ADB als einen Theil eines Vielecks von unendlich vielen gleichen Seiten, so kann man den Kreisausschnitt in gleiche dreieckige Elemente zerlegen, die alle diese Seiten als Grundlinien haben, und deren gemeinschaftliche Spitze im Punkte C ist. Man kann alsdann die Kraft, die auf jedes dieser Elemente wirkt, in seinem Schwerpunkte anbringen, und da der Abstand eines jeden dieser Schwerpunkte vom Punkte C zwei Drittel des Halbmessers des Kreises beträgt, so ergiebt sich hieraus ein System von parallelen und gleichen Kräften, die an alle Elemente des Bogens $A'D'B'$, der von dem Punkte C als Mittelpunkt und mit einem Halbmesser, der gleich $\frac{2}{3}CD$ ist, beschrieben ist, angebracht sind. Der Schwerpunkt des Ausschnitts ist daher der Mittelpunkt dieser parallelen Kräfte, d. h. der Schwerpunkt des Bogens $A'D'B'$. Bezeichnet man aber durch a, l, c, den Halbmesser D, den Bogen ADB und die Sehne AB, so werden die entsprechenden Gröſsen, in Beziehung auf $A'D'B'$, $\frac{2}{3}a$, $\frac{2}{3}l$, $\frac{2}{3}c$ seyn. Ist daher G der gesuchte Schwer-

punkt, und setzt man $CG = x$, so hat man, nach dem Lehrsatze des §. 70,

$$x = \frac{2\,ac}{3\,l}.$$

Seyen nun S, S', S_1 die Oberflächen des Ausschnitts $CADB$, des Dreiecks CAB und des Ausschnitts $ADBE$, ferner nenne man G, G', G_1 ihre Schwerpunkte, die offenbar auf dem Halbmesser CD liegen werden, der bis zur Mitte D des Bogens ADB geht. Bezeichnet man nun durch x, x', x_1 die Abstände dieser drei Punkte vom Mittelpunkte C, und bringt man an diese Kräfte an, die S, S', S_1 parallel und proportional sind, so ist die erste die Mittelkraft der beiden anderen, und betrachtet man die Momente dieser Kräfte, so hat man daher

$$Sx = S'x' + S_1 x_1.$$

Außerdem hat man

$$S = \tfrac{1}{2}\,al, \quad x = \frac{2\,ac}{3\,l}.$$

Nennt man nun h die Höhe CE des Dreiecks, dessen Grundlinie AB oder c ist, so hat man auch

$$S' = \tfrac{1}{2}\,ch, \quad x' = \tfrac{2}{3}\,h.$$

Da nun

$$S_1 = S' - S = \tfrac{1}{2}\,(al - ch),$$

so wird die Gleichung der Momente

$$\tfrac{1}{3}\,a^2 c = \tfrac{1}{3}\,ch^2 + \tfrac{1}{2}\,(al - ch)\,x_1,$$

und sie giebt den Abstand x_1 des Schwerpunktes des Ausschnittes $ADBE$ vom Mittelpunkte des Kreises an.

Bemerkt man, daſs

$$c = 2\,a \sin \frac{l}{2\,a}, \quad h = a . \cos \frac{l}{2\,a},$$

so erhält man hieraus

$$x_1 = \frac{4\,a^2 \sin^3 \dfrac{l}{2\,a}}{3\left(l - a . \sin \dfrac{l}{a}\right)}.$$

Ist der Bogen l der halbe Umkreis, so hat man $l = \pi a$; alsdann fallen der Ausschnitt und der Abschnitt zusammen, so wie die Abstände x und x_1, deren gemeinschaftlicher Werth

$$x = x_1 = \frac{4\,a}{3\,\pi}$$

ist.

79.

Nimmt man allmälich die drei Kegelschnitte für die krumme Linie, welcher die Formeln (2) entsprechen, so kann man die Integrationen nach den bekannten Regeln ausführen, und die Werthe der beiden Coordinaten x_1, y_1, des Schwerpunktes, unter endlicher Form erhalten. Ich deute dieses Beispiel als Uebung in der Berechnung an, und gehe unmittelbar zur Bestimmung des Schwerpunktes des Inhalts der Cykloide über.

Sey CPM das Stück, dessen Schwerpunkt man finden will; bezeichnet man durch x und y die Abscisse CP und die Ordinate PM, wie in der Gleichung (a) des §. 73, so müssen die Integrale, die in den Formeln (2) enthalten sind, verschwinden, wenn $x = o$, und integriert man theilweise, so werden diese Formeln

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= xy - \int x dy \\ \lambda x_1 &= \tfrac{1}{2} x^2 y - \tfrac{1}{2}\int x^2 dy \\ \lambda y_1 &= \tfrac{1}{2} x y^2 - \int x y dy \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

und die neuen Integrale verschwinden ebenfalls zu gleicher Zeit mit x.

In Folge der Gleichung (a) hat man

$$\int x dy = \int \sqrt{ax - x^2}\, dx,$$

ist aber N der Punkt, wo die Ordinate PM den Kreis trifft, der über CD als Durchmesser beschrieben ist, so drückt dieses letzte Integral den halben Kreisausschnitt CNP aus; wenn man daher, der Kürze halber, durch γ den Inhalt dieses halben Ausschnittes bezeichnet, so hat man

$$\lambda = xy - \gamma.$$

In dem Falle, wenn der Punkt M mit dem Punkte A zusammen fällt, hat man

$$x = CD = a, \quad y = DA = \tfrac{1}{2}\pi a, \quad \gamma = \tfrac{1}{8}\pi a^2,$$

und folglich

$$\lambda = \tfrac{3}{8}\pi a^2.$$

Die Fläche CAD der halben Cykloide ist daher das Dreifache der des halben Kreises CND, dessen Halbmesser $\frac{1}{2}a$ ist, oder, mit anderen Worten, die Fläche der ganzen Cykloide ist das Dreifache der des erzeugenden Kreises.

Man hat auch

$$\int x^2 dy = \int x \sqrt{ax - x^2}.dx,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\int x^2 dy = \tfrac{1}{2}a\int\sqrt{ax - x^2}\,dx - \int(\tfrac{1}{2}a - x)\sqrt{ax - x^2}\,dx.$$

Das letzte Integral erhält man unmittelbar, und da es verschwinden muſs, wenn $x = o$ ist, so hat man

$$\lambda x_1 = \tfrac{1}{2}x^2 y - \tfrac{1}{4}a\gamma + \tfrac{1}{6}(ax - x^2)^{\frac{3}{2}},$$

welche Gleichung den Werth von x_1 angiebt, wenn der Werth von λ bekannt ist.

Für den Fall der halben Cykloide CAD, wo man zu gleicher Zeit

$$x = a,\quad y = \tfrac{1}{2}\pi a,\quad \gamma = \tfrac{1}{8}\pi a^2,\quad \lambda = \tfrac{3}{8}\pi a^2$$

hat, findet man daraus

$$x_1 = \frac{7a}{12}$$

als Abstand ihres Schwerpunktes von der Axe Cy.

Man findet also den Schwerpunkt der ganzen Fläche der Cykloide, wenn man den Punkt nimmt, der um $\frac{7}{12}$ der Höhe CD vom Punkte C absteht.

Es ist noch übrig, die Ordinate y_1 in Beziehung auf ein beliebiges Stück CMP zu bestimmen, was eine verwickeltere Rechnung erfordert.

80.

In Folge der Gleichung (a) hat man

$$\int xy dy = \int y \sqrt{ax - x^2}\,dx,$$

und man kann den Werth von y auf folgende Weise schreiben:

$$y = \int\frac{(\tfrac{1}{2}a - x)\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} + \frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}}.$$

Setzt man daher für den Augenblick

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = z,$$

und nimmt man an, daſs dieses Integral, wie alle übrigen, Null wird, wenn $x = o$ ist, so hat man

$$y = \sqrt{ax - x^2} + \tfrac{1}{2}az,$$

und hieraus ergiebt sich

$$\int xydy = \tfrac{1}{2}ax^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}a\int z\sqrt{ax-x^2}\,dx. \quad (5)$$

Da

$$y = \int \sqrt{ax-x^2}\,dx$$

ist, so hat man, wenn man theilweise integriert,

$$\int z\sqrt{ax-x^2}\,dx = zy - \int ydz. \quad (6)$$

Man kann auch den Werth von y unter folgender Form schreiben:

$$y = \tfrac{1}{4}a^2\int\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} - \int\frac{(\frac{1}{2}a-x)^2dx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

und integriert man in dem zweiten Gliede theilweise, so hat man

$$y = \tfrac{1}{4}a^2\int\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} - (\tfrac{1}{2}a-x)\sqrt{ax-x^2} - \int\sqrt{ax-x^2}\,dx$$

woraus alsdann folgt

$$y = \tfrac{1}{8}a^2z - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}a-x)\sqrt{ax-x^2}.$$

Da $\sqrt{ax-x^2}\,.\,dz = dx$ ist, so hat man also

$$\int ydz = \tfrac{1}{16}a^2z^2 - \tfrac{1}{4}(ax-x^2).$$

Ich substituiere diese Werthe von y und $\int ydz$ in die Gleichung (6), so ergiebt sich

$$\int z\sqrt{ax-x^2}\,dx = \tfrac{1}{16}a^2z^2 - \tfrac{z}{2}(\tfrac{1}{2}a-x)\sqrt{ax-x^2} + \tfrac{1}{4}(ax-x^2)$$

was die Gleichung (5) in folgende verwandelt:

$$\int xydy = \tfrac{1}{8}a^2x + \tfrac{3}{8}ax^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{32}a^3z^2 - \tfrac{1}{4}az(\tfrac{1}{2}a-x)\sqrt{ax-x^2} \quad (7)$$

Vermittelst dieses Werthes und des Werthes von z, nemlich

$$z = \text{arc}\left(\cos = \frac{a-2x}{a}\right)$$

entfernt man aus der Gleichung (4) alles Unbekannte, und findet so den Werth von y_1 für irgend ein Stück CMP.

Im Falle der halben Cykloide CAD hat man

$$x = a, \quad z = \text{arc}(\cos = -1) = \pi,$$

die Formel (7) reduciert sich alsdann auf

$$\int xydy = a^3\left(\frac{1}{6} + \frac{\pi^2}{32}\right)$$

und da

$$y = \tfrac{1}{2}\pi a, \quad \lambda = \tfrac{3}{8}\pi a^2,$$

so giebt die dritte Gleichung (4)

$$y_1 = \frac{\pi a}{\lambda}\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{9\pi^2}\right).$$

Hieraus, in Verbindung mit dem Werthe von x_1 im vorhergehenden Paragraphen, bestimmt sich die Lage des Schwerpunktes vollkommen.

81.

Sey S die Fläche eines Theils einer Rotationsoberfläche, der zwischen zwei Ebenen enthalten ist, die auf der Axe seiner Figur senkrecht stehen. Diese Axe enthält den Schwerpunkt von S, ich nehme sie für die Axe der x, und bezeichne durch x_1 den Abstand dieses Schwerpunktes vom Anfangspunkte der Coordinaten, und durch α und β die Abstände der zwei Ebenen, die S begränzen, von demselben Punkte. Die Bestimmung des Schwerpunktes dieses Theils reduciert sich also auf die Bestimmung des Werthes von x_1.

Ich zerlege S in Elemente, wovon jedes die Oberfläche eines unvollkommenen Kegels ist, der durch die unendlich kleine Seite der erzeugenden krummen Linie beschrieben wird, wie in §. 74; der Kegel, welcher dem Punkte M dieser krummen Linie, dessen Coordinaten x und y sind, entspricht, ist gleich $2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2}$, er hat seinen Schwerpunkt ebenfalls auf der Axe der x, und man kann x für den Abstand dieses Punktes von dem Anfangspunkte der Coordinaten nehmen, weil dieser Abstand nur um ein unendlich Kleines von x verschieden seyn kann. Hiernach hat man (§. 13 und 65)

$$\left.\begin{aligned} S &= 2\pi\int_\alpha^\beta y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,dx \\ Sx_1 &= 2\pi\int_\alpha^\beta xy\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,dx \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

indem man y als eine Function von x betrachtet, die durch die Gleichung der erzeugenden krummen Linie gegeben ist.

Wenn diese krumme Linie z. B. ein Kreisbogen ist, und man den Anfangspunkt der Coordinaten in seinen Mittelpunkt verlegt, indem man a seinen Halbmesser nennt, so hat man

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

und hieraus folgt

$$S = 2\pi a(\beta - \alpha)$$
$$Sx_1 = \pi a(\beta^2 - \alpha^2),$$

und folglich

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),$$

woraus hervorgeht, daſs der Schwerpunkt einer Kugelzone in der Mitte des Theils des Durchmessers liegt, der zwischen den zwei die Zone begränzenden Ebenen liegt und senkrecht auf diesen Ebenen steht.

82.

Die Cykloide wird uns zwei Beispiele der Anwendung der Formeln (8) an die Hand geben, indem man den Bogen CM (Fig. 25) sich einmal um die Axe Cx und dann um die Axe Cy drehen läſst.

Im ersten Falle hat man in Folge der Gleichung (a) des §. 73

$$S = 2\pi\sqrt{a}\int y\frac{dz}{\sqrt{x}}, \quad Sx_1 = 2\pi\sqrt{a}\int y\sqrt{x}\,dx,$$

wo die Integrale so genommen werden, daſs sie im Punkte C verschwinden, wo man $x = o$ hat. Integriert man theilweise, und berücksichtigt den Werth von dy, der durch dieselbe Gleichung (a) gegeben ist, so hat man

$$S = 4\pi y\sqrt{ax} - 4\pi\sqrt{a}\int\sqrt{a-x}\,dx$$
$$Sx_1 = \frac{4\pi}{3}yx\sqrt{ax} - \frac{4\pi}{3}\sqrt{a}\int x.\sqrt{a-x}\,dx$$

und folglich

$$S = 4\pi y\sqrt{ax} + \frac{8\pi}{3}\sqrt{a}(a-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{8\pi}{3}a^2$$

$$Sx_1 = \frac{4\pi}{3}yx\sqrt{ax} + \frac{8\pi}{9}x\sqrt{a}(a-x)^{\frac{3}{2}}$$
$$+ \frac{16\pi}{45}\sqrt{a}(a-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{16\pi}{45}a^3,$$

wodurch man den Werth der Oberfläche, die durch den Bogen CM erzeugt wird und gegen die Axe der Figur concav ist, und den Abstand ihres Schwerpunktes vom Punkte C erfährt. Ist dieser Bogen die halbe Cykloide CA, so hat man $x = a$ und $y = \frac{1}{2}\pi a$, und folglich

$$S = 2\pi a^2\left(\pi - \frac{4}{3}\right), \quad Sx_1 = \frac{2\pi a^3}{3}\left(\pi - \frac{8}{15}\right).$$

Im zweiten Falle mufs man, um die Gleichungen (a) des §. 73 noch ferner brauchen zu können, x und y in den Formeln (8) verwechseln, welche daher in

$$S = 2\pi \int x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx$$

$$Sy_1 = 2\pi \int xy \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx$$

übergehen, wo y_1 den Abstand des Schwerpunktes von S, der auf der geraden Linie Cy liegt, vom Punkte C bedeutet, und die Integrale im Punkte C, das heifst wenn $x = o$ ist, verschwinden. Nach der Gleichung (a) hat man

$$S = 2\pi \int x \sqrt{\frac{a}{x}}\, dx = \frac{4\pi}{3} x \sqrt{ax};$$

der Werth von Sy_1 ist daher derselbe, wie der Werth von Sx_1 im ersten Falle, und dividiert man ihn durch diesen Werth von S, so hat man den Abstand des Schwerpunktes der Oberfläche, die durch den Bogen CM erzeugt wird, und gegen die Axe der Figur convex ist, vom Punkte C. Ist dieser Bogen die halbe Cykloide CA, so ist die erzeugte Fläche gleich $4\pi a^2$, und zu gleicher Zeit ist der Werth des Abstandes y_1

$$y_1 = \frac{a}{2}\left(\pi - \frac{8}{15}\right).$$

Man kann hier bemerken, dafs, wenn ein und derselbe Kreisbogen sich nach einander um zwei Axen dreht, die auf einander senkrecht sind, und durch einen seiner Endpunkte gehen, der Werth des zweiten Gliedes der Gleichung (8) sich nicht ändert, und die Abstände der Schwerpunkte der beiden erzeugten Oberflächen von dem Endpunkte stehen daher im umgekehrten Verhältnisse des Inhalts dieser Oberflächen.

83.

Wenn die krumme Linie ABC (Fig. 26) sich um die Axe Ox dreht, die in der Ebene derselben enthalten ist, aber nicht durch dieselbe geht, so erzeugt ihre Oberfläche einen Rotationskörper, dessen Volumen, das ich durch V

bezeichnen werde, durch den Inhalt dieser Oberfläche und die Ordinate y_1 ihres Schwerpunktes ausgedrückt werden kann.

Behält man alle Bezeichnungen des §. 75 bei, so ist es leicht zu sehen, dafs man hat

$$V = \pi \int_\alpha^\beta (y^2 - y'^2)\,dx.$$

Denn der unendlich kleine Theil dieses Volumens, der durch das Element $MNN'M'$ der erzeugenden Fläche erzeugt wird, ist der Unterschied $\pi y^2 dx - \pi y'^2 dx$ der beiden Cylinder, deren Halbmesser PM und PN sind, und die dx als gemeinschaftliche Höhe haben. Denn man kann die unendlich kleinen Volumina der zweiten Ordnung, die durch die Dreiecke erzeugt werden, welche man von diesem Elemente abzieht, oder dazu addiert, indem man durch die Punkte M und N Linien, die mit der Axe Ox parallel sind, zieht, vernachlässigen. Vergleicht man diesen Ausdruck von V mit der dritten Formel (1) des erwähnten Paragraphen, so hat man

$$V = 2\,\pi\,\lambda\,y_1,$$

woraus hervorgeht, dafs das Volumen, welches durch die Fläche λ einer ebenen krummen Linie erzeugt wird, dieser Fläche, multipliciert mit dem Umringe $2\,\pi\,y_1$ des Kreises, welchen ihr Schwerpunkt beschreibt, gleich ist. Dieser Lehrsatz ist dem des §. 74 ähnlich, und dient dazu, den Inhalt V zu bestimmen, wenn der Schwerpunkt von λ a priori bekannt ist. Er besteht auch noch, wenn die erzeugende Oberfläche, statt von einer geschlossenen krummen Linie umgeben zu seyn, zwischen zwei verschiedenen krummen Linien und zwei Linien, die auf der Axe der Figur senkrecht stehen, enthalten ist, vorausgesetzt, dafs die Axe nicht zwischen den beiden krummen Linien durchgeht.

Wenn die erzeugende Fläche ein Halbkreis ist, der sich um seinen Durchmesser dreht, so ist der Abstand seines Schwerpunktes von dieser Drehungsaxe gleich $\frac{4a}{3\pi}$ (§. 78), indem man durch a seinen Halbmesser bezeichnet. Der Umring, der durch diesen Punkt beschrieben wird, hat daher die Länge $\frac{8a}{3}$, und da die Fläche des Halbkreises $\frac{1}{2}\pi a^2$ ist, so hat man

$$V = \frac{4\pi a^3}{3},$$

was auch wirklich der Inhalt der Kugel ist.

Man nehme nun ferner an, dafs die geschlossene krumme Linie eine Ellipse sey, und bezeichne durch a und b ihre beiden Halbaxen und durch c den Abstand ihres Mittelpunktes von der Drehungsaxe. Der Inhalt λ ist, wie bekannt, gleich πab, und sein Schwerpunkt ist offenbar der Mittelpunkt der Figur. Man hat also $y_1 = c$, und hieraus folgt

$$V = 2\pi^2 abc,$$

wie auch sonst die eine oder die andere Axe der Ellipse gegen die Drehungsaxe geneigt sey.

84.

Es ist einleuchtend, dafs das Stück eines Rotationskörpers, welches zwischen zwei Ebenen enthalten ist, die durch die Axe der Figur gehen, sich zum ganzen Körper verhält, wie der Winkel, den diese beiden Ebenen einschliefsen, sich zu vier Rechten verhält, oder was dasselbe ist, wie der Bogen, der zwischen den zwei Ebenen durch den Schwerpunkt der erzeugenden Fläche beschrieben wird, sich zum ganzen Umringe $2\pi y$ verhält. Nennt man daher l die Länge dieses Bogens und L das Volumen des Stückes, so hat man

$$L = l\lambda,$$

wo λ immerfort die erzeugende Fläche bedeutet, die, nach der Voraussetzung, nicht von der Drehungsaxe durchschnitten wird.

Diese Formel kann man auf folgende Weise auf andere Stücke ausdehnen, die nicht zu Rotationskörpern gehören.

Man nehme nemlich an, dafs eine ebene krumme Linie sich bewege, ohne zu gleiten oder sich in ihrer Ebene zu drehen, und zwar so, dafs diese Ebene beständig auf einer gegebenen Linie senkrecht stehe, die eine ebene krumme Linie, oder eine Linie doppelter Krümmung seyn kann. Bei dieser Bewegung bleibt derselbe Punkt dieser Ebene immer auf der Richtungslinie, und die anderen Punkte beschreiben krumme Linien, die dieser Linie ähnlich sind. Seyen λ, L, l die Fläche der erzeugenden krummen Linie, der körperliche

Inhalt, der durch diese Oberfläche erzeugt wird, und die Länge der krummen Linie, die durch ihren Schwerpunkt durchlaufen wird. Ist l ein Kreisbogen, so ist L ein Stück eines Rotationskörpers; in jedem Falle aber kann man l in unendlich kleine Theile theilen, von welchen jeder mit dem ihm entsprechenden Krümmungskreise zusammen fällt. Man bezeichne durch α einen dieser Theile und durch v den Inhalt des entsprechenden Stückes von L, und nehme an, daſs die Ebenen, die auf dessen Richtung senkrecht stehen und durch welche v begränzt wird, sich nach einer geraden Linie schneiden, die nicht innerhalb der Fläche der erzeugenden krummen Linie liegt. Dieses Element v von L ist ein Stück eines Rotationskörpers und nach der vorhergehenden Gleichung hat man

$$v = \alpha \lambda.$$

Nimmt man daher die Summe aller Werthe von v und bemerkt, daſs der Factor λ constant ist, so folgt daraus, daſs der Inhalt L dem Produkte von l und λ gleich ist, wie in dem Falle eines Rotationskörpers. Die Regel, welche diese Gleichung $L = \lambda l$ enthält, ist in der Ausübung nützlich und läſst sehr viele Anwendungen zu; jedoch darf man nicht vergessen, daſs sie nicht mehr statt hat, wenn die auf einander folgenden erzeugenden Linien sich auf der erzeugten Oberfläche schneiden und durch ihre auf einander folgenden Durchschnitte das bilden, was man eine Wendungskante (arète de rebroussement) nennt.

85.

Die Betrachtung des Schwerpunktes führt auch auf eine Regel, um den Inhalt eines Prisma oder eines Cylinders mit beliebiger Grundfläche zu berechnen, welche durch eine Ebene, die gegen diese Grundfläche geneigt ist, abgestumpft sind.

Sey γ die Fläche des Schnittes eines Cylinders, welcher senkrecht auf der erzeugenden Linie steht, λ die Fläche des geneigten Schnittes, der den Cylinder begränzt, ϑ der Winkel, den diese zwei Ebenen einschlieſsen, ω ein beliebiges Element von λ, ε seine Projection auf die Ebene von γ oder das entsprechende Element der Fläche γ, welche selbst die Projection von λ ist. Nach dem Lehrsatze des §. 10 hat man

$$\gamma = \lambda \cos \vartheta, \quad \varepsilon = \omega \cos \vartheta.$$

Dies vorausgesetzt nehme ich an, daſs λ die Oberfläche sey, auf welche sich die allgemeinen Formeln des §. 75 beziehen, und daſs ϑ die Neigung seiner Ebene gegen die der x und y sey. Ich multipliciere die dritte dieser Formeln durch $\cos\vartheta$ und bringe diesen constanten Factor unter das Zeichen $\int\int$, so hat man in Folge der Werthe von γ und ε

$$\gamma z_1 = \int\int z\,\varepsilon.$$

Dieses doppelte Integral ist der Inhalt des abgestumpften Cylinders, der zwischen den zwei Schnitten γ und λ enthalten und in unendlich dünne Streifen, die auf γ senkrecht sind, zerlegt ist, indem man jedoch voraussetzt, daſs diese beiden Schnitte sich nicht wechselseitig durchschneiden. Hieraus folgt also, daſs der abgestumpfte Cylinder einem geraden Cylinder gleich ist, der dieselbe Grundfläche γ hat, und dessen Höhe der Abstand z_1 des Schwerpunktes des geneigten Schnittes von dieser Grundfläche ist.

Dieser Lehrsatz ergiebt sich von selbst, in dem gewöhnlichen Falle, wenn die Grundfläche des Cylinders ein Kreis und der geneigte Schnitt eine Ellipse ist; denn legt man durch den Mittelpunkt dieser krummen Linie eine Ebene, die mit der Grundfläche parallel ist, so ändert sich der Inhalt des Cylinders nicht, weil das Stück, welches man wegnimmt, offenbar demjenigen gleich ist, welches man hinzu fügt.

Wenn sich die Flächen, die wir durch γ und λ bezeichnet haben, wechselseitig schneiden, so besteht der Inhalt aus zwei Theilen, und das Integral $\int\int z\,\varepsilon$ drückt den Unterschied und nicht die Summe derselben aus. Wenn der Cylinder durch zwei geneigte Schnitte begränzt wird, deren Flächen sich nicht durchschneiden, so kann man ihn immer in zwei Theile theilen, deren gemeinschaftliche Grundlinie, die auf der erzeugenden Linie senkrecht steht, weder den einen noch den anderen dieser Schnitte durchschneiden wird, und bemerkt man, daſs ihre Schwerpunkte auf einer und derselben geraden Linie liegen müssen, die auf dieser Grundfläche senkrecht steht, so sieht man, daſs der ganze Inhalt gleich ist der Fläche dieser Grundlinie, multipliciert durch den Abstand dieser beiden Punkte.

III. Schwerpunkte der Volumina und der Körper.

86.

Die Bestimmung des Schwerpunktes eines Volumens hängt im Allgemeinen von mehreren dreifachen Integralen ab; es giebt aber Körper, für welche sich die Lage dieses Punktes durch einfache Integrale bestimmen läfst. Diese Körper werden wir zuerst betrachten.

Der Schwerpunkt einer Pyramide oder eines Kegels mit beliebiger Grundfläche liegt auf der geraden Linie, die von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Grundfläche geht. Denn diese gerade Linie trifft alle Schnitte, die mit der Grundfläche parallel sind, in ähnlich liegenden Punkten, die ihre Schwerpunkte sind und die man für die Schwerpunkte der Elemente des Körpers nehmen kann, die unendlich dünn und der Grundfläche parallel sind. Die gerade Linie, von der die Rede ist, enthält also den Schwerpunkt der Pyramide oder des Kegels, und es mufs nur noch seine Lage auf dieser Linie bestimmt werden.

Seyen b und X die Fläche der Grundlinie und eines parallelen Schnittes. Man bezeichne durch h und x die senkrechten Linien, die von der Spitze auf ihre Ebenen gefällt werden, so hat man, wie bekannt,

$$X : b = x^2 : h^2,$$

und folglich

$$X = \frac{b x^2}{h^2}.$$

Aufserdem kann man $X dx$ für das Element des Volumens des Kegels oder der Pyramide nehmen, und wenn man V sein ganzes Volumen und x_1 den Werth von x nennt, der dem Schnitte entspricht, welcher den Schwerpunkt enthält, so findet man daraus, wie in den vorhergehenden Fällen,

$$V = \int_0^h X dx, \quad V x_1 = \int_0^h x X dx.$$

Substituiert man den Werth von X und führt die Integrationen aus, so hat man

$$V = \frac{bh}{3}, \quad V x_1 = \frac{bh^2}{4},$$

woraus man findet

$$x_1 = \frac{3}{4} h.$$

Zieht man aber durch den Schwerpunkt eine Ebene, die mit der Grundfläche parallel ist, so schneidet diese die Höhe h und die gerade Linie, die von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Grundfläche geht, in proportionale Theile. Hieraus folgt, daſs der Schwerpunkt eines Kegels oder einer Pyramide mit beliebiger Grundfläche um drei Viertel dieser geraden Linie von der Spitze oder um ein Viertel von der Grundfläche absteht.

87.

In Beziehung auf die dreiseitige Pyramide kann man diesen Lehrsatz ohne Hülfe der Integralrechnung beweisen.

Sey $ABCD$ (Fig. 30) diese Pyramide. Seyen auch E und F die Schwerpunkte der Flächen ACD und BCD. Man ziehe die geraden Linien BF und AE, deren Verlängerungen sich in der Mitte H der Kante CD treffen. Alsdann ziehe man in der Ebene AHB die geraden Linien AF und BE, die sich in einem gewissen Punkte G schneiden werden. Ich behaupte, daſs dieser Punkt der Schwerpunkt der Pyramide $ABCD$ seyn wird. Denn zerlegt man diese in Elemente, die der Grundfläche ACD parallel sind, so sieht man, wie in dem vorhergehenden Paragraphen, daſs ihr Schwerpunkt auf der geraden Linie BE liegen muſs, und wenn man sie in Elemente zerlegt, die BCD parallel sind, so sieht man auf dieselbe Weise, daſs dieser Punkt in der geraden Linie AF liegt. Die beiden geraden Linien AF und BE, die in einer Ebene liegen, müssen sich daher schneiden, und ihr Durchschnitt G wird der verlangte Schwerpunkt seyn.

Nun ist in dem Dreiecke ABH, die gerade Linie EF mit der Grundfläche AB parallel, weil sie die Seiten AH und BH in proportionale Theile theilt, das heiſst, in dem dritten Theile ihrer Länge, wenn man von dem Punkte H ausgeht. Man hat daher

$$FG : GA = EF : AB = EH : AH,$$

und folglich

$$FG : GA = 1 : 3,$$

so dafs FG der dritte Theil von GA oder der vierte Theil von AF ist, was zu beweisen war.

Man schliefst hieraus, dafs, wenn die vier Spitzen A, B, C, D der Pyramide die Schwerpunkte gleicher Massen sind, alsdann der Punkt G der Schwerpunkt dieser vier Massen ist. Denn der Punkt F ist der Schwerpunkt der drei Massen, die den Punkten B, C, D entsprechen (§. 77) und wenn GF der dritte Theil von GA ist, so ist der Punkt G der Schwerpunkt dieser drei Massen und der vierten.

Hieraus folgt (§. 67), dafs, wenn man im Schwerpunkte der dreiseitigen Pyramide Kräfte anbringt, die, der Gröfse und Richtung nach, durch gerade Linien vorgestellt werden, die von diesem Punkte nach den vier Spitzen gehen, alsdann diese vier Kräfte sich im Gleichgewicht halten werden

88.

Hat man den Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide bestimmt, so kann man daraus den einer Pyramide oder eines Kegels mit beliebiger Grundfläche unmittelbar ableiten, indem man diese Grundfläche in eine endliche oder unendliche Zahl von Dreiecken zerlegt. Der Schwerpunkt dieser Pyramide oder dieses Kegels mufs zu gleicher Zeit auf der geraden Linie liegen, die von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Grundfläche geht, und in der Ebene, die der Grundfläche parallel ist und alle Linien, die von der Spitze nach dieser Grundlinie gezogen werden, in dem Punkte, der um drei Viertel dieser Linien von der Spitze absteht, schneidet, was mit dem Resultate des §. 86 zusammen stimmt. Man kann hierdurch auch den Schwerpunkt eines Kugelausschnitts finden. Denn zerlegt man diesen Ausschnitt in eine unendliche Anzahl von Pyramiden, deren gemeinschaftliche Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt und die die unendlich kleinen Elemente der Grundfläche des Ausschnitts zu Grundflächen haben, so liegen alle ihre Schwerpunkte auf der Grundfläche eines concentrischen Ausschnitts, dessen Halbmesser drei Viertel von dem des gegebenen Ausschnitts ist. Hieraus folgt, dafs der Schwerpunkt des gegebenen Ausschnittes derselbe ist, wie der der Grundfläche des concentrischen Ausschnittes, wodurch seine Lage bestimmt ist.

Man nehme an, dafs der Kugelausschnitt durch den Kreisausschnitt $CADB$ (Fig. 29) erzeugt werde, der sich um den Halbmesser CD dreht, welcher bis in die Mitte des Bogens AB geht; das Dreieck CAB und der Kreisabschnitt ADB werden zu gleicher Zeit einen Kegel und einen Kugelabschnitt erzeugen, und der Schwerpunkt dieses Kugelabschnitts wird sich aus dem des Kugelausschnitts und des Kegels bestimmen.

Zu diesem Ende nenne man V_1, V, V' die bezüglichen Volumina dieser drei Körper und x_1, x, x' die Abstände ihrer Schwerpunkte vom Punkte C, so hat man

$$V = V' + V_1, \quad Vx = V'x' + V_1 x_1. \qquad (a)$$

Sey a der Halbmesser CD, c die Sehne AB und f die Sagitte DE des Bogens ADB. In Beziehung auf den Kegel hat man

$$V' = \tfrac{1}{12}\pi c^2 (a-f), \quad x' = \tfrac{3}{4}(a-f).$$

Die Grundfläche des Kugelausschnitts ist gleich dem Produkte aus der Sagitte und dem Umringe eines gröfsten Kreises, oder gleich $2\pi a f$, und der Werth seines Volumens ist das Produkt aus dieser Grundfläche und $\frac{1}{3}a$, oder gleich $\frac{2\pi a^2 f}{3}$. Beschreibt man aus dem Punkte C als Mittelpunkt und mit einem Halbmesser, der gleich $\frac{3}{4}CD$ ist, einen Kreisbogen, wie $A'D'B'$, so liegt der Schwerpunkt der durch diesen Bogen erzeugten Oberfläche in der Mitte der Sagitte $D'E'$ (§. 81), oder, mit anderen Worten, in einem Abstande vom Punkte C, der gleich $CD' - \frac{1}{2}D'E'$ ist, das heifst, gleich $\frac{3}{4}(a - \frac{1}{2}f)$. Da also dieser Schwerpunkt, nach dem eben Gesagten, der Schwerpunkt des Kugelausschnitts V ist, so hat man

$$V = \frac{2\pi a^2 f}{3}, \quad z = \tfrac{3}{4}(a - \tfrac{1}{2}f).$$

Substituiert man diese verschiedenen Werthe in die Gleichungen (a), so hat man

$$\tfrac{2}{3}\pi a^2 f = \tfrac{1}{12}\pi c^2 (a-f) + V_1,$$
$$\tfrac{1}{2}\pi a^2 f (a - \tfrac{1}{2}f) = \tfrac{1}{16}\pi c^2 (a-f)^2 + V_1 x_1,$$

und hieraus findet man die Werthe von V_1 und x_1.

Nennt man l die Länge des Bogens AB, so hat man

$$c = 2a \sin\frac{l}{2a}, \quad f = a\left(1 - \cos\frac{l}{2a}\right),$$

und hieraus folgt

$$V_1 = \frac{2\pi a^3}{3}\left(1 - \cos\frac{l}{2a} - \tfrac{1}{2}\sin^2\frac{l}{2a}\,.\cos\frac{l}{2a}\right),$$

$$x_1 = \frac{3a\,.\sin^4\frac{l}{2a}}{8\left(1 - \cos\frac{l}{2a} - \tfrac{1}{2}\sin^2\frac{l}{2a}\cos\frac{l}{2a}\right)}.$$

Ist der Bogen l der halbe Umring, so hat man $l = \pi a$, und folglich

$$V_1 = \frac{2\pi a^3}{3}, \quad x_1 = \frac{3a}{8}.$$

89.

Man kann auch durch einfache Integrale das Volumen und den Schwerpunkt jedes Körpers, der in Beziehung auf eine Axe symmetrisch ist, wie z. B. eines Ellipsoids, bestimmen.

Seyen x, y, z die drei rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes der Oberfläche; man nehme die Axe der Figur für die der x, und bezeichne durch X die Fläche des Schnittes, der auf dieser geraden Linie senkrecht steht und dem Endpunkte der Abscisse x entspricht. Zerlegt man das Volumen in unendlich dünne Elemente, die auf der Axe der Figur senkrecht stehen, so kann man Xdx für das Volumen eines beliebigen Elementes nehmen und x für den Abstand seines Schwerpunktes vom Anfangspunkte der Coordinaten. Bezeichnet man daher durch V eine Schichte, die zwischen zwei Schnitten enthalten ist, die den gegebenen Abscissen α und β entsprechen, und durch x_1 den Abstand seines Schwerpunktes vom Anfangspunkte der Coordinaten, so hat man

$$V = \int_\alpha^\beta X dx, \quad V x_1 = \int_\alpha^\beta x X dx.$$

Im Falle eines Ellipsoids ist die Gleichung der Oberfläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

wo a, b, c die drei Halbaxen bezeichnen. Die Gleichungen des Schnittes X sind

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

man hat daher

$$X = \sqrt{bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$$

und folglich

$$V = \pi bc(\beta-\alpha)\left(1-\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3a^2}\right)$$

$$Vx_1 = \tfrac{1}{2}\pi bc(\beta^2-\alpha^2)\left(1-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2a^2}\right),$$

woraus man findet

$$x_1 = \frac{3(\alpha+\beta)(2a^2-\alpha^2-\beta^2)}{4(3a^2-\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)}.$$

Wendet man diese Formel auf den Kugelabschnitt an, den man im vorhergehenden Paragraphen betrachtet hat, so mufs man

$$\alpha = a\,.\cos\frac{l}{2a},\quad \beta = a$$

nehmen, und hieraus folgt

$$x_1 = \frac{3a\left(1+\cos\frac{l}{2a}\right)\sin^2\frac{l}{2a}}{4\left(1-\cos\frac{l}{2a}+\sin^2\frac{l}{2a}\right)}$$

und wenn man Zähler und Nenner dieses Bruches mit $1 - \cos\frac{l}{2a}$ multipliciert, so erkennt man, dafs er mit dem schon gefundenen Werthe von x_1 zusammen fällt.

Um den ganzen Werth des Ellipsoids zu haben, mufs man $\beta = a$ und $\alpha = -a$ setzen; dies giebt

$$V = \frac{4\pi abc}{3}.$$

Dieses Volumen ist auch durch das dreifache Integral $\int\int\int dx\,dy\,dz$ gegeben, wenn man es auf alle Elemente des Raumes ausdehnt, die durch die Oberfläche des Ellipsoids begränzt sind; setzt man aber

$$x = ax',\quad y = by',\quad z = cz',$$

so wird die Gleichung dieser Oberfläche

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

und das dreifache Integral geht in

$$abc \int\int\int dx'\, dy'\, dz'$$

über.

Dieses neue Integral muſs auf alle Elemente des Raumes ausgedehnt werden, der durch eine Oberfläche begränzt wird, die der vorhergehenden Gleichung entspricht; es ist daher das Volumen einer Kugel, die die Einheit zum Halbmesser hat, und da dieses Volumen gleich $\frac{4\pi}{3}$ ist, so folgt daraus $\frac{4\pi abc}{3}$, wie vorher, für den Werth des Ellipsoids.

90.

Zu den Körpern, welche in Beziehung auf eine Axe symmetrisch sind, gehören die Rotationskörper. Wir werden immer die Axe der Figur für die der Abscissen x nehmen. Nimmt man alsdann an, daſs ein Körper dieser Art durch eine ebene Fläche erzeugt wird, die zwischen zwei gegebenen krummen Linien und den Linien, die senkrecht auf der Axe der x stehen und den Werthen $x = \alpha$, $x = \beta$ entsprechen, enthalten ist, und bezeichnet man durch y und y' die Ordinaten dieser krummen Linien in Beziehung auf dieselbe Abscisse x, so muſs man

$$X = \pi\,(y^2 - y'^2)$$

in den Formeln des vorhergehenden Paragraphen setzen. Dies giebt

$$V = \pi \int_\alpha^\beta (y^2 - y'^2)\,dx, \quad V x_1 = \pi \int_\alpha^\beta (y^2 - y'^2)\,x\,dx.$$

In dem gewöhnlichsten Falle, wenn die eine krumme Linie mit der Axe der Figur zusammenfällt, hat man $y' = o$ und einfach

$$V = \pi \int_\alpha^\beta y^2\,dx, \quad V x_1 = \pi \int_\alpha^\beta y^2\,x\,dx. \qquad (b)$$

Die Cykloide bietet ebenfalls Beispiele zur Anwendung dieser Formel dar, in welchen sich alle Integrationen unter endlicher Form ausführen lassen.

Betrachtet man den convexen Körper, der durch die Fläche CMP (Fig. 25), die sich um die Axe Cx dreht, erzeugt wird, so integriert man zuerst theilweise, dies giebt

$$V = \pi\, x y^2 - 2\pi \int xy\, dy$$
$$Vx_1 = \tfrac{1}{2}\pi\, x^2 y^2 - \pi \int x^2 y\, dy,$$

wo die Integrale so genommen werden, dafs sie im Punkte C, oder wenn $x = o$ ist, verschwinden. In Folge der Gleichung (a) des §. 73 hat man also

$$V = \pi\, xy^2 - 2\pi \int y \sqrt{ax - x^2}\, dx$$
$$Vx_1 = \tfrac{1}{2}\pi\, x^2 y^2 - \pi \int yx \sqrt{ax - x^2}\, dx,$$

und die Rechnungen können durch Umbildungen ausgeführt werden, die denen des §. 80 ähnlich sind.

Hat man ein Volumen, welches durch die halbe Cykloide CAB erzeugt ist, so findet man

$$V = \frac{\pi a^3}{3}\left(\frac{9\pi^2}{16} - 1\right), \quad x_1 = \frac{(63\pi^2 - 64)a}{12(9\pi^2 - 16)}.$$

Betrachtet man dagegen den convexen Körper, der durch die Fläche CMP erzeugt wird, wenn diese sich um die Axe Cy dreht, so mufs man zuerst x und y in den Gleichungen (b) vertauschen; hieraus folgt

$$V = \pi \int x^2 dy, \quad Vy_1 = \pi \int x^2 y\, dy,$$

wo y_1 der Abstand des Schwerpunktes, der auf der Axe Cy liegt, vom Punkte C ist, und die Integrale in diesem Punkte C verschwinden. In Folge der Gleichung (a) der Cykloide hat man daher

$$V = \pi \int x \sqrt{ax - x^2}\, dx, \quad Vy_1 = \pi \int yx \sqrt{ax - x^2}\, dx.$$

Das erste Integral erhält man ohne Schwierigkeit, das zweite durch Umbildungen, die denen des §. 80 ähnlich sind. In dem Falle, wenn CM die halbe Cykloide ist, hat man

$$V = \frac{\pi^2 a^3}{16}, \quad y_1 = \left(\frac{16}{9} + \frac{\pi^2}{4}\right)\frac{a}{\pi}.$$

91.

Seyen nun x_1, y_1, z_1 die rechtwinkligen Coordinaten des Schwerpunktes eines Körpers von beliebiger Gestalt, sey er nun gleichartig oder ungleichartig, dessen Masse durch M bezeichnet wird. Nach dem, was schon in §. 65 gesagt worden

ist, muſs man, um diese drei Unbekannten zu bestimmen, M in unendlich kleine Theile theilen, und daher in den zweiten Gliedern der Gleichungen dieses Paragraphen die Summen in Integrale verwandeln. Man hat auf diese Weise

$$Mx_1 = \int\int\int x dm, \quad My_1 = \int\int\int y dm, \quad Mz_1 = \int\int\int z dm; \quad (1)$$

wo dm das Differentialelement der Masse des Körpers ist, welches den Coordinaten x, y, z entspricht. Nennt man ϱ die Dichtigkeit dieses Elements und dv sein Volumen, so hat man auch

$$dm = \varrho dv.$$

Man kann nun für das Element dv des Volumens das rechtwinklige Parallelopipedum nehmen, dessen drei zusammenstoſsende Seiten den Axen der x, y, z parallel und den Differentialen dx, dy, dz gleich sind. Hieraus folgt

$$dv = dx\, dy\, dz.$$

Ist der Körper gleichartig, so ist seine Dichtigkeit überall dieselbe, bezeichnet man daher sein Volumen durch V, so hat man

$$M = \varrho V,$$

und die Gleichungen (1) werden

$$Vx_1 = \int\int\int x dv, \quad Vy_1 = \int\int\int y dv, \quad Vz_1 = \int\int\int z dv. \quad (2)$$

Ist der Körper ungleichartig, so können zwei verschiedene Fälle vorkommen. Im ersten Falle besteht der Körper aus homogenen Theilen von endlicher Gröſse, und die Dichtigkeit ändert sich nur von einem Theile zum anderen. Man kann daher auf jeden Theil die Gleichungen (2) anwenden, und alsdann den Schwerpunkt des ganzen Körpers nach denen seiner Theile bestimmen (§. 64). Im zweiten Falle ändert sich die Dichtigkeit in unmerklichen Graden im Inneren des Körpers, und man kann alsdann die Gleichungen (1) anwenden, in welchen ϱ eine gegebene Function von x, y, z seyn muſs.

Man muſs jedoch bemerken, daſs in jedem Falle, man betrachte einen gleichartigen oder einen ungleichartigen Körper, die Theilung der Masse in unendlich kleine Theile, deren Dichtigkeiten dieselben sind, oder nur in unendlichen Graden sich ändern, auf der Voraussetzung beruht, daſs der Körper aus einer stätigen Materie besteht. Dies ist aber in der Natur nicht der Fall, wo die Körper im Gegentheile, aus getrenn-

ten, durch leere Räume, deren Gröfse mit der der vollen Räume vergleichbar ist, von einander abgesonderten materiellen Theilen bestehen. Wir werden im folgenden Kapitel auf diese Bemerkung zurückkommen, und dort zeigen, dafs man dem ungeachtet die Formeln (1) und (2) auf die Körper in der Natur anwenden kann, als wenn die Materie in ihrem Inneren gar keine Unterbrechung erlitte.

92.

Es ist zuweilen nöthig, um die Integrationen zu erleichtern, statt der Coordinaten x, y, z die Polarcoordinaten jedes Elements dm anzuwenden. Sey alsdann r sein Radius Vector, ϑ der Winkel, den er mit der Axe der positiven x einschliefst, und ψ der Winkel, der zwischen der Ebene dieser beiden geraden Linien und der der x und y enthalten ist; wir haben (§. 9)

$$x = r \cos\vartheta, \quad y = r \sin\vartheta \cos\psi, \quad z = r \sin\vartheta \sin\psi.$$

Zu gleicher Zeit mufs man dv vermittelst der Differentiale dieser neuen Veränderlichen r, ϑ, ψ ausdrücken. Man hat allgemeine Formeln für die Umbildung der unabhängigen Veränderlichen in vielfache Integrale, aber man kann auch den Werth von dv, den wir anwenden müssen, nemlich

$$dv = r^2 \sin\vartheta . dr\, d\vartheta\, d\psi$$

direct finden, wie man sogleich sehen wird.

Ich setze ϱdv an die Stelle von dm in den Gleichungen (1) und substituiere alsdann diesen Werth von dv und die Werthe von x, y, z, so gehen diese in

$$\left.\begin{aligned} Mx_1 &= \int\!\!\int\!\!\int \varrho r^3 \sin\vartheta \cos\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\psi \\ My_1 &= \int\!\!\int\!\!\int \varrho r^3 \sin^2\vartheta \cos\psi\, dr\, d\vartheta\, d\psi \\ Mz_1 &= \int\!\!\int\!\!\int \varrho r^3 \sin^2\vartheta \sin\psi\, dr\, d\vartheta\, d\psi \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

über, womit man noch die Gleichung

$$M = \int\!\!\int\!\!\int \varrho r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\psi$$

verbinden mufs.

Was die Gränzen dieser dreifachen Integrale betrifft, so werden sie verschieden seyn, je nachdem der Anfangspunkt der Coordinaten innerhalb oder aufserhalb des Körpers liegt. Ist dieser Anfangspunkt einer der Punkte von M, so integriert man zuerst zwischen den Gränzen $r = o$ und $r = u$, indem

man durch u eine Function von ϑ und ψ bezeichnet, die durch die Gleichung der Oberfläche gegeben ist. Hierauf integriert man zwischen den Gränzen $\vartheta = o$ und $\vartheta = \pi$ und den Gränzen $\psi = o$ und $\psi = 2\pi$, indem man nach Belieben mit dem Winkel ϑ oder mit dem Winkel ψ anfängt. Die Gränzen werden im Allgemeinen verwickelter seyn, wenn der Anfangspunkt der Coördinaten nicht der Masse M angehört. Man bezeichne in diesem Falle durch u und u' zwei gegebene Functionen von ϑ und ψ, durch ω und ω' zwei Functionen von ψ und durch α und α' zwei gegebene Winkel. Ferner nehme man an, dafs man einen Theil des Körpers betrachte, der einerseits zwischen zwei Oberflächen enthalten ist, deren Gleichungen $r = u$ und $r = u'$ sind, und andererseits zwischen den conischen Oberflächen, deren gemeinschaftliche Axe die Axe der x ist, die ihre gemeinschaftliche Spitze im Anfangspunkte der Coordinaten haben, und deren Gleichungen $\vartheta = \omega$ und $\vartheta = \omega'$ sind. Aufserdem soll dieser Theil noch zwischen zwei Ebenen enthalten seyn, die durch diese Axe gehen, und die Winkel α und α' mit der festen Ebene, von welcher aus man den Winkel ψ zählt, machen. Man integriert zuerst zwischen den Gränzen $r = u$ und $r = u'$, dann zwischen den Gränzen $\vartheta = \omega$ und $\vartheta = \omega'$ und zuletzt zwischen den Gränzen $\psi = \alpha$ und $\psi = \alpha'$.

Man nehme z. B. für die zwei ersten Oberflächen die zweier concentrischer Kugeln, die ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten haben und deren Halbmesser a und a' sind. Zu gleicher Zeit nehme man an, dafs die beiden Kegel kreisförmige Grundflächen haben, oder, mit anderen Worten, dafs ω und ω' constante Winkel seyen. Ferner setze man voraus, dafs die Dichtigkeit nur eine Function von r sey, so dafs der Theil des Körpers, den man betrachtet, einer Kugel angehört, die aus concentrischen unendlich dünnen Lagen zusammengesetzt ist, von welchen jede in ihrer ganzen Ausdehnung dieselbe Dichtigkeit hat, welche sich aber von einer Lage zur anderen ändert, und zwar nach einer gegebenen Function des Abstandes vom Mittelpunkte.

Setzt man zur Abkürzung

$$\int_a^{a'} \varrho r^2 dr = A, \int_a^{a'} \varrho r^5 dr = B,$$

und führt die Integrationen in Beziehung auf ϑ und ψ aus, so findet man

$$M = A(\alpha' - \alpha)(\cos\omega - \cos\omega')$$
$$Mx_1 = \tfrac{1}{2}B(\alpha' - \alpha)(\cos^2\omega - \cos^2\omega')$$
$$My_1 = \tfrac{1}{2}B(\sin\alpha' - \sin\alpha)(\omega' - \omega - \tfrac{1}{2}\sin 2\omega' + \tfrac{1}{2}\sin 2\omega)$$
$$Mz_1 = \tfrac{1}{2}B(\cos\alpha - \cos\alpha')(\omega' - \omega - \tfrac{1}{2}\sin 2\omega' + \tfrac{1}{2}\sin 2\omega),$$

woraus sich die Werthe von x_1, y_1, z_1 ergeben, die man in diesem Beispiele nicht aus den Gleichungen (1) ableiten könnte.

Bildet die Masse M einen vollkommenen Ring, so dafs man $\alpha' = \alpha + 2\pi$ hat, so folgt daraus $y_1 = o$ und $z_1 = o$, das heifst, der Schwerpunkt liegt, wie dies seyn mufs, auf der Axe dieses Ringes, sein Abstand x_1 vom Mittelpunkte der Kugel, von welcher dieser Ring einen Theil ausmacht, ist

$$x_1 = \frac{B(\cos\omega + \cos\omega')}{2A}.$$

In dem Falle, wenn die Kugel gleichartig ist, ist die Dichtigkeit ρ constant, und man hat

$$A = \tfrac{1}{3}\rho(a'^3 - a^3), \quad B = \tfrac{1}{4}\rho(a'^4 - a^4).$$

Wenn in dem Ringe kein leerer Raum ist, so hat man $\omega = o$, und wenn er in einen Kugelausschnitt übergeht, so hat man auch $a = o$. Hieraus folgt

$$x_1 = \frac{3a'}{8}(1 + \cos\omega'),$$

was mit dem Werthe der durch x bezeichneten Gröfse in §. 88 übereinstimmt, wenn man bemerkt, dafs die durch f bezeichnete Sagitte $a'(1 - \cos\omega')$ zum Werthe hat, und dafs der Halbmesser a' ist.

93.

Um das Differential dv des Volumens, ausgedrückt durch die Differentiale der Polarcoordinaten zu finden, nehme ich an, dafs M (Fig. 31) der Punkt sey, der den Coordinaten r, ϑ, ψ entspricht, so dafs, wenn O ihr Anfangspunkt, OM der Radius Vector r, und ϑ der Winkel MOx ist, der zwischen diesem Radius und einer festen Axe Ox enthalten ist, und ψ den Winkel bedeutet, den die Ebene dieser zwei

geraden Linien mit einer festen Ebene einschliefst, die willkührlich durch die zweite Linie gelegt ist. Sey M' ein Punkt, der auf der Verlängerung von OM liegt und dessen Radius Vector OM' durch r' bezeichnet werde. Von dem Punkte O als Mittelpunkt und in der Ebene $M'Ox$ beschreibe man die Kreisbogen MN und $M'N'$, die zwischen den zwei geraden Linien OMM' und ONN' enthalten sind, und bezeichne durch ϑ' den Winkel NOx. Endlich drehe man die Ebene dieses Winkels um die Axe Ox, und bezeichne in dieser neuen Lage durch ψ' den Winkel, den sie mit der festen Axe macht. Bei dieser Bewegung erzeugt die Fläche $MM'N'N$ ein Volumen $MM'N'N\ PP'Q'Q$, welches ich durch U bezeichne. Diese Fläche aber, als Unterschied der beiden Kreisausschnitte $M'ON'$ und MON ist gleich

$$\tfrac{1}{2}(r'^2 - r^2)(\vartheta' - \vartheta).$$

Nennt man u die senkrechte Linie, die von ihrem Schwerpunkte auf die Axe Ox gefällt wird, so hat man $u(\psi' - \psi)$ als Länge des Bogens, den dieser Schwerpunkt um diese gerade Linie beschreibt. Nach dem Lehrsatze des §. 84 haben wir daher

$$U = \frac{u}{2}(r' + r)(r' - r)(\vartheta' - \vartheta)(\psi' - \psi).$$

Dies angenommen, denke man sich, dafs die drei Dimensionen von U unendlich klein werden und setze daher

$$r' - r = dr, \quad \vartheta' - \vartheta = d\vartheta, \quad \psi' - \psi = d\psi.$$

Der Factor $r' + r$ reduciert sich zu gleicher Zeit auf $2r$, man kann daher auch für u die senkrechte Linie MH nehmen, die vom Punkte M auf die Axe Ox gefällt und gleich $r \sin \vartheta$ ist, und nur um ein unendlich Kleines von u verschieden seyn kann. Endlich geht U in dv über, dessen Werth, den man bestimmen wollte,

$$dv = r^2 \sin \vartheta\, dr \,.\, d\vartheta d\psi$$

seyn wird.

Man bemerke, dafs dieses Volumen dv wie ein rechtwinkliges Parallelopipedum betrachtet werden kann, dessen drei zusammen stofsende Seiten MM' oder dr, der unendlich kleine Bogen MN, der seinen Mittelpunkt in O hat und dessen Länge $rd\vartheta$ ist und der unendlich kleine Bogen MP,

der seinen Mittelpunkt im Punkte H hat und dessen Länge $r \sin \vartheta d\psi$ ist, sind.

Die Grundfläche $MNPQ$ dieses Parallelopipedums ist das Element der Kugeloberfläche, deren Mittelpunkt im Punkte O, und deren Halbmesser r ist. Bezeichnet man sie durch $d\sigma$, so hat man daher

$$d\sigma = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\psi, \quad dv = d\sigma\, dr.$$

Nennt man $d\omega$ das Element der Kugeloberfläche, deren Halbmesser als Einheit angenommen wird, so hat man auch

$$d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\psi, \quad dv = r^2 dr\, d\omega.$$

Integriert man diesen Ausdruck von $d\omega$ zwischen den Gränzen $\vartheta = o$ und $\psi = o$ und $\vartheta = \pi$ und $\psi = 2\pi$, so findet man daraus 4π als Verhältniſs der Oberfläche der Kugel zum Quadrate ihres Halbmessers, was wirklich ihr bekannter Werth ist.

Sechstes Kapitel.

Berechnung der Anziehung der Körper.

I. Formeln in Beziehung auf einen beliebigen Körper und auf die Kugel insbesondere.

94.

Man nehme an, dafs ein materieller Punkt O (Fig. 32) den Anziehungen aller Punkte irgend eines Körpers von beliebiger Gestalt unterworfen sey. Zerlegt man jede dieser Kräfte in drei andere, die nach rechtwinkligen Axen gerichtet sind, welche willkührlich durch den Punkt O gezogen sind, und nimmt man alsdann die Summe der positiven oder negativen Seitenkräfte, die nach jeder Axe wirken, so hat man die drei Seitenkräfte, deren Mittelkraft, der Gröfse und Richtung nach, die ganze Anziehung ausdrückt, die auf den Punkt O ausgeübt wird. Diese drei Seitenkräfte sind die Summen einer unendlichen Anzahl unendlich kleiner Elemente, die auf die ganze Masse des anziehenden Körpers ausgedehnt sind; man kann sie durch dreifache Integrale ausdrücken, und die Berechnung dieser Integrale hat Aehnlichkeit mit der Berechnung der Coordinaten des Schwerpunktes irgend eines Körpers, mit welcher wir uns im Vorhergehenden beschäftigt haben. Aus diesem Grunde werde ich das, was ich über die Berechnung der Anziehungen zu sagen habe, an dieser Stelle erörtern.

Diese Frage ist eine von denjenigen, mit welchen sich die Mathematiker am Meisten beschäftigt haben, sowohl wegen der analytischen Schwierigkeiten, die sie darbietet, als auch wegen ihres Zusammenhanges mit der Untersuchung über die Gestalt der Erde und dem Gesetze der Schwere an ihrer Oberfläche. In diesem Werke sollen jedoch nur die Formeln gegeben werden, die sich unmittelbar darbieten, und einige ihrer Anwendungen. Ausführlichere Entwickelungen findet man im zweiten Theile der Mécanique céleste und in mei-

ner Abhandlung "über die Anziehung der Sphäroide", die in der Connaissance des Tems vom Jahre 1829 abgedruckt ist.

95.

Sey D ein fester Punkt, der im Inneren des anziehenden Körpers liegt; durch diesen Punkt ziehe man die drei rechtwinkligen Axen Dx, Dy, Dz, welche die Axen der positiven Coordinaten seyn werden. Man bezeichne durch x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes M des anziehenden Körpers, und durch dm das Element seiner Masse, welches dem Punkte M entspricht. Ferner bezeichne man durch α, β, γ die drei Coordinaten des Punktes O, und durch μ die Masse dieses materiellen Punktes, endlich sey u die Entfernung OM, so dafs man

$$u^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2$$

hat. Die Anziehung, die durch dm auf μ ausgeübt wird, wird nach der geraden Linie OM gerichtet seyn. Man nehme an, dafs diese Kraft dem Produkte der beiden Massen proportional sey, und im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats des Abstandes u stehe; bezeichnet man sie daher durch F, so hat man

$$F = \frac{f \mu dm}{u^2},$$

wo f ein beständiger Coefficient ist, der die Intensität der anziehenden Kraft, auf die Einheiten der Masse und des Abstandes bezogen, ausdrücken soll. Um sich eine richtige Vorstellung von dieser Gröfse f zu machen, mufs man sich zwei Körper denken, deren Gestalt und Dimensionen beliebig angenommen werden können, und deren Massen gleich grofs sind und als Einheit angenommen werden; ferner mufs man annehmen, dafs die Anziehung, in der ganzen Ausdehnung dieser zwei Körper, weder der Gröfse noch der Richtung nach sich ändert, so dafs sie zwischen zwei beliebigen Elementen ihrer Massen, die gleich dm und μ sind, dieselbe ist, wie zwischen den materiellen Punkten μ und dm, die wir betrachten, vorausgesetzt, dafs ihr Abstand OM der Einheit gleich ist. Die Kraft f ist alsdann die gesammte Anziehung, die durch einen dieser zwei Körper auf den anderen ausgeübt wird.

Die Projectionen der geraden Linie OM auf die Axen Dx, Dy, Dz sind $\alpha - x$, $\beta - y$, $\gamma - z$; dividiert man sie durch u, so hat man die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Kraft F bestimmen. Ihre drei Seitenkräfte sind daher

$$\frac{\alpha - x}{u} F, \quad \frac{\beta - y}{u} F, \quad \frac{\gamma - z}{u} F,$$

und betrachtet man u als eine positive Gröſse, so werden sie die drei Coordinaten α, β, γ des Punktes O zu verkleinern oder zu vergröſsern streben, je nachdem sie positiv oder negativ seyn werden. Bezeichnet man daher durch A, B, C die drei Seitenkräfte der gesammten Anziehung, die auf diesen Punkt ausgeübt wird, so hat man, indem man für F seinen Werth setzt und bemerkt, daſs μ und f beständige Factoren sind,

$$\left.\begin{aligned} A &= \mu f \iiint \frac{\alpha - x}{u^3}\, dm \\ B &= \mu f \iiint \frac{\beta - y}{u^3}\, dm \\ C &= \mu f \iiint \frac{\gamma - z}{u^3}\, dm \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

wo die dreifachen Integrale auf die ganze Masse des anziehenden Körpers ausgedehnt werden müssen.

Bezeichnet man durch ϱ die Dichtigkeit des Elements dm und durch dv sein Volumen, so hat man

$$dm = \varrho\, dv.$$

Diese Gröſse ϱ ist, im allgemeinen Falle, eine gegebene Function der Coordinaten des Punktes M; ist dagegen der anziehende Körper gleichartig, so ist sie eine gegebene Constante. Man drückt dv vermittelst der Differentiale der Coordinaten von M, die man anwendet, aus, die am geeignetsten seyn werden, um die Integrationen zu erleichtern.

96.

Durch eine sehr einfache Betrachtung führt man die drei dreifachen Integrale, von welchen die Werthe von A, B, C abhängen, auf ein einziges zurück. Unter der Voraussetzung, daſs die Gränzen dieselben bleiben, wie in diesen Integralen, setze man

$$T = \int\int\int \frac{dm}{u}.$$

Da diese Gränzen von der Lage des Punktes O unabhängig sind, so kann man, wenn man T in Beziehung auf seine Coordinaten differentiiert, diese Differentiationen unter dem Zeichen $\int$ ausführen (§. 14), und da man außerdem

$$\frac{d\frac{1}{u}}{d\alpha} = \frac{x-\alpha}{u^3}, \quad \frac{d\frac{1}{u}}{d\beta} = \frac{y-\beta}{u^3}, \quad \frac{d\frac{1}{u}}{d\gamma} = \frac{z-\gamma}{u^3}$$

hat, so folgt daraus

$$\frac{dT}{d\alpha} = \int\int\int \frac{x-\alpha}{u^3}\, dm$$

$$\frac{dT}{d\beta} = \int\int\int \frac{y-\beta}{u^3}\, dm$$

$$\frac{dT}{d\gamma} = \int\int\int \frac{z-\gamma}{u^3}\, dm$$

wodurch die Gleichungen (1) in folgende übergehen:

$$A = -\mu f \frac{dT}{d\alpha}, \quad B = -\mu f \frac{dT}{d\beta}, \quad C = -\mu f \frac{dT}{d\gamma}, \tag{2}$$

so daſs die Berechnung der drei Seitenkräfte A, B, C nur von dem einzigen Integrale T abhängt.

Bei der Bestimmung dieses Integrals ist es wichtig, zu bemerken, daſs der Nenner u beständig dasselbe Zeichen in der ganzen Ausdehnung der Integration haben muſs, und daſs er positiv seyn muſs, wenn man haben will, daſs die Seitenkräfte A, B, C die Coordinaten des Punktes O verkleinern oder vergröſsern sollen, je nachdem ihre Werthe, die durch die Gleichungen (2) gegeben sind, positiv oder negativ sind.

Wenn der Punkt O nicht eine Anziehung, sondern eine Abstoſsung erleidet, so ist es hinreichend, die Zeichen der Werthe von A, B, C zu ändern, oder, was dasselbe ist, f wie eine negative Constante anzusehen. In dem Falle, wenn die anziehende oder abstoſsende Kraft nicht, wie wir vorausgesetzt haben, im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Abstandes steht, und man, im Allgemeinen, den Coefficienten von $\mu\, dm$ durch eine gegebene Function von u, die ich durch φu bezeichne, vorstellt, kann man eine andere Function Φu so nehmen, daſs man

$$\frac{d\Phi u}{du} = - \varphi u$$

hat, und sie an die Stelle von $\frac{1}{u}$ in den Ausdruck von T setzen. Es könnte auch seyn, dafs diese Kraft für einen Theil des Körpers, der auf O wirkt, anziehend und für einen anderen Theil abstofsend wäre; in diesem Falle müfste die Function φu, in welcher der Coefficient f enthalten ist, in der Ausdehnung des Integrals, welches T vorstellt, das Zeichen ändern.

Die Seitenkräfte der Wirkung, welche auf einen Körper von beliebiger Gestalt und Gröfse ausgeübt wird, können aus den vorhergehenden Formeln abgeleitet werden, wenn man in denselben μ durch das Differentialelement seiner Masse ersetzt, welches den Coordinaten α, β, γ entspricht, und nachher in Beziehung auf diese drei Veränderlichen, in der ganzen Ausdehnung dieser Masse differentiiert; woraus man sieht, dafs die Seitenkräfte der Wirkung, die durch einen Körper auf einen anderen ausgeübt wird, im Allgemeinen von sechsfachen Integralen abhängen.

Dieses sind die Formeln, nach welchen man die Anziehungen oder Abstofsungen berechnen kann; ehe man aber irgend eine Anwendung davon macht, ist es nothwendig zu erklären, wie sie mit der inneren Beschaffenheit der Körper zusammen stimmen, und die Schwierigkeit zu untersuchen, von welcher am Ende des §. 91 die Rede war.

97.

Die verschiedenen Körper enthalten, unter gleichem Volumen ungleiche Quantitäten wägbarer Materie (§. 60), und da diese Quantitäten, bei demselben Körper, mit seiner Temperatur und dem äufseren Drucke, dem er unterworfen ist, sich ändern, so hat dies zu dem Gedanken geführt, die Körper wie eine Sammlung materieller, nicht zusammenhängender Theilchen, die durch P o r e n, oder Räume, in welchen keine wägbare Materie enthalten ist, von einander getrennt sind, zu betrachten. Diese materiellen Theile nennt man A t o m e; ihre Dimensionen und die der Poren entgehen, wegen ihrer aufserordentlichen Kleinheit, unseren Sinnen und allen unseren Mitteln sie zu messen. Man nimmt die Atome als unzerstörbar

und die Masse, die Gestalt, das Volumen eines jeden derselben als unveränderlich an. Die Dimensionen der Poren dagegen ändern sich mit den verschiedenen Quantitäten der Wärme, die man den Körpern zuführt oder ihnen entzieht, und mit dem Drucke, dem man sie unterwirft. Da nun die Aenderungen im Volumen eines Körpers sehr groſs seyn können, ohne daſs seine Masse zu oder abnimmt, so folgt daraus, daſs die Dimensionen der leeren Theile mit denen der vollen Theile vergleichbar und im Allgemeinen gröſser als die letzteren seyn müssen.

Die Atome von derselben oder von verschiedener Beschaffenheit, vereinigen sich in verschiedenen Verhältnissen, um andere Theile der Körper zu bilden, die noch immer unmeſsbar sind und die man ihre Molecule nennt. Die Körper unterscheiden sich von einander durch die Beschaffenheit und die Verhältnisse der Atome, die in der Zusammensetzung eines jeden Moleculs enthalten sind, und man betrachtet die Atome, wie eben gesagt wurde, als etwas Unveränderliches und Unzerstörbares, weil man, wenn man sie in denselben Verhältnissen vereinigt, zu allen Zeiten dieselben Körper mit denselben Eigenschaften wieder hervor bringt.

98.

Es ist hiernach einleuchtend, daſs die Theilung der Masse in unendlich kleine Theile und die Annahme einer Dichtigkeit eines jeden Elements, die in den gleichartigen Körpern sich nicht verändert, oder in den ungleichartigen Körpern sich nur durch unmerkliche Stufen ändert, nicht auf die in der Natur vorkommenden Körper paſst. Indessen kann man dem ungeachtet von den Formeln Gebrauch machen, die auf diese Betrachtung gegründet sind, und sie auch dann noch anwenden, wenn die Körper in Theile getheilt worden sind, die zwar eine endliche, aber völlig unmeſsbare Gröſse haben.

Die Molecule sind nemlich so klein und liegen so nahe bei einander, daſs ein Theil der Masse des Körpers, der eine ungeheuere Anzahl derselben enthält, noch immer als sehr klein angenommen und sein Volumen als unmeſsbar angesehen werden kann. Sey v das Volumen eines solchen Theils, dessen Gröſse unmeſsbar ist und der nichts desto weniger

Myriaden von Moleculen enthält. Sey ferner m die Summe ihrer Massen und bezeichne man durch M einen Punkt von v, der, wenn man will, sein Schwerpunkt seyn soll. Setzen wir nun

$$\frac{m}{v} = \rho,$$

so drückt dieses Verhältnifs ρ die Dichtigkeit des Körpers im Punkte M aus, wie auch sonst die Massen der Molecule und ihre regelmäfsige oder unregelmäfsige Vertheilung in der Ausdehnung von v beschaffen seyn mag. Bezeichnet man ebenso durch n die Anzahl der Molecule, die v enthält, und setzt man

$$\frac{v}{n} = \varepsilon^3,$$

so kann diese Linie ε, deren Gröfse unmefsbar ist, der mittlere Zwischenraum der Molecule, der dem Punkte M und der Dichtigkeit ρ entspricht, genannt werden. In einem gleichartigen Körper, ändert sich dieses Verhältnifs und diese Linie nicht mit der Lage des Punktes M, in einem ungleichartigen Körper dagegen, ändern sich diese zwei Gröfsen durch unmerkliche Stufen und können als gegebene Functionen der Coordinaten dieses Punktes angesehen werden.

Dies vorausgesetzt, will man nun die Masse eines Körpers, oder allgemeiner die Summe der aufserordentlich kleinen Theile dieses Körpers, von welchen jeder mit einer Function U der Coordinaten eines seiner Punkte M multipliciert ist, kennen, so theilt man das Volumen V dieses Körpers in aufserordentlich kleine Theile v, alsdann nimmt man die Summe aller der Produkte $U\rho v$, welche ich durch

$$\Sigma\, U\, \rho\, v$$

bezeichne, und welche sich auf alle Theile v von V erstrecken mufs. Sind die Glieder dieser Summe alle unendlich klein, und ist ihre Anzahl unendlich, so ist nach dem Lehrsatze des §. 13 der Werth der Summe dem bestimmten Integrale

$$\int U\, \rho\, d\, v$$

genau gleich, wenn dieses auf das ganze Volumen V, dessen Differentialelement dv ist, ausgedehnt wird. Man sieht aber leicht ein, dafs, im Allgemeinen, der Unterschied zwischen dieser Summe und diesem Integrale desto kleiner werden wird, je kleiner die Theile der ersteren und je gröfser ihre Anzahl

wird, so dafs man, wenn die Gröfse von v unmefsbar aber dennoch von dv verschieden ist, immer ohne merklichen Fehler das Integral statt der Summe nehmen kann. Indessen erleidet dieser allgemeine Grundsatz eine Ausnahme, nemlich wenn U eine Function ist, die sich sehr schnell ändert, und wenn diese Gröfse zu gleicher Zeit, in der Ausdehnung der Integration, ihr Zeichen ändert, was wirklich bei der Berechnung der Kräfte, die von der Molecularanziehung und der Abstofsung durch Wärme herrühren, die nur in unmefsbaren Abständen merklich sind, der Fall ist. Für jetzt ist es uns indessen hinreichend, zu bemerken, dafs diese Ausnahme mit den Formeln des §. 91 und 95 in keiner Beziehung steht, die sich auf die Schwerpunkte der Körper und auf Anziehungen, die im umgekehrten Verhältnisse der Abstände stehen, beziehen, und welche man daher auf die in der Natur vorkommenden Körper, die aus getrennten Moleculen bestehen, anwenden kann.

99.

Wir wollen nun zur Berechnung der Anziehungen zurück kehren. Wenn der Abstand des Punktes O von dem anziehenden Körper sehr grofs ist im Verhältnisse zu den Dimensionen dieses Körpers, so kann man, im Ausdrucke von T des §. 96, die Gröfse $\frac{1}{u}$ in eine convergierende Reihe entwickeln, die nach Potenzen und Produkten von x, y, z geordnet ist. Setzt man

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \delta^2,$$

so hat man alsdann

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\delta} + \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\delta^3}$$
$$+ \frac{3(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\delta^2}{2\delta^5} + \ldots$$

Nimmt man nun den Schwerpunkt des anziehenden Körpers für den Anfangspunkt D der Coordinaten, so hat man

$$\textstyle\int\int\int x\,dm = o, \quad \int\int\int y\,dm = o, \quad \int\int\int z\,dm = o,$$

weil diese Integrale, durch die Masse M des Körpers dividiert, die drei Coordinaten dieses Punktes seyn werden (§. 91). Bezeichnet man diese Masse durch M, so hat man daher

$$T=\frac{M}{\delta}+\frac{1}{\delta^3}\int\int\int(\alpha x+\beta y+\gamma z)dm+\frac{3}{2\delta^5}\int\int\int(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2dm$$
$$-\frac{1}{2\delta^3}\int\int\int(x^2+y^2+z^2)dm+\ldots$$

Wenn der Abstand OD oder δ hinlänglich grofs ist, so dafs man diesen Werth von T auf sein erstes Glied reducieren kann, so werden die Gleichungen (2)

$$A=\frac{\mu M f\alpha}{\delta^3},\quad B=\frac{\mu M f\beta}{\delta^3},\quad C=\frac{\mu M f\gamma}{\delta^3},$$

da aber diese Seitenkräfte dieselben sind, wie die einer Kraft, die gleich $\frac{\mu M f}{\delta^2}$ ist, und auf den Punkt O nach der Richtung OD wirkt, so folgt hieraus, dafs die Anziehung, die auf einen Punkt O durch einen Körper ausgeübt wird, der sehr weit von demselben entfernt ist, sowohl der Richtung als Gröfse nach, fast dieselbe ist, als wenn die Masse M dieses Körpers in seinem Schwerpunkte vereinigt wäre.

Wenn dieser Körper eine Kugel ist, die entweder gleichartig, oder aus concentrischen Lagen zusammen gesetzt ist, so findet man, dafs alle Glieder des Werthes von T, das erste ausgenommen, sich aufheben. Hierzu ist es hinreichend, x, y, z durch die Coordinaten r, ϑ, ψ zu ersetzen, wie in §. 92, wodurch man die Integrationen in Beziehung auf ϑ und ψ ausführen kann. Der so eben ausgesprochene Lehrsatz wird alsdann streng richtig seyn, wenn nur der Abstand δ hinlänglich grofs ist, so dafs man $\frac{1}{u}$ in eine convergierende Reihe entwickeln kann. Wirklich wird man im folgenden §. sehen, dafs dieser Lehrsatz, ohne dafs man auf die Reduction in eine Reihe zurück geht, statt hat, wie auch der Abstand des Punktes O von der anziehenden Kugel beschaffen seyn mag, wenn dieser Punkt nur nicht im Inneren der Kugel liegt. Hieraus kann man leicht schliefsen, dafs die Anziehung, welche eine Kugel auf eine andere ausübt, dieselbe ist, als wenn die Masse jeder Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Denn, nennt man die Massen dieser beiden Kugeln M und M' und ihre Mittelpunkte C und C', so ist die Anziehung, welche M auf einen Punkt O von M' ausübt, dieselbe, als

wenn die Masse M im Punkte C concentriert wäre; aufserdem ist die Anziehung, welche C auf alle Punkte O von M' ausübt, der Anziehung, welche alle diese Punkte, oder M' auf C ausüben, gleich und entgegengesetzt, welche dieselbe ist, als wenn die Masse M' im Punkte C' vereinigt wäre. Die Anziehung der beiden Kugeln ist daher dieselbe, wie die der beiden materiellen Punkte, die in C und C' liegen, wenn die Massen derselben M und M' sind.

100.

Die Anziehung, welche auf den Punkt O durch eine sphärische Schichte, die gleichartig ist und überall dieselbe Dicke hat, ausgeübt wird, und deren Mittelpunkt D ist, reduciert sich offenbar auf eine Kraft, die nach OD gerichtet ist. Läfst man diese gerade Linie mit der Axe Dx zusammen fallen, so werden die Seitenkräfte B und C, die mit den Axen Dy und Dz parallel sind, Null seyn, und man braucht nur den Werth von A zu berechnen.

Bei dieser Rechnung kann man, wie in §. 92, die Polarcoordinaten r, ϑ, ψ anwenden. Die Axe Dx fällt mit der Linie DO zusammen, und man hat daher

$$ODM = \vartheta, \quad DO = \alpha, \quad \beta = o, \quad \gamma = o,$$

und da $DM = r$ und $OM = u$ ist, so folgt daraus

$$u^2 = \alpha^2 - 2\alpha r \cos\vartheta + r^2.$$

Der Winkel ψ ist derjenige, den die Ebene ODM mit einer festen Ebene einschliefst, die durch die gerade Linie DO geht, man hat daher (§. 93)

$$dv = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\psi$$

als Element des Volumens, und in dem Elemente der Masse $dm = \rho dv$, betrachtet man ρ als einen beständigen Factor.

Nachdem man diese Werthe in den Ausdruck von T des §. 96 substituiert hat, mufs man von $r = b$ bis $r = a$ integrieren, indem man durch a und b den äufseren und inneren Halbmesser der sphärischen Schichte bezeichnet, und ferner von $\vartheta = o$ und $\psi = o$ bis $\vartheta = \pi$ und $\psi = 2\pi$. Da die Veränderliche ψ nicht unter dem Integralzeichen enthalten ist, so kommt die Integration, in Beziehung auf diese Veränderliche, darauf zurück, dafs man das Differential $d\psi$ durch 2π ersetzt. Dies vorausgesetzt, hat man

$$T' = 2\pi\varrho \int_b^a \left(\int_o^\pi \frac{r \sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{a^2 - 2ar\cos\vartheta + r^2}} \right) r\, dr.$$

An den Gränzen $\vartheta = o$ und $\vartheta = \pi$ hat die Wurzelgröſse die Werthe

$$\pm (a - r), \quad \pm (a + r);$$

da sie aber den Werth von u bezeichnet, der immer positiv seyn muſs (§. 96), so muſs man $a + r$ an der Gränze $\vartheta = \pi$, und $r - a$ oder $a - r$ an der Gränze $\vartheta = o$ nehmen, je nachdem der Punkt O innerhalb oder auſserhalb der sphärischen Schichte liegt. Wir werden sogleich sehen, was man thun muſs, wenn dieser Punkt in der Schichte selbst liegt, so daſs man in einem Theile dieser Schichte $r > a$ und in dem anderen Theile $r < a$ hat.

Da in Beziehung auf ϑ das unbestimmte Integral

$$\int \frac{r \sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{a^2 - 2ar\cos\vartheta + r^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - 2ar\cos\vartheta + r^2} + \text{const.}$$

ist, so hat man daher, für den Fall, daſs der Punkt im Inneren der Schichte liegt,

$$\int_o^\pi \frac{r \sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{a^2 - 2ar\cos\vartheta + r^2}} = \frac{1}{a} \left[(r + a) - (r - a) \right] = 2,$$

folglich hängt der Werth von T nicht von a ab, und der Werth von A, den man daraus vermittelst der ersten Gleichung (2) ableitet, wird $= o$ seyn. Im Falle, wenn der Punkt auſserhalb der Schichte liegt, hat man

$$\int_o^\pi \frac{r \sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{a^2 - 2ar\cos\vartheta + r^2}} = \frac{1}{a} \left[(a + r) - (a - r) \right] = \frac{2r}{a}$$

und folglich

$$T = \frac{4\pi\varrho}{a} \int_b^a r^2 dr = \frac{4\pi\varrho\,(a^3 - b^3)}{3a}$$

oder, was dasselbe ist,

$$T = \frac{M}{a},$$

wo M die Masse der sphärischen Schichte ist, deren Volumen $\frac{4\pi(a^3 - b^3)}{3}$ ist. Hieraus schlieſst man

$$A = \frac{\mu M f}{a^2}, \qquad (3)$$

welche Kraft dieselbe ist, als wenn die ganze Masse dieser anziehenden Schichte in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

101.

Diese Resultate kann man unmittelbar auf den Fall ausdehnen, wenn die sphärische Schichte zwar eine beständige Dicke hat, aber aus anderen concentrischen Schichten zusammengesetzt ist, deren Dichtigkeit sich von einer zur anderen nach einem beliebigen Gesetze ändert, und in der ganzen Ausdehnung einer und derselben Schichte dieselbe bleibt. Denn man kann die Anziehung einer jeden dieser Schichten besonders berechnen, und alsdann die Summe aller dieser Kräfte nehmen, die für einen Punkt, der im Inneren liegt, Null seyn wird, und für einen Punkt, der aufserhalb der Schichte liegt, durch die Formel (3) gegeben ist, wenn M noch immer die ganze Masse des anziehenden Körpers bedeutet.

Hieraus können wir schliefsen:

Erstens: dafs die Anziehungen, die von allen Punkten einer sphärischen Schichte von gleichmäfsiger Dicke, mag sie gleichartig oder aus concentrischen Schichten zusammen gesetzt seyn, auf einen Punkt O ausgeübt werden, der in dem leeren Raume, den diese Schichte einschliefst, liegt, sich wechselseitig aufheben, wenn sich die Anziehungen umgekehrt, wie das Quadrat des Abstandes verhalten, so dafs dieser Punkt im Gleichgewichte bleibt, wo er sich innerhalb dieses Raumes befindet.

Zweitens: dafs die Anziehung dieser Schichte und daher auch die Anziehung einer ganzen Kugel, die auf einen aufserhalb derselben liegenden Punkt O ausgeübt wird, dieselbe ist, als wenn die Masse des anziehenden Körpers in seinem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Wenn der Punkt O in der anziehenden Schichte selbst liegt, oder, mit anderen Worten, wenn man $\alpha > b$ und $\alpha < a$ hat, so theilt man diese sphärische Schichte in zwei andere, so dafs a und α der äufsere und innere Halbmesser der einen, und α und b der äufsere und innere Halbmesser der anderen ist. Der Punkt O liegt demnach im Inneren der ersten dieser zwei Schichten, und diese übt daher keine Wirkung auf denselben aus. Nennt man nun m die Masse der zweiten Schichte,

außerhalb welcher der Punkt O liegt, so kann man die Anziehung dieser Schichte aus der Formel (3) ableiten, indem man m an die Stelle von M setzt. Die gesammte Anziehung, die auf den Punkt O ausgeübt wird, hat daher den Werth

$$A = \frac{\mu m f}{a^2}.$$

Wenn die sphärische Schichte in eine ganz angefüllte Kugel übergeht, die überall dieselbe Dichtigkeit hat, so hat man

$$m = \frac{4\pi\rho a^3}{3}, \quad A = \frac{4\pi\mu f \rho a}{3},$$

das heißt: im Inneren einer gleichartigen Kugel ist die Anziehung dem Abstande des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte proportional.

Dieselben Lehrsätze finden auch dann noch statt, wenn der Punkt eine Abstoßung erleidet, sobald diese Kraft sich nur im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung ändert.

102.

Daß ein Punkt O, der innerhalb des Raumes liegt, den eine sphärische Schichte umschließt, und von allen Punkten angezogen oder abgestoßen wird, im Gleichgewichte ist, kann leicht bewiesen werden.

Man nehme zu diesem Zwecke zuerst an, daß diese Schichte unendlich dünn sey. Sey ε ihre Dichtigkeit. Man zerlege ihre Oberfläche in unendlich kleine Elemente, und bezeichne durch ω die Fläche desjenigen, welches dem Punkte P entspricht (Fig. 33). Die entsprechenden Elemente des Volumens und der Masse dieser Schichte werden $\varepsilon\omega$ und $\rho\varepsilon\omega$ seyn, und wenn man r den Abstand OP nennt, so ist der Werth der Kraft, die nach dieser geraden Linie gerichtet ist,

$$\frac{\mu f \rho \varepsilon \omega}{r^2}.$$

Man denke sich einen Kegel, dessen Grundfläche ω und dessen Spitze O ist; verlängert man die Linie OP, bis sie in P' die sphärische Oberfläche trifft, und verlängert man auf dieselbe Weise alle Linien, die von der Spitze des Kegels nach der Grundfläche desselben gezogen sind, so bestimmt man auf dieser Oberfläche ein zweites Element, welches ich

durch ω' bezeichne. Sey aufserdem r' der Abstand OP', so hat die Kraft, die nach dieser Linie, der vorhergehenden entgegengesetzt, gerichtet ist, den Werth

$$\frac{\mu f \varrho \varepsilon \omega'}{r'^2}.$$

Ich behaupte aber, dafs diese beiden entgegengesetzten Kräfte unter einander gleich seyn werden, d. h. dafs man haben wird

$$\frac{\omega}{r^2} = \frac{\omega'}{r'^2}.$$

Seyen nemlich POQ und $P'OQ'$, die Schnitte der beiden Kegel, die durch eine beliebige Ebene erzeugt werden, welche durch ihre gemeinschaftliche Spitze O geht. Die ähnlichen Oberflächen ω und ω' werden sich zu einander verhalten, wie die Quadrate der ähnlich liegenden Linien PQ und $P'Q'$. Da die Dreiecke POQ und $P'OQ'$ ähnlich sind, so hat man aufserdem

$$PQ : P'Q' = OP : OP';$$

erhebt man nun die vier Glieder dieser Proportion auf das Quadrat, so erhält man

$$\omega : \omega' = r^2 : r'^2$$

und mithin auch die vorhergehende Gleichung.

Hieraus folgt, dafs die Wirkungen, welche durch alle Elemente der sphärischen Schichte auf den Punkt O ausgeübt werden, sich paarweise aufheben. Die gesammte Wirkung dieser Schichte wird daher Null seyn, und dasselbe wird noch der Fall seyn, wenn sie eine endliche Dicke hat; denn alsdann kann man sie in eine unendlich grofse Anzahl unendlich dünner Schichten zerlegen, von welchen keine eine Wirkung auf den Punkt O ausübt.

II. Formeln für das Ellipsoid.

103.

Wenn der Punkt O (Fig. 32) der anziehenden Masse angehört, so kann man die Integrationen oft dadurch vereinfachen, dafs man diesen Punkt als Anfangspunkt der Polarcoordinaten nimmt. Der Radius Vector eines beliebigen Punk-

tes M wird alsdann u seyn; nennt man, wie in §. 93, $d\omega$ das Element der sphärischen Oberfläche, deren Halbmesser die Einheit ist, so hat man

$$dv = u^2 du d\omega, \quad dm = \varrho u^2 du d\omega;$$

und nennt man g, h, k die Winkel, welche die gerade Linie OM mit den Linien, die den Axen Dx, Dy, Dz parallel und durch den Punkt O gezogen sind, einschliefst, so hat man auch, nach der Bezeichnung des §. 95,

$$\cos g = \frac{x-\alpha}{u}, \quad \cos h = \frac{y-\beta}{u}, \quad \cos k = \frac{z-\gamma}{u};$$

wodurch die Gleichungen (1) dieses §. in folgende übergehen:

$$A = -\mu f \int\int\int \varrho \cos g \, du d\omega,$$
$$B = -\mu f \int\int\int \varrho \cos h \, du d\omega,$$
$$C = -\mu f \int\int\int \varrho \cos k \, du d\omega.$$

Die Integrale in Beziehung auf u, müssen von $u = o$ bis $u = r$ ausgedehnt werden, indem man durch r den Radius Vector eines beliebigen Punktes der Oberfläche, die den anziehenden Körper begränzt, bezeichnet. Nimmt man zur gröfseren Einfachheit an, dafs dieser Körper gleichartig ist, so können diese Integrale unmittelbar ausgeführt werden, und man erhält

$$\left.\begin{aligned} A &= -\mu f \varrho \int\int r \cos g \, d\omega \\ B &= -\mu f \varrho \int\int r \cos h \, d\omega \\ C &= -\mu f \varrho \int\int r \cos k \, d\omega \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Um die Werthe von r zu bestimmen, die man in diese Integrale substituieren mufs, sey, in rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückt,

$$F(x, y, z) = o$$

die Gleichung der Oberfläche des anziehenden Körpers. In einem beliebigen Punkte dieser Oberfläche hat man

$$x = \alpha + r \cos g, \quad y = \beta + r \cos h, \quad z = \gamma + r \cos k$$

vermöge der vorhergehenden Werthe von $\cos g$, $\cos h$, $\cos k$, wo α, β, γ noch immer die drei Coordinaten des Punktes O bedeuten, deren Werthe gegeben sind. Man kann daher diese Werthe von x, y, z in die vorhergehende Gleichung substituieren. Die Gleichung, die sich hieraus ergiebt, giebt im Allgemeinen zwei Werthe von r, einen positiven und einen negativen. Der negative Werth bleibt jedoch unberücksichtigt,

weil der Radius Vector r eine positive Gröfse ist, deren Richtung blos durch die Winkel g, h, k bestimmt wird, die spitz oder stumpf seyn können.

Wenn man den Werth von r in die Gleichungen (a) substituiert hat, so müssen die doppelten Integrale auf alle Elemente $d\omega$ der sphärischen Oberfläche ausgedehnt werden, die vom Punkte O aus als Mittelpunkte und mit einem Halbmesser, der der Einheit gleich ist, beschrieben ist.

104.

Wir wollen nun diese Formeln auf den Fall eines gleichartigen Ellipsoids anwenden, dessen Oberfläche durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (b)$$

gegeben ist, wo a, b, c, die drei Halbaxen bezeichnen und der Mittelpunkt der Figur der Anfangspunkt D der Coordinaten ist. Substituiert man in diese Gleichung die vorhergehenden Werthe von x, y, z, so erhält man

$$pr^2 + 2qr = l,$$

indem man zur Abkürzung

$$\frac{\cos^2 g}{a^2} + \frac{\cos^2 h}{b^2} + \frac{\cos^2 k}{c^2} = p$$

$$\frac{\alpha \cos g}{a^2} + \frac{\beta \cos h}{b^2} + \frac{\gamma \cos k}{c^2} = q$$

$$1 - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} = l$$

setzt. Wir haben also

$$r = -\frac{q \pm \sqrt{q^2 + pl}}{p}.$$

Da aber die Gröfse p positiv ist, und die Gröfse l ebenfalls positiv oder Null ist, weil der Punkt O, der den Coordinaten α, β, γ entspricht, im Inneren des Ellipsoids, oder höchstens in seiner Oberfläche liegt, so mufs man die Wurzelgröfse mit dem positiven Zeichen nehmen, damit der Radius r nicht negativ wird. Aufserdem behaupte ich, dafs man diese Wurzelgröfse in den Formeln (a) weglassen kann

Denn der entsprechende Theil des Integrals, der z. B. in A enthalten ist, wäre

$$\iint \frac{1}{p} \sqrt{q^2 + pl} \cos g \, d\omega.$$

Für jedes Paar der Elemente $d\omega$ aber, die so beschaffen sind, daſs der Radius des einen die Verlängerung des Radius des anderen ist, heben sich die Elemente dieses doppelten Integrals auf. Denn wenn man von einem dieser Elemente $d\omega$ zum anderen übergeht, so ändert jeder der drei Cosinus $\cos g$, $\cos h$, $\cos k$ das Zeichen; die Gröſsen p, l, q^2 aber bleiben dieselben, und der Coefficient von $d\omega$ unter dem Integrationszeichen hat in beiden Fällen gleiche und entgegengesetzte Werthe. Alle Elemente des vorhergehenden Integrals heben sich daher paarweise auf, und der Werth von A wird

$$A = \mu f \varrho \left(\frac{\alpha}{a^2} \iint \frac{\cos^2 g}{p} d\omega + \frac{\beta}{b^2} \iint \frac{\cos g . \cos h}{p} d\omega \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma}{c^2} \iint \frac{\cos g . \cos k}{p} d\omega \right),$$

indem man den Werth von q berücksichtigt. Die beiden letzten dieser drei Integrale sind aus Elementenpaaren zusammen gesetzt, die denselben Werthen von h und k und den Werthen von g entsprechen, die sich zu 180^0 ergänzen. Diese Elementenpaare heben sich also auf, und daher auch die ganzen Integrale. Läſst man daher diese Integrale weg und nimmt mit den Werthen von B und C ähnliche Reductionen vor, so hat man einfach

$$A = \frac{\mu f \varrho \alpha}{a^2} \iint \frac{\cos^2 g}{p} d\omega$$

$$B = \frac{\mu f \varrho \beta}{b^2} \iint \frac{\cos^2 h}{p} d\omega$$

$$C = \frac{\mu f \varrho \gamma}{c^2} \iint \frac{\cos^2 k}{p} d\omega.$$

Sey nun ϑ der Winkel, der zwischen dem Halbmesser OM und der Linie, die durch den Punkt D parallel mit der Axe Ox gezogen ist, enthalten ist, ψ sey der Winkel, den die Ebene dieser beiden geraden Linien mit einer Ebene ein-

schliefst, die durch die zweite geht, und der Ebene der x und y parallel ist. Wir haben also (§. 8)

$\cos g = \cos\vartheta$, $\cos h = \sin\vartheta \,.\, \cos\psi$, $\cos k = \sin\vartheta \,.\, \sin\psi$,

und zu gleicher Zeit (§. 93)

$$d\omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi,$$

hieraus folgt

$$a^2 b^2 c^2 p = b^2 c^2 \cos^2\vartheta + (c^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi)\, a^2 \sin^2\vartheta,$$

$$A = \frac{\mu f \varrho \alpha}{a^2} \int\!\!\int \frac{\cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi}{p}.$$

Die Integrale müssen, damit sie die Richtungen aller Radien OM umfassen, von $\vartheta = o$ und $\psi = o$ bis $\vartheta = \pi$ und $\psi = 2\pi$ genommen werden. Da aber der Coefficient von $d\vartheta$ denselben Werth für ϑ und $\pi - \vartheta$ hat, so braucht man nur von $\vartheta = o$ bis $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ zu integrieren und das Integral doppelt zu nehmen, und da der Coefficient von ψ derselbe ist für ψ und für $\pi \pm \psi$, so ist es auch hinreichend, von $\psi = o$ bis $\psi = \frac{1}{2}\pi$ zu integrieren und das Resultat viermal zu nehmen. Hiernach setze ich

$$\varphi = \operatorname{tang}\psi, \quad d\varphi = \frac{d\psi}{\cos^2\psi},$$

und da

$$\cos^2\psi = \frac{1}{1+\varphi^2} \quad \sin^2\psi = \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}$$

ist, so folgt daraus

$$\int_o^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{p} = a^2 b^2 c^2 \int_o^{\infty} \frac{d\varphi}{(b^2\cos^2\vartheta + a^2\sin^2\vartheta)c^2 + (c^2\cos^2\vartheta + a^2\sin^2\vartheta)b^2\varphi^2}$$

$$= \frac{\pi a^2 b c}{2\sqrt{(b^2\cos^2\vartheta + a^2\sin^2\vartheta)(c^2\cos^2\vartheta + a^2\sin^2\vartheta)}}$$

wodurch also der Werth von A nur noch von dem Integral in Beziehung auf ϑ abhängt. Aus dem Werthe von A kann man, ohne neue Rechnung, den Werth von B ableiten, indem man β statt α setzt und die Buchstaben a und c verwechselt. Auf diese Weise findet man zuletzt

$$\left.\begin{aligned}
A &= 4\pi\mu f \varrho \alpha \int_o^{\frac{1}{2}\pi} \frac{b c \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{(b^2\cos^2\vartheta + a^2\sin^2\vartheta)(c^2\cos^2\vartheta + a^2\sin^2\vartheta)}}\\
B &= 4\pi\mu f \varrho \beta \int_o^{\frac{1}{2}\pi} \frac{a c \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{(a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta)(c^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta)}}\\
C &= 4\pi\mu f \varrho \gamma \int_o^{\frac{1}{2}\pi} \frac{a b \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{(b^2\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\vartheta)(a^2\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\vartheta)}}
\end{aligned}\right\} (c)$$

Da diese Werthe von A, B, C, positiv sind, so folgt daraus, dafs jede der drei Seitenkräfte den Punkt O dem Mittelpunkte des Ellipsoids zu nähern strebt; das Entgegengesetzte findet statt, wenn eine Abstofsung wirkt, alsdann mufs man $-f$ statt f in diese Formeln setzen.

105.

Man bezeichne durch δ eine positive constante Gröfse und nehme an, dafs man $(1+\delta)\,a$, $(1+\delta)\,b$, $(1+\delta)\,c$, statt a, b, c in die Formeln (c) substituiert. Der Factor $1+\delta$ wird verschwinden, und die Werthe von A, B, C werden dieselben bleiben. Durch diese Substitution ist aber das Ellipsoid um einen Theil vergröfsert, der zwischen seiner ursprünglichen Oberfläche und einer ähnlichen Oberfläche enthalten ist. Da die Seitenkräfte A, B, C, ihren Werth nicht ändern, so mufs man daraus schliefsen, dafs die Wirkung dieses hinzugekommenen Theils auf den inneren Punkt O, sich auf Null reduciert.

Eine gleichartige Schichte, die zwischen zwei ähnlichen elliptischen Oberflächen enthalten ist, die denselben Mittelpunkt und deren Axen gleiche Richtung haben, kann weder eine anziehende, noch eine abstofsende Kraft auf einen Punkt O ausüben, der in dem leeren Raume enthalten ist, den die innere Oberfläche einschliefst, so dafs dieser materielle Punkt im Gleichgewichte bleibt, wo er auch in diesem Raume enthalten sey. Dieser Lehrsatz enthält zugleich den Satz, den wir früher für den Fall einer sphärischen Schichte gefunden haben.

Hieraus folgt, dafs die Wirkung eines mit Materie angefüllten und gleichartigen Ellipsoids auf einen Punkt O seiner Masse, auf diejenige zurück kommt, die durch den Theil dieser Masse ausgeübt wird, der durch eine elliptische Oberfläche begränzt ist, die durch diesen Punkt geht, der Oberfläche des ganzen Körpers ähnlich und ähnlich gelegen ist. Nach den Formeln (c) ist die Seitenkraft dieser Kraft, die jeder der drei Axen des Ellipsoids parallel ist, der Ordinate des Punktes O proportional, die dieser Axe parallel ist, und hängt nur von dieser Veränderlichen ab. Im allgemeinen Falle, wenn die drei Halbaxen a, b, c ungleich sind, kann man die Integrale, die sich auf ϑ beziehen, welche diese Formeln enthal-

ten, in elliptische Functionen verwandeln, wodurch es möglich wird, ihre Werthe, vermittelst der Tafeln, die Legendre berechnet hat, in Zahlen anzugeben. Dieselben Integrale erhält man in einer geschlossenen Form, wenn zwei der constanten Gröfsen a, b, c gleichen Werth haben, und man es daher mit einem durch Umdrehung entstandenen Ellipsoide zu thun hat.

106.

Man nehme z. B. an, dafs $c = b$ sey, so wird die Form der Integrale in Beziehung auf ϑ verschieden seyn, je nachdem das Ellipsoid abgeplattet oder gestreckt ist, d. h. je nachdem $b > a$ oder $b < a$ ist. Man nehme an, dafs der erste Fall statt finde und setze, nach dieser Annahme,

$$b^2 - a^2 = a^2 e^2, \quad \frac{4 \pi \varrho a^3 (1 + e^2)}{3} = m,$$

so dafs der Bruch e die Abplattung des Ellipsoids, und m seine Masse ist.

Hieraus folgt

$$A = \frac{3 \mu f m a}{a^3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta}{1 + e^2 \cos^2 \vartheta}$$

und wenn man die Integrale ausführt, so hat man

$$A = \frac{3 \mu f m a}{a^3 e^3} \left[e - \text{arc} (\text{tang} = e) \right]$$

als Seitenkraft, die der Umdrehungsaxe parallel ist.

Auch hat man

$$\frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma} = \frac{3 \mu f m}{a^3 (1 + e^2)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{1 + e^2 \sin^2 \vartheta}}.$$

Da die Seitenkräfte B und C sich zu einander verhalten, wie die Coordinaten β und γ des Punktes O, so folgt daraus, dafs ihre Mittelkraft nach der senkrechten Linie gerichtet seyn wird, die von diesem Punkte auf die Umdrehungsaxe gefällt wird. Nennt man diese Kraft A' und die Länge der senkrechten Linie α', so dafs man

$$A' = \sqrt{B^2 + C^2}, \quad \alpha' = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$$

hat, und führt man die angezeigte Integration aus, so findet man

$$A' = \frac{3 f \mu m \alpha'}{2 a^3 e^3} \left[\text{arc} (\text{tang} = e) - \frac{e}{1 + e^2} \right].$$

Die Mittelkraft der beiden Kräfte A und A' drückt, der Gröſse und Richtung nach, die ganze Wirkung des Ellipsoids auf den Punkt O aus.

Wenn e ein sehr kleiner Bruch ist, so kann man diese Werthe von A und A_1 in sehr convergierende Reihen entwickeln, die nach den Potenzen von e geordnet sind. Da

$$\text{arc} (\text{tang} = e) = e - \frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{5} - \ldots$$

$$\frac{e}{1 + e^2} = e - e^3 + e^5 - \ldots$$

ist, so haben wir

$$A = \frac{\mu f m \alpha}{a^3} \left(1 - \frac{3 e^2}{5} + \ldots\right)$$

$$A' = \frac{\mu f m \alpha'}{a^3} \left(1 - \frac{6 e^3}{5} \ldots\right).$$

Für den Fall, wenn der anziehende Körper eine Kugel, oder $e = o$ ist, ist die Mittelkraft von A und A' nach dem Mittelpunkte gerichtet, und hat dieselbe Intensität, wie in §. 101.

107.

Die Berechnung der Anziehung, die ein gleichartiges Ellipsoid auf einen äuſseren Punkt ausübt, bietet noch viel gröſsere Schwierigkeit dar; man verdankt jedoch Herrn Ivory einen Lehrsatz, vermittelst dessen dieser Fall auf den anderen zurück geführt werden kann, wenn der Punkt im Inneren des Ellipsoids liegt, wodurch die Seitenkräfte der Anziehung durch einfache Integrale ausgedrückt werden können, die den Formeln (c) ähnlich sind. Hier folgt ein Beweis dieses wichtigen Satzes.

Setzt man in der ersten Gleichung (1) des §. 95

$$dm = \varrho \, dx \, dy \, dz$$

und bemerkt, daſs ϱ ein beständiger Factor ist, so hat man

$$A = \mu f \varrho \iiint \frac{(\alpha - x) \, dx \, dy \, dz}{[(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Ich nehme an, daſs die Gleichung der Oberfläche immer

die Gleichung (b) ist, und setze $a x'$, $b y'$, $c z'$ an die Stelle von x, y, z, wodurch diese Gleichung in folgende übergeht:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Zu gleicher Zeit wird der Werth von A

$$A = \mu f \varrho a b c \int\!\!\int\!\!\int \frac{(\alpha - a x')\, dx'\, dy'\, dz'}{[(\alpha - a x')^2 + (\beta - b y')^2 + (\gamma - c z'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

und bezeichnet man durch $\pm x_1$ die Werthe von x', die gleich grofs sind und entgegengesetzte Zeichen haben, welche man aus der vorhergehenden Gleichung ableiten kann, so mufs das Integral in Beziehung auf x' zwischen den Gränzen $x' = -x_1$ und $x' = x_1$ genommen werden. Hierdurch erhält man

$$A = \mu f \varrho b c \left(\int\!\!\int \frac{dy'\, dz'}{[(\alpha - a x_1)^2 + (\beta - b y')^2 + (\gamma - c z')^2]^{\frac{1}{2}}} \right.$$

$$\left. - \int\!\!\int \frac{dy'\, dz'}{[(\alpha + a x_1)^2 + (\beta - b y')^2 + (\gamma - c z')^2]^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Jedes dieser beiden doppelten Integrale mufs auf alle Elemente der halben sphärischen Oberfläche, deren Halbmesser die Einheit ist, und deren Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, ausgedehnt werden. Das Produkt $dy'dz'$ ist die Projection eines beliebigen Elementes auf die Ebene der y und z. Bezeichnet man daher durch ϑ den Winkel, den der Halbmesser, der bis zu diesem Elemente gezogen ist, mit der Axe der x einschliefst, und durch ψ den Winkel, der zwischen der Ebene dieser zwei geraden Linien und der Ebene der x und y enthalten ist, so ist der Flächeninhalt dieses Elementes $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi$, seine Neigung gegen die Ebene der y und z ist der Winkel ϑ, und es folgt daraus

$$dy'\, dz' = \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi$$

als Werth seiner Projection auf diese Ebene. Zu gleicher Zeit hat man

$$x_1 = \cos\vartheta, \quad y' = \sin\vartheta \cos\psi, \quad z' = \sin\vartheta \sin\psi.$$

Die Gränzen der beiden Integrale sind nun $\vartheta = o$ und $\psi = o$, $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ und $\psi = 2\pi$; setzt man aber in dem zweiten $\pi - \vartheta$ statt π, so ist es leicht einzusehen, dafs diese beiden Integrale sich zu einem einzigen vereinigen lassen, welches dieselben Gränzen in Beziehung auf ψ hat, und des-

sen Gränzen in Beziehung auf ϑ, $\vartheta = o$ und $\vartheta = \pi$ werden, so dafs man einfach hat

$$A = \mu f \varrho b c \int_o^\pi \int_o^{2\pi} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi}{R},$$

indem man zur Abkürzung

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2(\alpha a \cos\vartheta + \beta b \sin\vartheta \cos\psi + \gamma c \sin\vartheta \sin\psi)$$
$$+ a^2 \cos^2\vartheta + b^2 \sin^2\vartheta \cos^2\psi + c^2 \sin^2\vartheta \sin^2\psi$$

setzt, und R wie eine positive Gröfse betrachtet.

Die beiden anderen Seitenkräfte B und C kann man ebenso durch doppelte Integrale ausdrücken.

Man betrachte jetzt die Anziehung eines anderen Ellipsoids, welches dieselbe Dichtigkeit ϱ, denselben Mittelpunkt und seine Axen in denselben Richtungen hat, wie das erste. Seyen a_1, b_1, c_1 die drei Halbaxen, die a, b, c entsprechen; man nenne O_1 den Punkt, der diese Anziehung erleidet, α_1, β_1, γ_1 seyen seine Coordinaten, und A_1, B_1, C_1 die Seitenkräfte dieser Kraft, die den drei Axen des Ellipsoids parallel sind. Setzt man noch immer voraus, dafs μ die Masse des angezogenen Punktes sey, so hat man

$$A_1 = \mu f b_1 c_1 \int_o^\pi \int_o^{2\pi} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi}{R_1},$$

wo R_1 das ist, was R wird, wenn man in dessen Werth a, b, c, α, β, γ, in a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1 umändert. Die Werthe von B_1 und C_1 lassen sich auf dieselbe Weise aus denen von B und C ableiten.

Man nehme an, die beiden Ellipsoide hätten dieselben Brennpunkte und daher auch gleiche Excentricitäten, so hat man

$$b^2 = a^2 + h, \quad c^2 = a^2 + k, \quad b_1^2 = a_1^2 + h, \quad c_1^2 = a_1^2 + k,$$

wo h, k, $h - k$ positive oder negative Gröfsen sind, die, ohne Rücksicht auf das Zeichen, die Quadrate der den beiden Körpern gemeinschaftlichen Excentricitäten ausdrücken. Aufserdem nehme man an, dafs der Punkt O_1, der durch das zweite Ellipsoid angezogen wird, auf der Oberfläche des ersten liege, und ebenso der Punkt O, der durch das erste angezogen wird, auf der Oberfläche des zweiten. Nach der Gleichung (b) und der der Oberfläche des zweiten Ellipsoids mufs man

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} = 1 \\ \frac{\alpha^2}{a_1^2} + \frac{\beta^2}{b_1^2} + \frac{\gamma^2}{c_1^2} = 1\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

haben. Seyen endlich p und q zwei gegebene Winkel, und setze man

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 = a \cos p, \quad \beta_1 = b \sin p \cos q, \quad \gamma_1 = c \sin p \sin q, \\ \alpha = a_1 \cos p, \quad \beta = b_1 \sin p \cos q, \quad \gamma = c_1 \sin p \sin q,\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

welche Werthe den vorhergehenden Gleichungen Genüge leisten, und eine besondere Beziehung zwischen den Coordinaten der Punkte O und O_1 stiften. Substituiert man diese Werthe von α, β, γ in den Ausdruck von R^2, und setzt man zugleich die vorhergehenden Werthe von b^2, c^2, b_1^2, c_1^2 hinein, so findet man

$$\begin{aligned}R^2 = a_1^2 + a^2 &+ h\,(\sin^2 p \cos^2 q + \sin^2 \vartheta \cos^2 \psi) \\ &+ k\,(\sin^2 p \sin^2 q + \sin^2 \vartheta \sin^2 \psi) \\ &- 2\,(a_1 a \cos p \cos \vartheta + b_1 b \sin p \cos q \sin \vartheta \cos \psi \\ &+ c_1 c \sin p \sin q \sin \vartheta \sin \psi).\end{aligned}$$

Man sieht aber, ohne den Werth von R_1^2 zu schreiben, daſs er derselbe seyn wird, wie der von R^2; denn man kann den ersteren aus letzterem ableiten, indem man a mit a_1, b mit b_1 und c mit c_1 vertauscht, ohne h und k zu ändern, da diese Gröſsen beiden Ellipsoiden gemeinschaftlich angehören, und es ist offenbar, daſs die letztere Formel durch diese Vertauschungen ihren Werth nicht ändert. Da $R_1 = R$ ist, so enthalten die Werthe von A und A_1 dasselbe doppelte Integral, eliminiert man dasselbe, so hat man

$$A_1 b c = A b_1 c_1.$$

In Beziehung auf die anderen Seitenkräfte erhält man ähnliche Resultate, so daſs man zuletzt, nach den Voraussetzungen, die man rücksichtlich der beiden angezogenen Punkte O und O_1 gemacht hat, die Werthe

$$\frac{A_1}{A} = \frac{b_1 c_1}{b c}, \quad \frac{B_1}{B} = \frac{a_1 c_1}{a c}, \quad \frac{C_1}{C} = \frac{a_1 b_1}{a b} \qquad (3)$$

erhält.

Um den Lehrsatz, den diese drei Gleichungen enthalten, in Worten auszudrücken, nenne man correspondierende

Punkte auf den Oberflächen der beiden Ellipsoide, zwei Punkte, deren Coordinaten sich zu einander verhalten, wie die Halbaxen, mit welchen sie parallel sind. Der correspondierende Punkt des Punktes O_1, der auf der Oberfläche des ersten Ellipsoids liegt, und dessen den Halbaxen a, b, c parallele Coordinaten α_1, β_1, γ_1 sind, ist auf der Oberfläche des zweiten Ellipsoids der Punkt O, dessen den Halbaxen a_1, b_1, c_1 parallele Coordinaten α, β, γ sind, weil man nach den Gleichungen (2)

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{a}{a_1}, \quad \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{b}{b_1}, \quad \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{c}{c_1}$$

hat.

Dies vorausgesetzt, so folgt aus den Gleichungen (3) der nachstehende Lehrsatz:

Wenn man zwei gleichartige Ellipsoide hat, die denselben Mittelpunkt und dieselben Brennpunkte haben, so verhält sich die Anziehung nach jeder Axe, die einer dieser Körper auf einen Punkt ausübt, der auf der Oberfläche des anderen liegt, zu der Anziehung, die dieser zweite Körper auf den correspondierenden Punkt der Oberfläche des ersten ausübt, wie das Produkt der zwei anderen Axen des ersten Ellipsoids zu dem Produkte der zwei anderen Axen des zweiten.

108.

Wenn zwei verschiedene Ellipsoide denselben Mittelpunkt und dieselben Brennpunkte haben, wie man es hier voraussetzt, so ist das eine ganz in dem anderen enthalten; wenn daher der Punkt O aufserhalb des ersten Ellipsoids liegt, so liegt der Punkt O_1 innerhalb des zweiten. Um nun, vermittelst des vorhergehenden Lehrsatzes, die Anziehung eines gegebenen Ellipsoids auf einen ebenfalls gegebenen Punkt O, der aufserhalb desselben liegt, zu bestimmen, lasse man durch diesen Punkt die Oberfläche eines zweiten Ellipsoids gehen, welches denselben Mittelpunkt und dieselben Brennpunkte, wie das erste hat. Vermittelst der Formeln, die sich auf einen innerhalb eines Ellipsoids liegenden Punkt beziehen, kann man die drei Seitenkräfte A_1, B_1, C_1, der Anziehung, welche der

zweite Körper auf den Punkt O_1 der Oberfläche des ersten, welcher der correspondierende Punkt des Punktes O ist, ausübt, bestimmen. Die Gleichungen (3) geben alsdann die Seitenkräfte A, B, C der Anziehung, die das gegebene Ellipsoid auf den gegebenen Punkt ausübt. Das Ganze kommt daher darauf zurück, die Werthe der drei Halbaxen a_1, b_1, c_1 des zweiten Ellipsoids aus den Werthen der Halbaxen des ersten, die durch a, b, c ausgedrückt worden sind, und aus den Werthen der Coordinaten α, β, γ des gegebenen Punktes O zu finden.

Um einen bestimmten Fall zu behandeln, nehme ich an, es sey a die kleinste der drei Gröſsen a, b, c, wodurch die Werthe der Gröſsen h und k im vorhergehenden §. positiv werden. Auch nenne ich u das Quadrat von a_1; so hat man

$$a_1 = \sqrt{u}, \quad b_1 = \sqrt{u+h}, \quad c_1 = \sqrt{u+k}$$

und es muſs nur noch die unbekannte Gröſse u bestimmt werden, die eine reelle und positive Gröſse seyn muſs. In Folge der zweiten Gleichung (1) hat man

$$\alpha^2 + \frac{\beta^2 u}{u+h} + \frac{\gamma^2 u}{u+k} = u. \qquad (4)$$

Diese Gleichung, die in Beziehung auf u vom dritten Grade ist, hat wenigstens eine reelle positive Wurzel. Denn läſst man u von Null bis zum Unendlichen wachsen, so ist der erste Theil der Gleichung im Anfange gröſser, und später kleiner als der zweite; so daſs es wenigstens einen positiven Werth von u giebt, der sie gleich macht. Auſserdem behaupte ich, daſs es nur einen solchen Werth giebt. Denn nimmt man an, daſs es zwei u und u' gäbe, so müſste man zu gleicher Zeit

$$\frac{\alpha^2}{u} + \frac{\beta^2}{u+h} + \frac{\gamma^2}{u+k} = 1$$

$$\frac{\alpha^2}{u'} + \frac{\beta^2}{u'+h} + \frac{\gamma^2}{u'+k} = 1$$

haben, und wenn man diese Gleichungen von einander abzieht, und den Factor $u'-u$ wegläſst, der in allen Gliedern vorkommt, so hätte man

$$\frac{\alpha^2}{uu'} + \frac{\beta^2}{(u+h)(u'+h)} + \frac{\gamma^2}{(u+k)(u'+k)} = o,$$

was offenbar unmöglich ist. Es giebt also nur ein Ellipsoid, welches denselben Mittelpunkt und dieselben Brennpunkte, wie ein gegebenes Ellipsoid hat, und aufserdem durch einen gegebenen Punkt geht. Die Gröfse u, von welcher die drei Halbaxen a_1, b_1, c_1 abhängen, ist durch die Gleichung (4) bestimmt, was gefunden werden sollte.

109.

Man bemerke, dafs der Lehrsatz in §. 107 auf alle Gesetze der Anziehung pafst, die eine Function des Abstandes sind. Denn der so eben gegebene Beweis stützt sich auf die Form, die der Ausdruck von R^2 annimmt, welche für die beiden Punkte O und O_1 dieselbe ist, nicht aber auf die Form der Function R, die das Gesetz der Anziehung ausdrückt.

Wenn die beiden Ellipsoide concentrische Kugeln sind, so ist die Anziehung, die eines derselben auf alle Punkte der Oberfläche der anderen ausübt, überall dieselbe, und es ist alsdann nicht nöthig, dafs die Punkte O und O' correspondierende Punkte seyen. Nennt man a und a_1 die Halbmesser dieser beiden Kugeln, D die Anziehung, welche die Kugel, deren Halbmesser a ist, auf einen Punkt der sphärischen Oberfläche, deren Halbmesser a_1 ist, ausübt, und D_1 die Anziehung, welche die Kugel, deren Halbmesser a_1 ist, auf einen Punkt der sphärischen Oberfläche, deren Halbmesser a ist, ausübt, welche Kräfte nach den Halbmessern, die nach den angezogenen Punkten gezogen sind, gerichtet seyn werden, so hat man

$$D : D_1 = a^2 : a_1^2,$$

wie auch das Gesetz der Anziehung, die eine Function des Abstandes ist, beschaffen seyn mag.

Es ist leicht, die Richtigkeit dieser Proportion in dem gewöhnlichen Falle zu beweisen, wenn die Anziehung im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats des Abstandes steht. Nimmt man nemlich, nach den Resultaten des §. 101, an, dafs $a > a_1$ ist, so ist die Anziehung D, welche die Kugel, deren Halbmesser a ist, auf einen innerhalb derselben gelegenen Punkt ausübt, der vom Mittelpunkte derselben um a_1 absteht, und dessen Masse μ ist,

$$D = \frac{4\,\pi\,\mu\,f\,a_1}{3}.$$

Die Anziehung D_1, welche die Kugel, deren Halbmesser a_1 ist, auf einen aufserhalb derselben gelegenen Punkt ausübt, dessen Masse ebenfalls μ ist, und der um a von ihrem Mittelpunkte absteht, ist

$$D_1 = \frac{4\,\pi\,\mu\,f\,a_1^3}{3\,a^2},$$

vergleicht man nun die Werthe von D und D_1, so sieht man, dafs sie sich zu einander verhalten, wie die Quadrate der Halbmesser a und a_1.

Zweites Buch.

Dynamik.

Erster Theil.

Erstes Kapitel.

Von der geradlinigen Bewegung und dem Maafse der Kräfte.

I. Formeln für die geradlinige Bewegung.

110.

Die einfachste Bewegung, die ein materieller Punkt annehmen kann, ist die Bewegung in einer geraden Linie und bei welcher dieser Punkt in gleichen Zeiten gleiche Räume beschreibt. Diese geradlinige Bewegung nennt man die gleichförmige; sie dient als Vergleichungsmittel für alle anderen Bewegungen.

Wenn sich das Verhältnifs der durchlaufenen Räume zu den Zeiten, die zu ihrer Beschreibung angewandt worden sind, beständig ändert, so ist die Bewegung eine veränderliche; wenn diese Veränderung dagegen nur nach Zeiträumen, die eine endliche Gröfse haben, eintritt, so ist die Bewegung nur eine Folge gleichförmiger Bewegungen.

Bei jeder beliebigen Bewegung ist der Raum, den der Körper durchlauft, oder allgemeiner, sein Abstand von einem festen Punkte, der auf der Linie, die er beschreibt, genommen wird, eine Function der Zeit, die seit einer angenommenen Epoche verflossen ist. Nennt man diese Zeit t, und diesen Abstand x, so hat man daher in allen Fällen

$$x = Ft,$$

und die verschiedenen Arten der Bewegung werden sich durch die Form dieser Function Ft von einander unterscheiden. Die Veränderliche t kann positiv oder negativ seyn, ihre positiven Werthe entsprechen Epochen, die später sind als diejenige, von welcher an man die Zeit zählt, und die negativen Werthe entsprechen Epochen, die ihr vorangehen.

Nennt man, bei der gleichförmigen Bewegung, a den Raum, der in jeder Zeiteinheit durchlaufen wird, und b den Abstand des Körpers von einem festen Punkte im Anfange der Zeit t, d. h. den Werth von x, der $t = o$ entspricht, so hat man in einem gewissen Augenblicke

$$x = b + at,$$

denn nach der Erklärung, die wir von der gleichförmigen Bewegung gegeben haben, mufs der Raum $x - b$, der in der Zeit t beschrieben wird, dem beständigen Raume a, so viel mal genommen, als t Einheiten enthält, gleich seyn.

111.

Es soll hier weder der Begriff der Zeit, noch des Raumes erklärt werden; in der Geometrie und Dynamik ist es hinreichend, dafs wir die Dimensionen der Körper und die Dauer ihrer Bewegungen messen können. Das Maafs der Länge gründet sich auf das Aufeinanderlegen und läfst sich ohne Schwierigkeit begreifen, das Maafs der Zeit dagegen erfordert einige Erläuterung.

Es würde offenbar ein fehlerhafter Schlufs seyn, wenn man einerseits sagte, dafs die gleichförmige Bewegung diejenige ist, bei welcher die durchlaufenen Räume den Zeiten proportional sind, und andererseits, dafs die gleichförmige Bewegung das Maafs der Zeit ist, d. h. dafs dieselbe den Räumen proportional ist, die bei dieser Bewegung durchlaufen werden. Der Begriff gleicher Zeiten und das Maafs der Zeit ist aber nicht nothwendig auf irgend ein besonderes Gesetz der Bewegung gegründet, und man kann sie daher in der Erklärung der gleichförmigen Bewegung, so wie jeder anderen Bewegung, als bekannt voraus setzen.

Man denke sich nemlich, dafs völlig identische Körper sich nach einander bewegen, und dafs jeder dieser Körper,

während der ganzen Dauer der Bewegung, sich genau in demselben Zustande befindet, wie derjenige, der ihm vorausgegangen ist; offenbar werden alsdann alle diese Bewegungen, deren Gesetz unbekannt ist, in gleichen Zeiten ausgeführt, und ihre Zahl kann als Zeitmaafs dienen. Hat man z. B. schwere Körper, die durch eine feste horizontale Axe gehalten werden, und die man alle gleichviel von der Lage des Gleichgewichtes entfernt und alsdann sich selbst überläfst, so dafs die Bewegung des zweiten anfängt, sobald der erste in diese Lage zurück gekehrt ist, und ebenso die des dritten, sobald der zweite in diese Lage zurück gekehrt ist u. s. w., so kann es, möglicher Weise, zwischen diesen auf einander folgenden Bewegungen, die in gleichen Zeiten vollführt werden, gar keinen Unterschied geben. Es wird in der Folge gezeigt werden, dafs es nicht nothwendig ist, dafs verschiedene Körper sich nach einander bewegen, und dafs die auf einander folgenden Schwingungen eines und desselben Körpers, die er auf beiden Seiten um seine Lage des Gleichgewichtes vollführt, ebenfalls gleichzeitige, oder von gleicher Dauer, sind. Die vorhergehende Betrachtung, die keine Auflösung einer mechanischen Aufgabe voraussetzt, ist für den gegenwärtigen Zweck hinreichend.

Die Astronomen haben durch sehr genaue und sehr häufig wiederholte Beobachtungen gefunden, dafs die scheinbare Umdrehung der Himmelskugel um die Erde völlig unveränderlich ist, und auch die Theorie giebt keine Ungleichheit in der Bewegung der Umdrehung der Erde an, die eine solche scheinbare Veränderlichkeit hervorbringen könnte. Man nennt die unveränderliche Dauer dieser Umdrehung einen Sterntag, welche Dauer kleiner ist, als die der täglichen Umdrehung der Sonne. Die letztere ist nicht zu allen Zeiten des Jahres genau dieselbe; im gewöhnlichen Gebrauche nimmt man ihre mittlere Gröfse als Zeiteinheit, und nennt sie einen mittleren Tag. Ich werde in diesem Werke die Eintheilung des Tages in 24 Stunden, der Stunde in 60 Minuten, der Minute in 60 Secunden beibehalten, so dafs die Secunde der 86400ste Theil eines mittleren Tages ist. Der Sterntag hat nur 86164,09 Secunden; hieraus folgt, dafs man, wenn eine Zeitbestimmung, die in mittleren Tagen angegeben ist, in

Sterntagen ausgedrückt werden soll, dieselbe mit dem Verhältnifs von 86400 zu 86164,09 oder mit der beständigen Zahl 1,0027379 multiplicieren mufs.

112.

Eine gleichförmige Bewegung unterscheidet sich von einer anderen durch die Gröfse des Raumes, die in der Zeiteinheit durchlaufen wird. Bei jeder gleichförmigen Bewegung nennt man diesen beständigen Raum die Geschwindigkeit des Körpers, will man sich aber genau ausdrücken, so mufs man sagen, dafs dieser Raum blos das Maafs der Geschwindigkeit, nicht aber die Geschwindigkeit selbst ist. Die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes, der in Bewegung ist, ist etwas in diesem Punkte Befindliches, das ihn bewegt, und von einem materiellen Punkte, der in Ruhe ist, unterscheidet, aber keiner weiteren Erklärung fähig ist*). Die Geschwindigkeit, die, bei der gleichförmigen Bewegung, durch den Raum ausgedrückt wird, den der Körper in jeder Zeiteinheit beschreibt, setzt voraus, dafs man als Einheit der Geschwindigkeit die des Körpers annimmt, der die Längeneinheit in der Zeiteinheit beschreibt.

Bei jeder veränderlichen Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit des Körpers in unendlich kleinen Zwischenstufen, und sie ist eine Function der Zeit, die man, wie sogleich gezeigt werden soll, aus derjenigen findet, die den durchlaufenen Raum angiebt. Man mufs jedoch zuvor die Art von Bewegung kennen lernen, die ein materieller Punkt in Folge seiner erlangten Geschwindigkeit annimmt, wenn die Kraft, die ihm diese Bewegung mitgetheilt hat, indem sie während einer gewissen Zeit wirkte, zu wirken aufhört, und der Körper sich selbst überlassen wird.

113.

Zuerst ist es einleuchtend, dafs der Punkt, wenn er sich bis zu dieser Zeit in gerader Linie bewegt hat, auch ferner sich nach der Verlängerung der Linie, die er beschrieb, bewegen wird. Denn es ist kein Grund vorhanden, weswegen sich

---

*) Man vergl. Zusatz III. Anm. des Uebers.

dieser materielle Punkt, von der einmal angenommenen Richtung, eher nach der einen als nach der anderen Seite entfernen sollte. Jedoch können wir nicht a priori behaupten, daſs sich die Geschwindigkeit, die er einmal angenommen hat, nicht von selbst vermindern und zuletzt ganz aufhören könne. Nur die Erfahrung und die Induction können diese Frage entscheiden.

Nun sehen wir aber wirklich, daſs die Körper desto länger im Zustande der Bewegung beharren, je mehr man die Hindernisse, die sich derselben entgegensetzen, wie die Reibung und der Widerstand der Mittel, durch welche sie gehen, vermindert, und so oft man eine Aenderung in der Geschwindigkeit bemerkt, so findet man, daſs der Grund davon einer fremden Einwirkung zugeschrieben werden muſs. Dieses berechtigt uns daher zu dem Schlusse, daſs, wenn es möglich wäre, daſs ein materieller Punkt, nachdem er einmal in Bewegung gesetzt worden ist, ferner durch keine weitere Kraft getrieben würde, und kein weiteres Hinderniſs zu überwinden hätte, die Bewegung desselben geradlinig und gleichförmig, d. h. die einfachste aller Bewegungen, seyn würde.

So z. B., wenn ein Stückchen Eisen, im leeren Raume, auf einer horizontalen Ebene und ohne Reibung, durch die bloſse Wirkung des Pols eines Magnetstabes in Bewegung gesetzt wird, und man plötzlich die Anziehungskraft dieses Pols aufhebt, indem man einen gleich starken und entgegengesetzten Pol daneben anbringt, so wird das Stückchen Eisen seine Bewegung gegen den ersten Pol fortsetzen; seine Bewegung wird aber gleichförmig und seine Geschwindigkeit mehr oder weniger beträchtlich, je nachdem man die anziehende Kraft eine kürzere oder längere Zeit hindurch wirken lieſs.

Die Unmöglichkeit, in der sich alle materiellen Punkte befinden, sich von selbst in Bewegung zu setzen, oder die ihnen mitgetheilte Bewegung zu ändern, ist das, was man die Trägheit der Materie nennt. Dieses Wort will aber nicht sagen, daſs die Materie überhaupt unfähig sey zu wirken, denn im Gegentheile findet jeder materielle Punkt immer in der Wirkung anderer materieller Punkte das Princip seiner Bewegung, nie aber in sich selbst.

114.

Am Ende der Zeit t, und wenn der Körper sich in der Entfernung x von einem festen Punkte befindet, der auf der geraden Linie, die er beschreibt, liegt, sey v seine Geschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung, die statt haben würde, wenn die Kraft, die auf den Körper wirkt, in diesem Augenblicke aufhörte zu wirken. Da aber die Wirkung der Kraft fortdauert, so wird der Raum dx, den der Körper im Augenblicke dt beschreibt, in Folge dieser Wirkung und der Geschwindigkeit v beschrieben; der Theil von dx, der dieser Geschwindigkeit entspricht, welcher bei einer gleichförmigen Bewegung beschrieben worden wäre, ist vdt. Nennt man nun ε den Theil dieses Raumes, der der Wirkung entspricht, welche die Kraft während des Augenblickes dt ausübt, so hat man

$$dx = vdt + \varepsilon.$$

Da sich aber die Geschwindigkeit in unendlich kleinen Zwischenstufen ändert, und diese Aenderungen lediglich von der Wirkung der Kraft herrühren, die auf den beweglichen Körper wirkt, so folgt hieraus, dafs diese Wirkung, in der Zeit dt nur eine unendlich kleine Geschwindigkeit hervorbringen kann. Daher kann, vermöge dieser Wirkung, nur ein unendlich kleiner Raum des zweiten Ranges beschrieben werden, der kleiner ist als derjenige, welcher bei gleichförmiger Bewegung beschrieben würde, wenn der Körper im Anfange der Zeit dt die ganze Geschwindigkeit erhielte, die während der Dauer dieser Zeit hervorgebracht wird. Man kann daher ε im Verhältnifs zu vdt in der vorhergehenden Gleichung vernachlässigen, und alsdann hat man

$$v = \frac{dx}{dt}$$

als Ausdruck der Geschwindigkeit bei irgend einer beliebigen Bewegung *).

Wollte man den Theil ε des Raumes kennen, den der Körper in der Zeit dt, in Folge der Kraft, die ihn treibt, durchlauft, so müfste man die höheren Potenzen von dt in Rechnung bringen. Nennt man nun x' die Entfernung des

*) Vergl. Zusatz III. Anmerk. des Uebers.

Körpers von dem festen Punkte am Ende der Zeit $t + dt$, so hat man, vermöge des Taylor'schen Lehrsatzes,

$$x' - x = \frac{dx}{dt}\, dt + \frac{\frac{1}{2} d^2x}{dt^2}\, dt^2 + \ldots.$$

als vollständigen Ausdruck des Raumes, der während der Zeit dt durchlaufen wird. Das erste Glied, welches $= v dt$ ist, ist der Raum, der von der Geschwindigkeit herrührt, die der Körper nach der Zeit t erlangt hat. Vernachlässigt man daher die Glieder des dritten Ranges und der höheren Ränge, im Verhältnisse zu denen des zweiten Ranges, so hat man

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2}\, dt^2,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} dv dt$$

als Theil des Raumes $x' - x$, den der Körper, vermöge der Wirkung der Kraft, durchlauft. Da die Geschwindigkeit, die zu gleicher Zeit durch diese Wirkung hervorgebracht wird, dv ist, so sieht man, daſs der Raum, den der Körper gleichförmig, während dieser Zeit dt beschreiben würde, wenn er im Anfange diesen ganzen Zuwachs von Kraft erhielte, dem Produkte aus dv und dt, oder dem Doppelten des Raumes ε, den er wirklich beschreibt, gleich wäre.

115.

Wenn der durchlaufene Raum in einer Function der Zeit ausgedrückt ist, so kann man die entsprechende Geschwindigkeit unmittelbar daraus vermittelst der Gleichung $v = \frac{ds}{dt}$ ableiten. Da z. B. die Körper, in der Atwood'schen Maschine, Räume beschreiben, die wie die Quadrate der Zeiten wachsen, so kann man daraus schlieſsen, daſs ihre erlangten Geschwindigkeiten den Zeiten proportional seyn müssen, während welcher die Räume durchlaufen werden, und die Maschine giebt wirklich das Mittel an die Hand, dies zu bewahrheiten.

Ist umgekehrt die Geschwindigkeit, nach der Definition der Bewegung, als Function der Zeit gegeben, so kann man daraus, durch Integration, den Werth des durchlaufenen Raumes finden. So ist, nach der gleichförmigen Bewegung, die einfachste diejenige, bei welcher die Geschwindigkeit in glei-

chen Zeiten um gleiche Gröfsen zu- oder abnimmt, und die man eben deswegen eine gleichförmig beschleunigte oder verminderte nennt. Nennt man daher g den beständigen positiven oder negativen Zuwachs der Geschwindigkeit in jeder Zeiteinheit, und a die Geschwindigkeit des Körpers, wenn $t = o$ ist, so ist die Geschwindigkeit v in irgend einem Augenblicke bei dieser Bewegung

$$v = a + gt.$$

Multipliciert man durch dt, und integriert alsdann, so hat man

$$x = b + at + \frac{1}{2}gt^2$$

als Abstand des Körpers von einem festen Punkte der geraden Linie, die er beschreibt, wo b diesen Abstand im Anfange der Zeit t bedeutet.

Wenn die beiden Constanten a und b Null sind, so hat man einfach

$$v = gt, \quad x = \frac{1}{2}gt^2.$$

Der durchlaufene Raum ist alsdann dem Quadrate der Zeit proportional, und die Geschwindigkeit, die der Körper am Ende einer Zeit t erlangt hat, ist so beschaffen, dafs er vermöge dieser Geschwindigkeit allein, in einer Zeit, die gleich t ist, einen Raum vt beschreiben würde, der das Doppelte des Raumes ist, den er durchlaufen hat.

Hieraus folgt, dafs man, wenn man den Raum kennt, der in der Zeiteinheit durchlaufen wird, hieraus, indem man das Doppelte nimmt, den Werth der beständigen Geschwindigkeit g findet, durch welche sich irgend eine gleichförmig beschleunigte Bewegung von einer anderen Bewegung derselben Art unterscheidet.

Eine solche Bewegung ist die der schweren Körper, die im leeren Raume fallen. An demselben Orte ist die Geschwindigkeit g für alle ihre Punkte dieselbe, so dafs sie alle, vermöge einer und derselben Bewegung dieser Art, verticale gerade Linien beschreiben. Diese Geschwindigkeit ändert sich von einem Orte zum anderen; nimmt man die Secunde als Einheit der Zeit, und das Meter als Längeneinheit, so giebt die Erfahrung

$$g = 9^m, 80896$$

auf der Pariser Sternwarte.

Eine Kraft, welche in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten hervorbringt, ist für uns eine **beständige Kraft.** So ist die Schwere eine beständige Kraft, was hier sagen will, dafs sie mit derselben Intensität auf Körper wirkt, die schon beliebige Geschwindigkeiten erlangt haben, nicht aber, wie in §. 59, dafs ihre Intensität in der ganzen Ausdehnung eines Körpers von gewöhnlichen Dimensionen dieselbe ist.

116.

Die Gesetze des Gleichgewichtes setzen durchaus keine besondere Beziehung zwischen den Kräften und den entsprechenden Geschwindigkeiten voraus, und um die Aufgaben der Statik zu lösen, ist es hinreichend, die numerischen Verhältnisse der Kräfte zu kennen, wie sie in §. 5 erklärt worden sind. Die Gesetze der Bewegung dagegen hängen von dem Verhältnisse ab, welches zwischen den Gröfsen der Bewegungen, die durch gegebene Kräfte hervorgebracht werden, statt hat. Dieses Verhältnifs, das man, um die Aufgabe der Dynamik zu lösen, nothwendig kennen mufs, ist dasselbe, wie das der Kräfte, wie nun bewiesen werden soll.

Ein materieller Punkt habe am Ende der Zeit t den Raum x durchlaufen, und die Geschwindigkeit v erlangt. Man nehme an, dafs zu diesem Zeitpunkte zwei gegebene Kräfte f und f' zu gleicher Zeit auf den Körper, nach der Richtung seiner Bewegung, wirken. Man bezeichne durch u die unendlich kleine Geschwindigkeit, welche die Kraft f dem Körper mittheilen würde, wenn sie allein während der unendlich kleinen Zeit τ wirkte, und durch u' die Geschwindigkeit, die in derselben Zeit durch die Kraft f' hervorgebracht würde, wenn die Kraft f nicht vorhanden wäre. Ich behaupte nun, dafs das gleichzeitige Wirken dieser zwei Kräfte die Geschwindigkeiten, die sie getrennt hervorbringen, nicht ändern wird, und dafs die Geschwindigkeit, die durch die Kraft $f + f'$ hervorgebracht wird, $u + u'$ seyn wird, d. h. dafs die Geschwindigkeit, die der Körper am Ende der Zeit $t + \tau$ erlangt hat, $v + u + u'$ seyn wird.

Der Zuwachs der Geschwindigkeit des Körpers kann nemlich nur von der Zeit τ abhängen, der sie proportional ist, und von dem Zustande des materiellen Punktes, oder, mit

anderen Worten, von der Lage und der Geschwindigkeit, die er während der Zeit τ hat. Die Wirkung der Kraft f' müſste daher auf diesen Zustand Einfluſs haben, wenn sie die Geschwindigkeit modificieren sollte, die durch die Kraft f hervorgebracht wird. Während der Zeit τ kann sich aber der Abstand des Körpers von einem festen Punkte und seine Geschwindigkeit nur um eine unendlich kleine Gröſse ändern, welche man im Verhältnisse zu x und v vernachlässigen kann; die Aenderungen der Abstände von anderen festen oder beweglichen Punkten, von welchen die Kräfte f und f' ausgehen könnten, kann man ebenfalls vernachlässigen. Daher kann die Geschwindigkeit, welche die Kraft f, während des Zeitraumes τ, hervorbringt, auf keine Weise durch die gleichzeitige Wirkung der Kraft f' abgeändert werden, und ebenso verhält es sich mit der Geschwindigkeit, welche von der Kraft f' herrührt, die ebenfalls nicht durch die Wirkung von f geändert werden kann. Die ganze Geschwindigkeit, welche daher dem Körper während der Zeit τ, durch die Kraft $f+f'$ mitgetheilt wird, ist demnach $=u+u'$. *)

Ebenso sieht man, daſs, wenn die Kraft f im Sinne der Geschwindigkeit v und die Kraft f' in entgegengesetztem Sinne wirkt, der Zuwachs der Geschwindigkeit, der durch die Kraft $f-f'$ hervorgebracht wird, gleich $u-u'$ seyn wird.

Wie auch jede der Kräfte f und f' beschaffen seyn mag, sobald sie dieselbe Geschwindigkeit u, in derselben unendlich kleinen Zeit hervorbringen, so sind sie für uns gleiche Kräfte. Bringt man sie in entgegengesetztem Sinne an, so werden sie die Geschwindigkeit des Körpers nicht ändern, wenn er schon in Bewegung ist; ist er in Ruhe, so wird Gleichgewicht statt finden, was mit der Erklärung der gleichen Kräfte in §. 5 übereinstimmt.

Wenn die Kraft, die auf den Punkt im Sinne der erlangten Geschwindigkeit wirkt, zwei- drei- viermal u. s. w. so groſs wird, so wird die Geschwindigkeit, welche sie in der Zeit τ hervorbringt, nach demselben Verhältnisse wachsen. Und umgekehrt, wird diese Kraft auf die Hälfte, den dritten,

*) Dieser Beweis scheint durchaus nicht strenge zu seyn. Man sehe die weitere Ausführung in Zusatz III. Anmerk. des Uebers.

vierten Theil u. s. w. vermindert, so wird die Geschwindigkeit, die sie hervorbringt, in demselben Verhältnisse abnehmen, und im Allgemeinen werden die unendlich kleinen Geschwindigkeiten, die während gleicher Zeiten hervorgebracht werden, geschehe dies nun im Sinne der erlangten Geschwindigkeit oder in entgegengesetztem Sinne, oder auch die unendlich kleinen Geschwindigkeiten, die einem Körper, der in Ruhe ist, mitgetheilt werden, sich zu einander verhalten, wie die Intensitäten der entsprechenden Kräfte.

Auf diesem allgemeinen Principe beruht die Ausmessung der Kräfte in der Dynamik. Gewöhnlich stellt man es als Hypothese auf, wir geben es hier als eine nothwendige Folge des Umstandes, daſs die Geschwindigkeiten, die durch beliebige Kräfte, in unendlich kleinen Zeiträumen hervorgebracht werden, immer unendlich klein sind, und daſs zu gleicher Zeit die Ortsveränderungen der bewegten Punkte ebenfalls unendlich klein sind.

117.

Wenn die Kräfte, die man unter einander vergleichen will, beständige Kräfte sind, so daſs jede derselben, während der ganzen Dauer der Bewegung, gleiche Geschwindigkeiten in gleichen Zeiten hervorbringt (§. 115), so verhalten sich ihre Intensitäten zu einander, wie die Geschwindigkeiten, die sie in irgend einer beliebigen Zeit demselben materiellen Punkte mittheilen. Wenn daher diese Geschwindigkeiten durch die Beobachtung gegeben sind, so kann man daraus das Verhältniſs der Kräfte finden, und umgekehrt, wenn dieses Verhältniſs a priori gegeben ist, so kann man es für das der Kräfte nehmen.

Man bezeichne z. B. durch Π und Π' die Intensitäten der Schwere in zwei verschiedenen Breiten, und nehme an, daſs man, an diesen beiden Orten der Erde, die Geschwindigkeiten g und g' bestimmt habe, welche die Körper, die im leeren Raume vertical fallen, in einer Secunde erlangen, so hat man

$$\Pi : \Pi' = g : g'.$$

Das Verhältniſs dieser Kräfte Π und Π' ist auch das der Gewichte eines und desselben Körpers, oder zweier ho-

mogener Körper, die dasselbe Volumen haben, in diesen zwei Breiten. Die Beobachtung zeigt, dafs die Geschwindigkeiten, die von der Schwere herrühren, zunehmen, wenn man von dem Aequator nach dem Pole hingeht, und dafs der ganze Zuwachs ungefähr $\frac{1}{200}$ der kleinsten Geschwindigkeit beträgt. Hieraus folgt, dafs das Gewicht eines und desselben Körpers, den man vom Aequator nach dem Pole hin bringt, um $\frac{1}{200}$ zunimmt, und dafs, wenn die Gewichte zweier homogener Körper, die sich an diesen zwei Punkten der Erde befinden, im Gleichgewichte seyn sollen, das Gewicht des Körpers, der sich am Aequator befindet, das des Körpers, der am Pole ist, um $\frac{1}{200}$ übertreffen mufs.

Seyen ferner Π die Intensität der Schwere in verticaler Richtung, und Π_1 ihre Seitenkraft, die nach einer geraden Linie wirkt, welche mit ihrer Richtung den Winkel α einschliefst. Nach der Regel des Parallelogramms der Kräfte hat man

$$\Pi_1 = \Pi \cos \alpha,$$

und wenn man g und g_1 die Geschwindigkeiten nennt, welche in der Einheit der Zeit durch diese zwei constanten Kräfte hervorgebracht werden, die getrennt auf denselben materiellen Punkt wirken, so giebt das Verhältnifs

$$g : g_1 = \Pi : \Pi_1$$

auch

$$g_1 = g \cos \alpha.$$

Wenn dieser schwere materielle Punkt auf einer geneigten Ebene liegt, die mit der horizontalen Ebene einen Winkel einschliefst, der gleich $90^0 - \alpha$ ist, so kann man die Kraft Π in zwei andere zerlegen, von welchen eine senkrecht gegen die gegebene Ebene wirkt, und daher durch deren Widerstand aufgehoben wird, die andere dagegen nach dieser Ebene gerichtet, und daher der Kraft Π_1 gleich ist. Diese letztere Kraft bringt im leeren Raume die Bewegung hervor, wenn man von der Reibung des Körpers gegen die geneigte Ebene absieht. Diese Bewegung, welche von einer beständigen Kraft herrührt, wird daher gleichförmig beschleunigt seyn, und wenn man x_1 und v_1, bezüglich den am Ende der Zeit t durchlaufenen Raum und die alsdann erlangte Geschwindigkeit nennt, so hat man

$$v_1 = g_1 t, \quad x_1 = \tfrac{1}{2} g_1 t^2;$$

in welche Gleichungen man den vorhergehenden Werth von g_1 setzen muſs.

Dieses Beispiel ist sehr dazu geeignet, zu zeigen, wie nothwendig es ist, a priori das Verhältniſs der Geschwindigkeiten finden zu können, die von Kräften herrühren, deren Verhältniſs bekannt ist. Denn wenn man den Werth von g_1 nicht aus der Geschwindigkeit g, die durch die Beobachtung gegeben ist, ableiten könnte, und man, um diese letzteren Gleichungen anzuwenden, auch den Werth von g_1, der jedem Werthe des Winkels α entspricht, durch die Erfahrung bestimmen müſste, so würde die Dynamik fast nur eine experimentale Wissenschaft seyn.

118.

Um eine veränderliche Kraft zu messen, muſs man die Wirkung derselben während einer unendlich kleinen Zeit betrachten, während welcher man sie als eine beständige ansehen kann. Sey daher φ, bei einer beliebigen geradlinigen Bewegung, die Kraft, welche, am Ende der Zeit t, auf den bewegten Körper wirkt, und die wir wie eine positive oder negative Gröſse betrachten, je nachdem diese Kraft im Sinne der erlangten Geschwindigkeit oder in entgegengesetztem Sinne wirkt. Da diese Geschwindigkeit in demselben Augenblicke v ist, so ist sie $v + dv$ am Ende der Zeit $t + dt$, so daſs die Kraft φ dem Körper in der Zeit dt die Geschwindigkeit dv mitgetheilt hat. Bezeichnet man daher durch Π eine bekannte beständige Kraft, welche die Geschwindigkeit g in der Zeiteinheit hervorbringt, und daher dem Körper in der Zeit dt die Geschwindigkeit gdt mittheilt, so hat man

$$\varphi : \Pi = dv : gdt,$$

und hieraus folgt

$$\varphi = \frac{\Pi dv}{gdt}.$$

Wenn man eine Längeneinheit und eine Zeiteinheit willkührlich gewählt hat, so kann man die beständige Gröſse g und den Werth von $\frac{dv}{dt}$, der am Ende einer gegebenen Zeit statt hat, finden. Diese Formel giebt alsdann, für denselben Augenblick, das numerische Verhältniſs der Kraft φ zur be-

kannten Kraft Π, und wenn diese die Schwere ist, so ist dies Verhältnifs das der Kraft φ zum Gewichte des Körpers, auf welchen sie wirkt, so dafs dieser materielle Punkt, der von der Schwerkraft, und in entgegengesetztem Sinne von der Kraft φ getrieben wird, im Gleichgewichte bleiben würde, wenn man z. B.

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = 1$$

finden würde.

Man kann die vorhergehende Formel vereinfachen, wenn man Π und g als Einheiten nimmt, wodurch sie in

$$\varphi = \frac{dv}{dt}$$

übergeht. Die Einheit der Kraft ist alsdann die beständige Kraft, welche dem Körper, während der Einheit der Zeit, eine Geschwindigkeit mittheilt, die durch die Längeneinheit dargestellt wird, so dafs die Einheit der Kraft, wenn die zwei letzteren Einheiten die Secunde und das Meter sind, ungefähr der zehnte Theil des Gewichtes des Körpers ist, vermöge des in §. 115 angegebenen Werthes von g.

Man bemerke, dafs dieses Maafs $\frac{dv}{dt}$ der veränderlichen Kraft φ die Geschwindigkeit ist, welche eine beständige Kraft in der Einheit der Zeit hervorbringen würde, wenn sie während dieser Zeit dieselbe Intensität behielte, welche die Kraft φ während der Zeit dt hat. So hängt, bei der Bewegung eines Eisentheilchens zum Pole eines Magneten hin, die wir schon früher (§. 113) als Beispiel gebraucht haben, die Kraft φ von dem Abstande vom Pole ab, und ist daher veränderlich; nimmt man aber an, dafs der Pol in einem gegebenen Augenblicke von dem Eisentheilchen zurück weicht, so dafs der Abstand derselben constant wird, so wird die Kraft φ ebenfalls constant, die Bewegung geht in eine gleichförmig beschleunigte über, und die Zunahme der Geschwindigkeit, die in der Zeiteinheit statt hat, ist das Maafs dieser Kraft für den Augenblick, in welchem sie constant geworden ist.

Berücksichtigt man den Werth von ε, der in §. 114 gefunden worden ist, so kann man auch schreiben

$$\varphi = \frac{2\varepsilon}{dt^2}.$$

Aus dieser Formel und der vorhergehenden folgt, daſs eine Kraft sowohl die Geschwindigkeit, die sie in einer unendlich kleinen Zeit hervorbringt, durch diese Zeit dividiert, zum Maaſse hat, als auch das Doppelte des Raumes, den der Körper vermöge ihrer durchlauft, dividiert durch das Quadrat derselben Zeit. Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung, haben diese zwei gleichgeltenden Arten die Kraft zu messen ebenfalls statt, ohne daſs die Zeit unendlich klein zu seyn braucht.

119.

Wir haben jetzt

$$x = Ft, \quad v = \frac{dx}{dt}, \quad \varphi = \frac{dv}{dt}$$

für die allgemeinen Formeln der geradlinigen Bewegung. Sie geben die Verhältnisse an, die, bei einer beliebigen Bewegung, zwischen dem durchlaufenen Raume, der erlangten Geschwindigkeit und der Kraft, die auf den Körper wirkt, bestehen, und zeigen, wie man diese drei Functionen der Zeit aus einander ableiten kann, sey es durch Differentiation oder durch Integration.

Eliminiert man v aus den zwei letzteren Gleichungen, so hat man

$$\varphi = \frac{d^2x}{dt^2},$$

was voraussetzt, daſs man die Zeit t als unabhängige Veränderliche betrachtet, und ihr Differential dt constant ist. Diese Voraussetzung werden wir übrigens in allem Folgenden beibehalten, ohne es besonders zu wiederholen.

Durch die Elimination von dt hat man auch

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{d.v^2}{dx},$$

was dazu dient, v zu bestimmen, wenn die Kraft φ als Function von x gegeben ist, und ebenso die Kraft zu bestimmen, wenn die Geschwindigkeit als Function des durchlaufenen Raumes gegeben ist.

In dem folgenden Kapitel werde ich verschiedene Anwendungen dieser allgemeinen Formeln geben.

II. Maafs der Kräfte mit Rücksicht auf die Massen.

120.

Ehe ich zeige, wie man die Massen in Rechnung bringen mufs, wenn man Kräfte vergleicht, die auf verschiedene Körper wirken, mufs ich erst einen ungenauen Ausdruck verbessern, den man sehr häufig gebraucht, und der von einer Begriffsverwechselung herrührt.

Man denke sich, es sey ein Körper auf eine horizontale Ebene gelegt, und werde durch keine Reibung irgend einer Art auf derselben festgehalten. Will ich ihn auf derselben fortgleiten lassen, so mufs ich, wegen der Trägheit der Materie, eine bestimmte Kraft ausüben; kommt zu diesem Körper noch ein zweiter, dann ein dritter u.s.w. hinzu, so mufs ich, um dieselbe Bewegung hervor zu bringen, eine immer beträchtlichere Kraft anwenden. In jedem Falle fühle ich, dafs ich eine Kraft anwenden mufs, aber ich darf hieraus nicht schliefsen, dafs die Materie dieser Kraft einen Widerstand entgegensetze, und dafs sich in den Körpern etwas befinde, was man sehr uneigentlich die Kraft der Trägheit nennt. Wenn man sich so ausdrückt, so verwechselt man die Empfindung, die man gefühlt hat, welche von der Kraft, die man ausgeübt hat, herrührt, mit der Empfindung eines Widerstandes, der gar nicht vorhanden ist.

Wenn zwischen dem Körper und der Ebene eine Reibung statt findet, so ist hier allerdings ein Widerstand, der sich der horizontalen Bewegung entgegen setzt, vorhanden, und ich kann den Körper auf der Ebene nicht verrücken, ohne eine Kraft auszuüben, die stärker ist als dieser Widerstand. Ebenso, wenn ich den Körper vertical erheben will, so stellt sich dieser Bewegung ein Widerstand entgegen, den ich durch eine Kraft, die ihn übertrifft, überwinden mufs. In beiden Fällen kann ich keine Bewegung hervorbringen, so lange ich nicht eine Kraft ausübe, die gröfser als das Gewicht des Körpers, oder als seine Adhäsion an die Ebene ist.

Wenn man aber weder Schwere noch Reibung voraussetzt, so kann ich den Körper in Bewegung setzen, wie schwach auch die Kraft, die ich anwende, und wie groſs die Masse des Körpers sey. Bemerke ich alsdann, daſs man eine gröſsere Kraft anwenden muſs, um diese Bewegung einem gewissen Körper mitzutheilen, als einem anderen, so ziehe ich hieraus den Schluſs, daſs der erste aus einer gröſseren Quantität Materie besteht, als der zweite, und wenn ich die Gröſse der Kräfte, die ich ausüben muſste, mit Genauigkeit messen könnte, so wäre ihr Verhältniſs das der Massen dieser zwei Körper. Auf einer ähnlichen Betrachtung beruht, wie dies sogleich weiter erklärt werden soll, das Maaſs der Massen nach der Gröſse der Kräfte, die sie in Bewegung setzen, und umgekehrt das Maaſs der Kräfte, wenn man die Massen und die Geschwindigkeiten berücksichtigt.

121.

Zwei materielle Punkte, die Körpern angehören, welche verschiedener Art seyn können, haben gleiche oder ungleiche Massen, je nachdem gleiche Kräfte ihnen, in derselben Zeit, dieselbe Geschwindigkeit oder verschiedene Geschwindigkeiten mittheilen. Um einen bestimmten Fall zu betrachten, nehme man an, die Kräfte, die an diese zwei Punkte angebracht sind, seyen vertical und hielten sich im Gleichgewichte, wenn sie in die Schalen einer Wage gelegt werden. Diese Kräfte werden unter dieser Voraussetzung gleich seyn, und wenn daher die zwei Punkte völlig frei sind und durch dieselben Kräfte getrieben werden, so sind ihre Massen gleich oder ungleich, je nachdem sie, im ersten Augenblicke, gleiche oder ungleiche unendlich kleine Geschwindigkeiten annehmen.

Wenn man auf diese Weise erkannt hat, daſs die Massen verschiedener materieller Punkte gleich sind, so kann man, indem man sie zusammen nimmt, andere Punkte bilden, deren Massen unter einander beliebige Beziehungen haben. So z. B., wenn man μ die Masse jedes der gleichen Punkte nennt, und m, m' die Massen zweier anderer Punkte, die bezüglich aus n und n' der ersten gebildet sind, so verhalten sich m und m' zu einander, wie diese Zahlen n und n' und man hat

$$m = n\mu, \quad m' = n'\mu.$$

Seyen nun u, v, v' unendlich kleine Geschwindigkeiten, i und i' ganze Zahlen und

$$v = i u, \quad v' = i' u.$$

Wenn daher zwei Kräfte f und f' den Massen m und m' die Geschwindigkeiten v und v' in demselben Augenblicke mittheilen, so behaupte ich, daſs man

$$f : f' = mv : m'v'$$

haben wird.

Denn man kann die Kraft f als die Summe einer Anzahl n gleicher Kräfte ansehen, die jedem der n gleichen Punkte, aus welchen m besteht, dieselbe Geschwindigkeit v mittheilen, so daſs, wenn man eine dieser gleichen Kräfte k nennt,

$$f = nk$$

ist.

Sey auſserdem h die Kraft, welche jedem dieser gleichen Punkte in derselben Zeit die Geschwindigkeit u mittheilt, in welcher die Kraft k ihm die Geschwindigkeit v mittheilt. Da diese Kräfte auf denselben materiellen Punkt wirken, so verhalten sie sich wie die Geschwindigkeiten u und v (§. 116), und da $v = i u$ ist, so folgt hieraus

$$k = i h.$$

Ebenso haben wir

$$f' = n'k', \quad k' = i'h',$$

indem man f' als die Summe der n' Kräfte k' ansieht, die jedem der gleichen Punkte, aus welchen m' zusammen gesetzt ist, die Geschwindigkeit v' mittheilen können, und h' die Kraft nennt, welche jedem derselben Punkte die Geschwindigkeit u mittheilen würde. Da aber h und h' Kräfte sind, die in demselben Augenblicke zweien an Masse gleichen Punkten dieselbe Geschwindigkeit u mittheilen können, nemlich zweien der Punkte, deren gemeinschaftliche Masse durch μ bezeichnet worden ist, so folgt aus dem Vorhergehenden, daſs $h' = h$ seyn muſs. Vermöge der vorhergehenden Gleichungen hat man alsdann

$$f = i n h, \quad f' = i' n' h,$$

und wenn man die Werthe von m, m', v, v' berücksichtigt, so folgt hieraus die Proportion, die bewiesen werden sollte.

122.

Dies vorausgesetzt, betrachte man einen Körper von beliebiger Gröſse und Gestalt, dessen Punkte alle parallele Linien mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit beschreiben, die übrigens sich mit der Zeit ändern kann. Man theile diesen Körper in eine unendliche Anzahl materieller Punkte, die an Masse gleich sind, wie dies so eben erklärt wurde. Man kann die Bewegung aller dieser Punkte Kräften zuschreiben, die in der ganzen Ausdehnung des bewegten Körpers gleich und parallel sind; ihre Mittelkraft wird, für irgend einen Theil des Körpers, ihrer Summe gleich seyn, und auf den Schwerpunkt dieses Theils wirken. Die Kräfte, welche zwei beliebigen Theilen entsprechen, werden sich daher zu einander verhalten wie ihre Massen; nennt man nun f die ganze Kraft, die auf den Körper wirkt, m seine Masse, und φ die Kraft, die einem Theile dieser Masse, der als Einheit genommen wird, entspricht, so hat man

$$f = m\varphi.$$

Was die Kraft φ betrifft, so ist sie dem Zuwachs der Geschwindigkeit, welchen die Punkte des Körpers während einer unendlich kleinen Zeit erlangen, proportional, und wenn man v diese Geschwindigkeit am Ende der Zeit t nennt, so kann man, wie in §. 118

$$\varphi = \frac{dv}{dt}$$

für ihr Maaſs nehmen.

Hieraus folgt

$$f = m\,\frac{dv}{dt}$$

als Ausdruck der Kraft bei irgend einer Bewegung, indem man auf die Masse des Körpers Rücksicht nimmt, und voraus setzt, daſs alle seine Punkte dieselbe Geschwindigkeit haben.

Diese Kraft f, welche die Mittelkraft oder die Summe aller unendlich kleinen Kräfte ist, die man sich an alle Punkte, aus welchen der Körper besteht, angebracht denken kann, nennt man die bewegende Kraft, der Factor φ ihres Werthes $m\varphi$ heiſst die beschleunigende Kraft, und ist nichts Anderes, als die bewegende Kraft auf die Einheit der Masse bezogen.

Die bewegende Kraft geht in einen **Druck** über, wenn die Masse, auf welche sie wirkt, auf einer festen Ebene liegt, die senkrecht auf der Richtung der Kraft steht. Ein Druck und eine bewegende Kraft unterscheiden sich daher nur dadurch, daſs die unendlich kleinen Geschwindigkeiten, die ein Druck hervor zu bringen strebt, beständig durch den Widerstand der festen Ebene, die den Druck erleidet, aufgehoben werden, während diejenigen, welche wirklich in jedem Zeittheile durch die bewegende Kraft hervorgebracht werden, sich in dem bewegten Körper anhäufen, woraus eine endliche Geschwindigkeit nach einer endlichen Zeit entspringt. Zwei Drucke verhalten sich zu einander, wie die Massen, multipliciert mit den unendlich kleinen Geschwindigkeiten, die sie denselben in jedem Augenblicke mitzutheilen streben, und die sie ihnen wirklich mittheilen würden, wenn die Massen frei wären.

123.

Wenn die Bewegung, die allen Punkten des Körpers gemeinschaftlich ist, gleichförmig beschleunigt ist, und man g den Zuwachs der Geschwindigkeit nennt, der in jeder Zeiteinheit statt hat, so ist

$$\varphi = g, \quad f = mg.$$

Für eine andere beständige Kraft f', die auf eine Masse m' wirkt, und die Geschwindigkeit g' in der Zeiteinheit hervorbringt, hat man ebenso

$$f' = m'g'.$$

Die Beobachtungen haben aber gelehrt, daſs zwei schwere Körper, wie auch sonst ihre Materie verschieden seyn mag, dieselbe Geschwindigkeit erlangen, wenn sie während desselben Zeitraumes im leeren Raume fallen. Bei der Schwerkraft ist also $g = g'$, und die Gewichte f und f' zweier beliebiger Körper verhalten sich daher zu einander, wie ihre Massen m und m', so wie wir es in §. 60 angenommen haben. Die bloſse Thatsache, die durch die tägliche Erfahrung bestätigt wird, daſs verschiedenartige Körper gleiches Gewicht unter ungleichem Volumen haben, war nicht hinreichend, um zu entscheiden, ob ihre Massen gleich oder ungleich seyen, man muſste auſserdem noch wissen, daſs die Schwerkraft

ihnen dieselbe Bewegung mittheilt, um aus der Gleichheit der Gewichte auf die Gleichheit der Quantität ihrer Materie schliefsen zu können.

Das Gewicht eines schweren Körpers, der im leeren Raume fällt, ist seine bewegende Kraft und die Schwerkraft die beschleunigende Kraft. Der Kürze halber nennt man oft die Geschwindigkeit g die Schwere oder die Schwerkraft, während sie nur das Maafs dieser Kraft ist.

124.

Wenn gegebene Kräfte auf die Oberfläche oder andere Theile eines festen Körpers wirken, und hieraus für alle seine Punkte gleiche und parallele Geschwindigkeiten entstehen, so müssen diese Kräfte eine einzige Mittelkraft haben, die, der Gröfse und Richtung nach, mit der bewegenden Kraft zusammen fällt, wie diese so eben erklärt worden ist, und hieraus leitet man die beschleunigende Kraft ab, indem man sie durch die ganze Masse des Körpers dividiert.

Man nehme z. B. an, ein schwerer Körper falle in der Luft, im Wasser oder in einer anderen Flüssigkeit, und seine Gestalt und Dichtigkeit seyen, wenn er nicht gleichartig ist, symmetrisch um eine verticale Axe. Es ist offenbar, dafs, da alles um diese Axe herum ähnlich ist, alle Punkte des Körpers verticale gerade Linien beschreiben werden; dies erfordert, da von einem festen Körper die Rede ist, dafs sie alle dieselbe Geschwindigkeit in demselben Zeitpunkte haben.

Der Widerstand des Mittels, der auf die Oberfläche des Körpers ausgeübt wird, reduciert sich daher auf eine Kraft, die nach der Axe seiner geometrischen Gestalt gerichtet ist. Ich bezeichne die Intensität des Widerstandes in einem beliebigen Augenblicke durch R, den entsprechenden Theil der beschleunigenden Kraft des Körpers durch ψ und seine Masse durch m; alsdann hat man

$$\psi = \frac{R}{m}.$$

Da die Richtung dieser Kraft derjenigen entgegengesetzt ist, welche die Schwerkraft während seines Falles dem Körper mittheilt, so ist die ganze beschleunigende Kraft $g - \psi$. Wenn der Körper vertical von unten nach oben geworfen

wird, so wirken die beiden Kräfte in demselben Sinne, und die ganze beschleunigende Kraft ist alsdann negativ und gleich $-g-\psi$. Die Theorie des Widerstandes der Flüssigkeiten ist noch zu wenig ausgebildet, als dafs man den Werth von R a priori bestimmen könnte, indem dieser von der Geschwindigkeit v, die der Körper besitzt, von dessen Gestalt, von der Dichtigkeit und der Natur der Flüssigkeit abhängen kann. Gewöhnlich nimmt man an, dafs er dem Quadrate von v und der Dichtigkeit der Flüssigkeit, die ich durch ϱ bezeichne, proportional ist, so dafs man

$$R = \sigma\varrho v^2$$

hat, wo σ ein Coefficient ist, der nur von der Form und den Dimensionen des Körpers, von der Natur der flüssigen oder luftförmigen Flüssigkeit und von ihrer Temperatur abhängen kann.

Hat man eine Kugel, so betrachtet man den Coefficienten σ als der Oberfläche oder dem Quadrate ihres Durchmessers proportional. Bezeichnet man durch r seinen Halbmesser, durch D seine Dichtigkeit, so dafs seine Masse

$$m = \frac{4\pi}{3} D r^3$$

ist, so folgt hieraus

$$\psi = \frac{\gamma\varrho v^2}{Dr},$$

wo γ einen numerischen Coefficienten bedeutet, der für alle Kugeln derselbe ist, und dessen Werth, für jede besondere Beschaffenheit der Flüssigkeit, durch Versuche bestimmt werden mufs. Da die Gröfse ψ derselben Art ist wie g, so folgt hieraus, dafs, wenn man durch k eine gegebene Geschwindigkeit bezeichnet, alsdann

$$\frac{Dr}{\gamma\varrho} = \frac{k^2}{g}$$

seyn mufs, damit der Werth von ψ die Form

$$\psi = \frac{g v^2}{k^2}$$

annimmt, dem Principe der Gleichartigkeit der Gröfsen gemäfs (§. 23).

125.

Wenn eine und dieselbe beständige Kraft allmälich auf verschiedene Massen wirkt, so bringt sie gleichförmig beschleu-

nigte Bewegungen hervor, bei welchen die beschleunigende Kraft, oder der beständige Zuwachs der Geschwindigkeit in jeder Zeiteinheit, sich umgekehrt wie die Masse verhält.

So z. B., wenn f das Gewicht mg einer Masse m ist, und man hängt diese Masse am Ende eines Fadens auf, der mit dem anderen Ende an eine andere Masse m' befestigt ist, die auf einer horizontalen Fläche liegt, so ist es offenbar, dafs diese beiden Massen dieselbe gleichförmig beschleunigte Bewegung haben werden, die von der Kraft f herrührt, wenn man die Reibung und das Gewicht des verticalen Theils des Fadens bei Seite setzt. Nennt man daher g' die beschleunigende Kraft dieser Bewegung, so hat man

$$g' = \frac{f}{m + m'},$$

oder, was dasselbe ist,

$$g' = g \cdot \cos\alpha,$$

indem man durch α einen Winkel bezeichnet, so beschaffen, dafs

$$m = (m + m') \cos\alpha$$

ist.

Die hier betrachtete Bewegung ist daher dieselbe, wie die eines schweren Körpers auf einer geneigten Ebene, die mit der Verticalen den Winkel α einschliefst (§. 117).

Da alle Körper beweglich sind, und Geschwindigkeiten annehmen können, die im umgekehrten Verhältnisse ihrer Massen stehen, wenn sie, während derselben Zeit, der Wirkung derselben Kraft unterworfen werden, so folgt hieraus, dafs es eigentlich keinen festen Körper giebt, der in Wahrheit unbeweglich ist. Die Körper, die man so nennt, sind solche, deren Massen sehr grofs sind, im Verhältnifs zu denen, von welchen die bewegenden Kräfte, die man an sie anbringt, abhängen, und die daher nur sehr kleine Geschwindigkeiten durch die Wirkung dieser Kräfte erhalten können. An der Oberfläche der Erde sind dies die Körper, die an diese Oberfläche befestigt sind, und nur eine Masse mit der des Erdkörpers ausmachen, und wenn man im vorhergehenden Beispiele diese Masse statt m' nimmt, so sieht man, dafs die Geschwindigkeit g', die ihr in der Einheit der Zeit durch ein Gewicht mg, das einer Masse m von gewöhnlicher Gröfse

entspricht, mitgetheilt wird, als ganz unmerklich angesehen werden kann.

126.

Man nennt gewöhnlich das Produkt aus der Masse eines Körpers in seine Geschwindigkeit die Gröſse der Bewegung eines Körpers, weil die Geschwindigkeit in dem Körper liegt, und die Bewegung nur eine Folge derselben ist.

Es giebt keine Kraft, die augenblicklich eine Bewegung von endlicher Gröſse hervorbringt. Der Stoſs eines festen Körpers, der in Bewegung ist, gegen einen festen Körper, der in Ruhe ist, theilt diesem, in einer sehr kurzen, aber nicht unendlich kleinen Zeit, eine Geschwindigkeit mit, die zuweilen sehr groſs seyn kann, und während dieses Zeitraumes ändern die beiden Körper ihren Ort nicht auf merkliche Weise. So hart man sie sich auch denken mag, immer drücken sie sich wechselseitig, wenn auch noch so wenig, zusammen. Die Geschwindigkeit geht von dem einen zum anderen in unendlich kleinen Zwischenstufen über, und, wenn man die Elasticität beider Körper bei Seite setzt, so hört ihre wechselseitige Wirkung auf, sobald sie gleiche Geschwindigkeit erlangt haben. Diese schnelle Mittheilung der Bewegung, ohne merkliche Ortsveränderung der Massen, ist das, was man einen Stoſs oder einen Impuls nennt; er ist, wie man sieht, einer bewegenden Kraft gleich, die während einer sehr kurzen Zeit mit einer sehr groſsen Intensität wirkt.

Betrachtet man daher den Stoſs als die Summe der unendlich kleinen Wirkungen einer bewegenden Kraft, so kann man hieraus den Schluſs ziehen, daſs dieser sich in zwei andere Stöſse nach gegebenen Richtungen, durch die Regel des Parallelogramms der Kräfte, zerlegen läſst, wie jede dieser allmälichen Wirkungen. Wenn man z. B. auf den Rücken eines Keils einen senkrechten Stoſs ausübt, den ich P nennen werde, so läſst sich dieser in zwei andere Stöſse zerlegen, die auf seine beiden Seitenflächen senkrecht sind, und wenn man diese beiden Seitenkräfte durch Q und Q' bezeichnet, durch K und K' die Längen der Seitenflächen, welchen sie entsprechen, und durch H die des Rückens des Keils, so sieht man leicht, daſs man, nach der angeführten Regel,

$$Q : P = K : H$$
$$Q' : P = K' : H$$

hat, woraus man findet

$$Q = \frac{PK}{H}, \quad Q' = \frac{PK'}{H}.$$

Nimmt man daher an, dafs dieser Stofs von einer Masse m herrührt, die den Kopf des Keils mit einer Geschwindigkeit a trifft, so werden sich seine beiden Seitenflächen, oder vielmehr die festen Gegenstände, auf welche sie sich stützen, in demselben Falle befinden, als wenn sie senkrecht durch dieselbe Masse m getroffen würden, die die Geschwindigkeiten besitzt, welche ihren Längen proportional sind und durch $\frac{Ka}{H}$ und $\frac{K'a}{H}$ ausgedrückt werden.

127.

Wenn ein fester Körper, der in Ruhe ist, zu gleicher Zeit und in entgegengesetzter Richtung durch zwei andere Körper getroffen wird, deren Massen m und m' und deren Geschwindigkeiten v und v' sind; wenn diese drei Körper, sowohl der Gestalt als der Dichtigkeit nach, symmetrisch um eine und dieselbe Axe gebildet sind, und alle Punkte der zwei letzteren sich mit dieser geraden Linie parallel bewegen; so halten sich die Stöfse, die sie auf den zwischen ihnen befindlichen Körper ausüben, im Gleichgewichte, wenn die Gröfsen der Bewegung mv und $m'v'$ gleich sind, d. h. diese Gröfsen der Bewegung werden in einer sehr kurzen Zeit in den dazwischen liegenden Körper übergehen und sich daselbst aufheben, ohne dafs dieser Körper auf eine merkliche Weise seinen Ort ändert.

Das Gleichgewicht hat auch statt, wenn man die dazwischen liegenden Körper wegnimmt und die Geschwindigkeit unmittelbar von einem dieser zwei Körper in den anderen übergeht. So bringen sich zwei Körper, die einander begegnen, in Ruhe, abgesehen von der Elasticität, sobald sie sich stofsen und ihre Massen im umgekehrten Verhältnisse ihrer Geschwindigkeiten stehen, und umgekehrt sind die Produkte der Massen und Geschwindigkeiten gleich, sobald im Stofse der zwei Körper Gleichgewicht ist. Man nimmt hier,

wie gesagt, an, daſs die beiden Körper um eine und dieselbe gerade Linie symmetrisch sind, und daſs die Geschwindigkeiten aller ihrer Punkte dieser geraden Linie parallel sind, welche diejenige ist, die durch die Schwerpunkte beider Massen geht. Die Bedingung des Gleichgewichtes bei dem Stoſse dieser Körper ist daher die Gleichheit ihrer Gröſsen der Bewegung oder die Gleichung

$$mv = m'v',$$

wo m und m' ihre Massen und v und v' ihre Geschwindigkeiten sind.

Wir werden in der Folge die Bewegungen bestimmen, die nach dem Stoſse statt haben, wenn diese Bedingungen, die sich auf die Gröſsen und die Richtung der Geschwindigkeiten und auf die Gestalt der Körper beziehen, nicht vorhanden sind, oder wenn man auf ihre Elasticität Rücksicht nimmt.

Aus diesem Gesetze des Gleichgewichtes beim Stoſse folgt, daſs der Stoſs das directeste Mittel darbietet, die Masse der Körper zu bestimmen. Man müſste nemlich allen Punkten eines Körpers, dessen Masse als Einheit genommen wird, eine bekannte Geschwindigkeit a mittheilen, und wenn man die Geschwindigkeit v genau bestimmen könnte, welche alle Punkte eines anderen Körpers besitzen müssen, damit dieser dem ersten das Gleichgewicht hält, wenn er denselben in einer Richtung, die dessen Bewegung entgegengesetzt ist, trifft, so wäre der numerische Werth der zweiten Masse $\frac{a}{v}$; indessen braucht es nicht besonders bemerkt zu werden, daſs dieses Mittel unausführbar ist, und daſs man sich an das Gewicht der Körper halten muſs, wenn man ihre Massen messen will.

Hieraus folgt auch, daſs zwei Stöſse, die auf einen festen Körper ausgeübt werden, als gleich starke angesehen werden müssen, wenn sie gleichen Gröſsen der Bewegung entsprechen, so daſs, im Beispiele des vorigen §., der Rücken und die Seitenflächen des Keils dieselben Wirkungen erleiden würden, oder mit derselben Kraft gestoſsen würden, wenn die Masse m und die Geschwindigkeit a durch die Masse m' und die Geschwindigkeit a' ersetzt würden, so daſs man $ma = m'a'$ hätte.

128.

Wenn zwei Stöfse, die von Geschwindigkeiten herrühren, welche im umgekehrten Verhältnisse der Massen stehen, zu gleichen Zeiten auf zwei Schalen einer Wage ausgeübt werden, so wird Gleichgewicht vorhanden seyn. Die Wage ersetzt nemlich hier den dazwischen befindlichen Körper, von welchem im vorhergehenden §. die Rede war. Dies ist z. B. der Fall bei zwei schweren Körpern, deren Massen m und m' sind, und die in demselben Augenblicke auf diese zwei Schalen fallen, nachdem sie die Geschwindigkeiten v und v' erlangt haben, so dafs man $mv = m'v'$ hat.

Wenn die Masse m in einer der Schalen in Ruhe ist, so übt ihr Gewicht einen Druck aus, der, im Allgemeinen, durch den Stofs der anderen Masse aufgehoben wird. Es ist aber nicht richtig, wenn man, wie dies gewöhnlich geschieht, sagt, dafs dies immer statt habe, wie grofs auch der Druck in seiner Art und wie gering der Stofs in der seinigen sey.

Man kann nemlich den Stofs von m' durch eine bewegende Kraft ersetzen, die auf eine der beiden Schalen, ohne sie merklich von ihrem Orte zu entfernen, während einer sehr kurzen Zeit, die ich durch τ bezeichne, wirkt. Bezeichnet man ferner durch $m'udt$ die unendlich kleine Gröfse der Geschwindigkeit, welche diese veränderliche Kraft während der Zeit dt hervorbringt, so ist das Produkt $m'\int_0^\tau udt$ die Gröfse der Geschwindigkeit, welche sie der Wage während der Zeit τ mittheilt. Während dieser Zeit bringt das Gewicht m eine Gröfse der Bewegung hervor, die durch $mg\tau$ ausgedrückt wird, wenn man die Schwerkraft durch g bezeichnet. Damit Gleichgewicht in dem Systeme ist, mufs daher das Integral $\int_0^\tau udt$ die ganze Geschwindigkeit v' seyn, welche die Masse m' in dem Augenblicke besitzt, wenn der Stofs beginnt, so dafs sie gar keine Geschwindigkeit mehr hat, wenn der Stofs zu Ende ist. Dies vorausgesetzt, ist es hinreichend, dafs die Gröfsen der Bewegung mgt und $m'\int_0^\tau udt$, die der Wage während der Dauer des Stofses in entgegengesetztem Sinne mitgetheilt werden, einander gleich

seyen. Die Bedingung dieses Gleichgewichtes wird daher durch die Gleichung

$$m'v' = mg\tau$$

ausgedrückt, und je nachdem man, im entgegengesetzten Falle, $m'v' > mg\tau$ oder $m'v' < mg\tau$ hat, so ist der Stofs dem Drucke, oder der Druck dem Stofse überlegen. Wiewohl aber die Zeit τ sehr klein ist, so kann der letztere Fall doch eintreten, wenn man annimmt, dafs die Masse m im Verhältnifs zur Masse m' hinlänglich grofs ist. Sollte dieser Fall nicht eintreten können, so müfste die Dauer des Stofses unendlich klein seyn, was in der Natur nicht statt findet.

Die Dynamik ist eine fortgesetzte Anwendung der Principien, die wir in diesem Kapitel ausführlich erläutert haben, und von welchen man eine klare Vorstellung haben mufs, ehe man es versuchen kann, die verschiedenen Aufgaben, welche sich auf die Bewegung der Körper beziehen, aufzulösen.

Zweites Kapitel.

Beispiele der geradlinigen Bewegung.

129.

Nach dem, was man in §. 119 gesehen hat, sind die Gleichungen der geradlinigen Bewegung eines materiellen Punktes folgende:

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \varphi = \frac{dv}{dt}, \quad \varphi = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1)$$

Die letzte Gleichung ist eine unmittelbare Folge der zwei anderen; x bezeichnet den Abstand eines Körpers von einem festen Punkte der geraden Linie, die er beschreibt, am Ende der Zeit t, v seine erlangte Geschwindigkeit, φ die Kraft, die ihn treibt. Dieser Ausdruck φ kann positiv oder negativ seyn, je nachdem diese Kraft im Sinne der Geschwindigkeit v oder in entgegengesetztem Sinne wirkt. Diese Gleichungen gelten nicht blos für einen einzelnen materiellen Punkt, sondern auch für einen festen Körper von beliebiger Gröfse, dessen Punkte alle gerade parallele Linien beschreiben, und daher eine gemeinschaftliche Bewegung haben; φ ist alsdann die beschleunigende Kraft, die der bewegenden Kraft, durch die Masse des Körpers dividiert, gleich ist. Der Werth von φ mufs bei jeder Aufgabe gegeben seyn, und die Frage besteht darin, aus demselben durch Integration die Werthe von v und x als Functionen von t abzuleiten. Diese Werthe enthalten zwei willkührliche Constanten, deren Werth man nach den Werthen, die x und v im Anfange der Bewegung haben, welche bei jeder Aufgabe bekannt seyn müssen, bestimmt. Ich werde von jetzt an voraussetzen, dafs man die Zeit t vom Anfange der Bewegung an zählt, so dafs die gegebenen Werthe von x und v dem Werthe von $t = o$ entsprechen.

Die Integration in geschlossener Form ist nur dann allgemein möglich, wenn φ, wie wir in den folgenden Beispielen voraussetzen werden, nur von einer der Gröfsen t, v, x abhängt. Wenn der gegebene Werth von φ sie alle drei oder

nur zwei enthält, so lassen sich die Werthe von x und v nur durch Reihen ausdrücken.

130.

Man nehme zuerst an, die Kraft φ sey eine beständige, und man wolle, z. B., die verticale Bewegung eines Körpers erfahren, der im leeren Raume, durch die Schwerkraft getrieben, fällt.

Bezeichnet man diese Kraft durch g, so hat man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g,$$

und hieraus folgt

$$v = gt, \quad x = \tfrac{1}{2}gt^2,$$

und folglich

$$v^2 = 2gx,$$

indem man annimmt, daſs der Abstand x vom Ausgangspunkte des Körpers gezählt wird, und die anfängliche Geschwindigkeit Null ist, so daſs $x = o$ und $v = o$ ist, wenn $t = o$ ist.

Nennt man a die Geschwindigkeit, die der Körper erlangt, wenn er von einer Höhe h fällt, so hat man

$$a = \sqrt{2gh},$$

was einen sehr bequemen Ausdruck für eine beliebige Geschwindigkeit darbietet, vermittelst der Höhe, von welcher ein schwerer Körper fallen muſs, um sie zu erlangen, und der beständigen Geschwindigkeit g. Bezeichnet man die Zeit, die der Körper braucht, um von dieser Höhe zu fallen, durch ϑ, so hat man auch

$$\vartheta = \frac{a}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad h = \tfrac{1}{2}g\vartheta^2 = \frac{a^2}{2g}.$$

Wird der Körper vertical von unten nach oben geworfen, so ist die Gleichung seiner Bewegung im leeren Raume

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g,$$

wo g dieselbe beständige Geschwindigkeit ist, wie im vorhergehenden Falle, da man annimmt, daſs die Wirkung der Schwere auf die sich bewegenden Körper, ebensowohl von der Richtung, nach welcher sie sich bewegen, als auch von der Gröſse der Geschwindigkeit, unabhängig ist. Nimmt man

an, daſs a die anfängliche Geschwindigkeit ist, so findet man hieraus

$$v = a - gt, \quad x = at - \tfrac{1}{2}gt^2$$

für die Geschwindigkeit in einem gewissen Augenblicke und den bis dahin durchlaufenen Raum. Es ist offenbar, daſs der Körper sich so lange erheben wird, bis diese Geschwindigkeit Null ist. Nennt man daher ϑ' die Zeit, während welcher er in die Höhe steigt, und h' die Höhe, die er erreicht, so hat man

$$\vartheta' = \frac{a}{g}, \quad h' = \frac{a^2}{2g},$$

und da diese Werthe mit denen von ϑ und h im vorhergehenden Falle zusammen fallen, so findet man daraus, daſs ein schwerer Körper, der mit der Geschwindigkeit a in die Höhe geworfen wird, sich im leeren Raume bis zu der Höhe erhebt, von welcher er herab fallen müſste, um dieselbe Geschwindigkeit zu erlangen, und daſs die Zeit, während welcher er sich erhebt, dieselbe ist, wie die, während welcher er fällt.

Gewöhnlich nennt man h die Höhe, die zu der Geschwindigkeit a, und umgekehrt a die Geschwindigkeit, die zur Höhe h gehört.

131.

Es ist immer hinreichend, der Körper mag nun in die Höhe steigen oder herab fallen, um die Gleichungen seiner Bewegung auf einer geneigten Ebene zu bilden, daſs man in den vorhergehenden Gleichungen $g \cos \alpha$ statt g setzt, indem man, wie in §. 117, durch α das Complement des Winkels, der die Neigung der gegebenen Ebene gegen die horizontale Ebene angiebt, bezeichnet.

Fällt der Körper, so hat man

$$v = gt \,.\cos \alpha, \quad x = \tfrac{1}{2} gt^2 \cos \alpha, \quad v^2 = 2gx \cos \alpha,$$

nennt man aber die Länge der geneigten Ebene l und ihre Höhe h, so hat man

$$h = l \cos \alpha,$$

und bezeichnet man durch k die Geschwindigkeit, welche der Körper erlangt hat, nachdem er diese ganze Länge durchlaufen hat, so hat man

$$k^2 = 2gl \cos \alpha = 2gh,$$

woraus hervorgeht, dafs diese Geschwindigkeit k dieselbe ist, als wenn der Körper die Verticale h durchlaufen hätte.

Sey ABC (Fig. 34) die Peripherie eines Kreises, dessen Ebene vertical ist. Man nehme an, es bezeichne AB seinen verticalen Durchmesser und suche, nach den vorhergehenden Gleichungen, die Zeit, die ein schwerer materieller Punkt braucht, um die Sehne AC zu durchlaufen, die nach dem oberen Ende dieses Durchmessers gezogen ist. Fällt man von dem Punkte C die senkrechte Linie CD auf AB, so hat man in diesem Falle

$$AC = l, \quad AD = h.$$

Bezeichnet man aber durch ϑ die fragliche Zeit, so hat man

$$l = \tfrac{1}{2} g \vartheta^2 \cos\alpha = g \frac{\vartheta^2 h}{2l}.$$

Aufserdem hat man, vermöge einer bekannten Eigenschaft des Kreises,

$$l^2 = hb,$$

wenn man durch b den Durchmesser AB bezeichnet, und hieraus folgt

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}} = \sqrt{\frac{2b}{g}}.$$

Diese Zeit ist aber dieselbe, wie die, welche der Körper braucht, um von einer verticalen Höhe b herab zu fallen; hieraus folgt also, dafs die Sehne AC in derselben Zeit durchlaufen wird, wie der Durchmesser AB.

Man findet dasselbe Resultat, wenn man die Bewegung auf der Sehne CB betrachtet, die nach dem unteren Ende von AB gezogen ist, und ebenfalls in derselben Zeit durchlaufen wird, wie dieser verticale Durchmesser.

Dieser Lehrsatz, der nicht von der Länge der durchlaufenen Sehne abhängt, ist auch noch wahr, wenn diese unendlich klein wird, was daher rührt, dafs alsdann auch die Seitenkraft der Schwerkraft, die nach dieser Länge wirkt, keine endliche Gröfse mehr seyn wird.

132.

Man betrachte jetzt die Bewegung eines festen schweren Körpers, welcher von oben nach unten oder von unten nach

oben in ein widerstehendes Mittel geworfen wird, und dessen Punkte sämmtlich verticale gerade Linien beschreiben. Damit die beschleunigende Kraft nur von der Geschwindigkeit abhänge, werde ich annehmen, daſs das Mittel überall dieselbe Dichtigkeit habe.

Für den Fall, daſs der Körper fällt, hat man

$$\varphi = g - \frac{g v^2}{k^2},$$

indem man annimmt, daſs der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist (§. 124), und durch k eine beständige gegebene Geschwindigkeit bezeichnet. Da dieser Werth von φ eine Function von v ist, so muſs man die zweite Gleichung (1) anwenden, und man findet daraus

$$g dt = \frac{k^2 dv}{k^2 - v^2} = \frac{k}{2}\left(\frac{dv}{k+v} + \frac{dv}{k-v}\right).$$

Integriert man, und setzt die Anfangsgeschwindigkeit $= o$, so daſs $v = o$ ist, wenn $t = o$ ist, so folgt daraus

$$gt = \tfrac{1}{2} k \log \frac{k+v}{k-v},$$

und umgekehrt

$$\frac{k-v}{k+v} = e^{-\frac{2gt}{k}},$$

woraus alsdann folgt

$$v = \frac{k\left(e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}\right)}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}} \qquad (2)$$

Ich bezeichne hier durch e die Basis der natürlichen Logarithmen und durch log einen Logarithmen dieser Art. Dieses werde ich auch überall im Folgenden thun, jedoch aber zuweilen den Buchstaben e anwenden, um andere Gröſsen, in Formeln, wo die Basis dieser Logarithmen nicht vorkommt, zu bezeichnen. Der genäherte Werth dieser Basis ist

$$e = 2{,}7182818$$

und der des beständigen Modulus, durch welchen man den natürlichen Logarithmen irgend einer Zahl multiplicieren muſs, um daraus den gewöhnlichen Logarithmen dieser Zahl abzuleiten, ist $0{,}4342945$.

Da $dx = v\,dt$, so hat man

$$x = \frac{k^2}{g} \log \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}\right) \qquad (3)$$

wenn man integriert und $x = o$ setzt, wenn $t = o$ ist. Auch hat man

$$g\,dx = \frac{k^2 v\,dv}{k^2 - v^2}$$

und daher

$$x = \frac{k^2}{2g} \log \frac{k^2}{k^2 - v^2} \qquad (4)$$

als Werth von x, in einer Function von v ausgedrückt.

133.

Diese Formeln enthalten die vollständige Auflösung der Aufgabe. Man kann daraus die Folgerung ziehen, daſs die Geschwindigkeit, wenn die Zeit unaufhörlich zunimmt, sich immer mehr der Gleichförmigkeit nähert, und daſs sie als gleichförmig angesehen werden kann, wenn die Geschwindigkeit gt, die durch die Schwerkraft erzeugt wird, sehr groſs im Verhältniſs zu k geworden ist. Vernachläſsigt man nemlich alsdann die Exponentialgröſse $e^{-\frac{gt}{k}}$, die ein sehr kleiner Bruch ist, so hat man

$$v = k, \quad \varphi = o, \quad x = kt - \frac{k^2}{g} \log 2.$$

Da der Widerstand der Flüssigkeit eine Kraft ist, die an der Oberfläche des Körpers ausgeübt wird, so ist die daraus entspringende Kraft unabhängig von der Masse, und würde dieselbe seyn, sowohl wenn der Körper aus einem sehr dichten Stoffe gebildet wäre, als auch, wenn man den im Inneren des Körpers befindlichen Stoff wegnähme, und denselben auf eine dünne Rinde reducierte. Da sich aber die beschleunigende Kraft aus der bewegenden ergiebt, wenn man letztere durch die Masse des Körpers dividiert, so folgt hieraus, daſs die erstere dieser beiden Kräfte, wenn sonst Alles gleich ist, im umgekehrten Verhältnisse dieser Masse stehen wird, und folglich k in geradem Verhältnisse der Quadratwurzel derselben. Daher bewegt sich auch ein schwerer Körper zuletzt desto schneller in einem widerstehenden Mittel, je gröſser

seine Dichtigkeit ist, wenn die Gestalt und Ausdehnung der Oberfläche dieselbe bleibt.

Wenn die Dichtigkeit des Mittels im Verhältnisse zu der des Körpers sehr gering ist, so ist k sehr grofs, und es nähert sich daher die Bewegung erst nach langer Zeit der Gleichförmigkeit. So lange die Geschwindigkeit gt nicht sehr bedeutend ist, hat man, in convergierenden Reihen,

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}\right) = \frac{gt}{k} + \frac{g^3t^3}{6k^3} + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}\right) = 1 + \frac{g^2t^2}{k^2} + \frac{g^4t^4}{24k^4} + \ldots$$

$$\log\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}\right) = \frac{g^2t^2}{2k^2} - \frac{g^4t^4}{12k^4} + \ldots$$

und die Formeln (2) und (3) werden

$$v = gt - \frac{g^3t^3}{3k^2} + \ldots$$

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2 - \frac{g^3t^4}{12k^2} + \ldots.$$

Wenn die Dichtigkeit des Mittels völlig Null ist, so dafs also k unendlich grofs ist, so verwandeln sich diese Gleichungen, wie dies auch seyn mufs, in die der gleichförmig beschleunigten Bewegung.

134.

Wenn der Körper von unten nach oben geworfen wird, hat man

$$\varphi = -g - \frac{gv^2}{k^2}.$$

Ist seine obere Oberfläche dieselbe, wie die untere, so ist auch die Constante k dieselbe, wie wenn der Körper fällt; sind aber diese beiden Theile der Oberfläche verschieden, so ist dies auch bei den Werthen von k der Fall, und wenn es sich z. B. von einem Kegel handelt, dessen Grundfläche horizontal steht, so wird die Gröfse k viel gröfser oder viel kleiner bei der aufsteigenden Bewegung, als bei dem Falle des Körpers seyn, je nachdem die Spitze über oder unter der Grundfläche liegt.

Um einen bestimmten Fall zu betrachten, nehme ich an,

der Körper sey eine gleichartige Kugel; nennt man ihren Halbmesser r, ihre Dichtigkeit D, die des Mittels ϱ, so hat man (§. 124)

$$k^2 = \frac{Dr}{\gamma\varrho},$$

wo γ eine Constante bedeutet, die nur von der Natur des Mittels abhängen kann, das flüssig oder luftförmig seyn kann, und von der Temperatur desselben.

Substituiert man diesen Werth von φ in die zweite Gleichung (1), so hat man

$$\frac{kdv}{k^2+v^2} = -\frac{gdt}{k};$$

integriert man, und bezeichnet die Anfansggeschwindigkeit des Körpers durch a, so folgt daraus

$$\text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{v}{k}\right) = \text{arc.}\left(\text{tang.} = \frac{a}{k}\right) - \frac{gt}{k}.$$

Der Werth von v, den man hieraus findet, läſst sich leicht unter die Form

$$v = \frac{k\left(a \cos\frac{gt}{k} - k \sin\frac{gt}{k}\right)}{a \sin\frac{gt}{k} + k \cos\frac{gt}{k}}$$

bringen. Multipliciert man mit dt und integriert von Neuem, so daſs $x = o$ ist, wenn $t = o$ ist, so findet man hieraus

$$x = \frac{k^2}{g} \log\left(\frac{a}{k} \sin\frac{gt}{k} + \cos\frac{gt}{k}\right).$$

Auch hat man

$$gdx = -\frac{k^2 vdv}{k^2+v^2},$$

und daher

$$x = \frac{k^2}{2g} \log\frac{k^2+a^2}{k^2+v^2}.$$

Setzt man $\frac{1}{k} = \alpha$ und alsdann $\alpha = o$, um diese Formeln auf den Fall des leeren Raumes anzuwenden, so erscheinen sie unter der Form $\frac{o}{o}$ und nach der gewöhnlichen Regel findet man alsdann, wie dies auch seyn muſs,

$$v = a - gt, \quad x = at - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

welches Resultat man auch durch die Entwickelung in Reihen, wie im vorhergehenden §., erhält.

135.

Man nenne h die gröfste Höhe, zu welcher der Körper aufsteigt und die dem Werthe $v = o$ entspricht, so haben wir

$$h = \frac{k^2}{2g} \log \frac{k^2 + a^2}{k^2}.$$

Sey ferner ϑ_1 die Zeit, die der Körper braucht, um dorthin zu kommen, so ist

$$\vartheta_1 = \frac{k}{g} \text{ arc } \left(\text{tang} = \frac{a}{k}\right).$$

Ist der Körper in dieser Höhe angelangt, so fällt er zurück, und seine Bewegung wird durch die Formeln des §. 132 ausgedrückt. Bezeichnet man durch a' die Geschwindigkeit, die er erhält, wenn er von dieser ganzen Höhe h herab gefallen seyn wird, so hat man nach der Gleichung (4)

$$h = \frac{k^2}{2g} \log \frac{k^2}{k^2 - a'^2},$$

und setzt man diesen Werth von h dem vorhergehenden gleich, so hat man

$$\frac{k^2}{k^2 - a'^2} = \frac{k^2 + a^2}{k^2},$$

und folglich

$$a'^2 = \frac{a^2 k^2}{a^2 + k^2}.$$

Hieraus folgt $a' < a$, so dafs die Geschwindigkeit des Körpers, wenn er zu seinem Ausgangspunkte zurück gekommen ist, kleiner ist, als seine anfängliche Geschwindigkeit.

Sey auch ϑ' die Zeit des ganzen Falles, welche $v = a'$ entspricht. Man hat alsdann

$$\vartheta' = \frac{k}{2g} \log \frac{k + a'}{k - a'},$$

oder, wenn man für a' seinen Werth setzt,

$$\vartheta' = \frac{k}{2g} \log \frac{\sqrt{a^2 + k^2} + a}{\sqrt{a^2 + k^2} - a},$$

welcher Werth verschieden ist von dem der Zeit ϑ_1, während welcher der Körper in die Höhe steigt.

Multipliciert man mit $\sqrt{a^2 + k^2} - a$ den Zähler und Nenner des Bruches, der unter dem Logarithmen enthalten ist, so hat man noch einfacher

$$\vartheta' = \frac{k}{g} \log \frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2} - a},$$

und nennt man ϑ die ganze Zeit $\vartheta' + \vartheta_1$ des Aufsteigens und Herabfallens des Körpers, so findet man daraus

$$g \frac{\vartheta}{k} = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{a}{k}\right) + \log \frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2} - a}.$$

Ist der Körper eine Kugel, die aus einer vertical gerichteten Kanone in die Luft geschossen wird, so kann man, ungeachtet der Geschwindigkeit der Bewegung, die Zeit ϑ mit einiger Genauigkeit messen, und kennt man aufserdem die Wurfgeschwindigkeit a, so dient die vorhergehende Gleichung dazu, den Werth von k zu bestimmen, der sich auf den Halbmesser r der Kugel bezieht. Bezeichnet man durch k' das, was k in Beziehung auf eine andere Kugel wird, die aus demselben Stoffe besteht und den Halbmesser r' hat, so findet man

$$k' = k \sqrt{\frac{r'}{r}}$$

vermöge des Werthes von k^2 im vorhergehenden §.

136.

Wenn man von der Schwerkraft abstrahiert, und annimmt, dafs der Widerstand des Mittels einer Potenz der Geschwindigkeit proportional ist, deren Exponent kleiner als die Einheit ist, so bietet die Auflösung der Aufgabe eine Besonderheit dar, die bemerkt zu werden verdient.

Man nehme an, man habe z. B.

$$\varphi = -2g\sqrt{\frac{v}{k}},$$

wo g und k noch immer die Schwerkraft und eine beständige und gegebene Geschwindigkeit bedeuten. Die Gleichung der Bewegung ist alsdann

$$\frac{dv}{dt} = -2g\sqrt{\frac{v}{k}},$$

entwickelt man daraus den Werth von $g\,dt$, integriert und bezeichnet die Anfangsgeschwindigkeit durch a, so findet man

$$gt = \sqrt{k}\,(\sqrt{a} - \sqrt{v})$$

und daher

$$v = \left(\sqrt{a} - \frac{gt}{\sqrt{k}}\right)^2$$

Multipliciert man mit dt und integriert noch einmal, so dafs $x = o$ ist, wenn $t = o$ ist, so findet man

$$x = \frac{a\sqrt{ak}}{3g} + \frac{1}{3gk}\,(gt - \sqrt{ak})^3$$

als Werth des Raumes, der in einem bestimmten Augenblicke zurück gelegt worden ist.

Aus dem Werthe von v ergiebt sich, dafs die Geschwindigkeit vom Anfange der Bewegung an abnimmt, bis zu dem Augenblicke, der $t = \frac{\sqrt{ak}}{g}$ entspricht; in diesem Augenblicke ist die Geschwindigkeit Null, und später geht die Bewegung nach derselben Richtung, wie früher, fort, und die Geschwindigkeit nimmt immer zu. Da aber die Geschwindigkeit in einem gewissen Augenblicke Null ist, so ist alsdann die beschleunigende Kraft ebenfalls Null; daher mufs der Körper in diesem Augenblicke stille stehen und in Ruhe bleiben. Man mufs aber bemerken, dafs die Gleichung der Bewegung auch eine besondere Auflösung $v = o$ zuläfst, so dafs ihre vollständige Auflösung ihr Integral und die Gleichung $v = o$ umfafst. Hieraus folgt also, dafs der Aufgabe von der Gränze $t = o$ bis zu $t = \frac{\sqrt{ak}}{g}$ durch das Integral der Gleichung der Bewegung und für gröfsere Werthe von t durch die besondere Auflösung Genüge geschieht. Während des ersten Zeitraums beschreibt der Körper, mit fortwährend abnehmender Geschwindigkeit, eine Linie, die $= \frac{a\sqrt{ak}}{3g}$ ist, und wenn er das Ende dieser Linie erreicht hat, so hört seine Bewegung auf und er bleibt in Ruhe.

Dieses rein hypothetische Beispiel ist hinreichend, um zu zeigen, wie nothwendig es ist, dafs man auf die besonderen

ungen der Differentialgleichungen der Bewegung Rück- nimmt, wenn solche vorhanden sind, was in der That ls bei den Bewegungen, die in der Natur vorkommen, hat, wie aus den Ausdrücken für die Kräfte, die als ionen der erlangten Geschwindigkeit und des durchlau- Raumes gegeben sind, erhellt.

137.

Ich werde nun Beispiele der Bewegung geben, bei wel- sich die beschleunigende Kraft mit dem durchlaufenen ie ändert. Der einfachste Fall tritt dann ein, wenn man materiellen Punkt betrachtet, der zu einem festen Punkte, radem Verhältnisse des Abstandes von diesem Punkte, gen wird, den man sich auf der geraden Linie, die der gliche Punkt beschreibt, liegend denkt. Am Ende der t sey dieser Abstand z, und man nehme an, dafs bei n gegebenen Abstande a, die beschleunigende Kraft der werkraft g gleich sey, so hat man, nach dem gegebenen tze,

$$\varphi = \frac{gz}{a}$$

als ihren Werth in einem beliebigen Augenblicke. Ist x der Raum, der bis zu demselben Augenblicke durchlaufen worden ist, und ist der sich bewegende Punkt von einem Punkte ausgegangen, der um c vom Mittelpunkte der Anziehung absteht, indem er sich zugleich nach diesem Mittelpunkte hin bewegt, so hat man auch

$$x = c - z, \quad v = -\frac{dz}{dt}$$

und die dritte Gleichung (1) wird

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{g}{a}z.$$

Ihr vollständiges Integral ist

$$z = A \cos t\sqrt{\frac{g}{a}} + B \sin t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

wo A und B die zwei willkührlichen Constanten bedeuten. Nimmt man an, dafs die Anfangsgeschwindigkeit des sich bewegenden Punktes Null ist, so hat man zu gleicher Zeit

$$t = o, \quad z = c, \quad \frac{dz}{dt} = o,$$

und hieraus schliefst man

$$A = c, \quad B = o,$$

und daher

$$z = c \cos t \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Diese Formel zeigt, dafs der Abstand z Null ist, oder der sich bewegende Punkt den Mittelpunkt der Anziehung am Ende einer Zeit erreicht, die unabhängig von der Entfernung c seines Ausgangspunktes und $= \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ ist; er wird alsdann um diesen Mittelpunkt nach beiden Seiten hin Schwingungen machen, deren beständige Weite und Dauer dieser Abstand c und diese Zeit $\frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ seyn werden.

138.

Als anderes Beispiel betrachte man die Bewegung eines schweren Körpers im leeren Raume; man nehme an, dafs er von einer hinlänglich grofsen Höhe herabfalle, so dafs man, während seines Falles, auf die Veränderungen der Schwere Rücksicht nehmen mufs.

Sey BAE (Fig. 35) ein verticaler grofser Kreis der Erde, D der Ausgangspunkt des Körpers in dieser Ebene, M die Lage, die er am Ende der Zeit t auf der geraden Linie DC hat, die sich im Mittelpunkte C der Erde endigt, und ihre Oberfläche in A trifft. Man nenne r den Halbmesser CA, h die Höhe AD, x den Raum DM, den der Körper durchlauft, z seinen Abstand CM vom Mittelpunkte C, so dafs man

$$z = r + h - x$$

hat. Die beschleunigende Kraft φ ist die Schwerkraft im Punkte M, bezeichnet man nun noch immer durch g die Schwere an der Oberfläche der Erde d. h. im Punkte A, und nimmt man an, dafs ihre Gröfse im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Abstandes vom Punkte C sich ändert, so hat man daher

$$\varphi : g = r^2 : z^2,$$

und hieraus findet man

$$\varphi = \frac{g r^2}{z^2},$$

wodurch die dritte Gleichung (1) in

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{g r^2}{(r + h - x)^2}$$

übergeht.

Ich multipliciere die beiden Theile dieser Gleichung durch $2 dx$, integriere alsdann, und bestimme darauf die willkührliche Constante, so daſs man $\frac{dx}{dt} = o$ hat, wenn $t = o$ ist, so findet man

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 2 g r^2 \left(\frac{1}{r + h - x} - \frac{1}{r + h}\right),$$

wodurch man die Geschwindigkeit, die der Körper erlangt hat, wenn er sich in einem Abstande x von seinem Ausgangspunkte befindet, erfährt. Im Punkte A, wo $x = h$ ist, ist diese Geschwindigkeit

$$\sqrt{2 g h} \sqrt{\frac{r}{r + h}},$$

und daher kleiner, wie dies auch seyn muſs, als wenn die Schwere in der ganzen Höhe h dieselbe Gröſse hätte, wie an der Oberfläche der Erde.

Die vorhergehende Gleichung giebt

$$\sqrt{\frac{2 g r^2}{r + h}}\, dt = \frac{(r + h - x)\, dx}{\sqrt{(r + h) x - x^2}}.$$

Vergleicht man aber diese Differentialgleichung mit der Gleichung (a) des §. 73, so sieht man, daſs, wenn man eine halbe Cykloide DOC construiert, deren Spitze im Punkte D und deren Anfangspunkt im Punkte O ist, welcher auf der Linie CO liegt, die auf CD senkrecht steht, und wenn zugleich CD der Durchmesser des erzeugenden Kreises dieser Cykloide ist, welcher daher gleich $r + h$ ist, wenn man ferner durch den Punkt M die Linie MN senkrecht auf DC zieht, welche die Cykloide im Punkte N treffen wird,

$$MN = t \sqrt{\frac{2 g r^2}{r + h}}$$

seyn wird, so daſs die Ordinate MN des Punktes N die Zeit t anzeigt, welche der Körper braucht, um die Abscisse DM zu durchlaufen. Unter endlicher Form hat man

$$t\sqrt{\frac{2gr^2}{r+h}}=\sqrt{(r+h)x-x^2}+\tfrac{1}{2}(r+h)\,\text{arc}\left(\cos=\frac{r+h-2x}{r+h}\right).$$

wenn man integriert und bemerkt, daſs $x=o$ ist, wenn $t=o$ ist.

Wenn die Höhe h und daher auch der Abstand x sehr klein im Verhältniſs zu r sind, so kann diese Formel nur wenig von der verschieden seyn, die der unveränderlichen Schwere entspricht. Wirklich hat man

$$\text{arc}\left(\cos=\frac{r+h-2x}{r+h}\right)=\text{arc}\left(\sin=\frac{2\sqrt{(r+h)x-x^2}}{r+h}\right),$$

ist nun der Sinus sehr klein, so kann man ihn statt des Bogens nehmen, wodurch sogleich das zweite Glied im zweiten Theile der vorhergehenden Gleichung dem ersten gleich wird. Auch kann man den Halbmesser r an die Stelle von $r+h-x$ setzen, und daher ihre Summe durch $2\sqrt{rx}$ ersetzen; auf diese Weise geht die Gleichung in

$$t\sqrt{\frac{2gr^2}{r+h}}=2\sqrt{rx}$$

über, oder man hat

$$x=\tfrac{1}{2}gt^2$$

wenn man h gegen r vernachlässigt.

Ich begnüge mich, den Fall, in welchem der Körper, der einer veränderlichen Schwerkraft unterworfen ist, von unten nach oben geworfen wird, als Rechnungsbeispiel blos anzudeuten, und will als letztes Beispiel der geradlinigen Bewegung, die eines materiellen Punktes betrachten, der nach zwei festen Mittelpunkten gezogen wird, die auf der geraden Linie, welche er beschreibt, liegen.

139.

Seyen A und B (Fig. 36) die zwei Mittelpunkte der Anziehung, M die Lage des sich bewegenden Punktes am Ende der Zeit t und D sein Ausgangspunkt. Um einen bestimmten Fall zu betrachten, nehme man an, die Bewegung habe zwi-

schen den zwei Mittelpunkten der Anziehung statt und gehe von A nach B, man setze

$$DM = x, \quad AM = z, \quad AD = \alpha, \quad BM = c - z,$$

so dafs x der durchlaufene Raum, z der Abstand des sich bewegenden Punktes vom Punkte A, α der anfängliche Abstand und c die Länge der geraden Linie AB ist. Nimmt man noch immer an, dafs die Anziehungen im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Abstände stehen, und bezeichnet man durch a^2 und b^2 die Gröfsen der Kräfte, die, in der Einheit des Abstandes, von den Mittelpunkten A und B ausgehen, so hat man $\frac{a^2}{z^2}$ und $\frac{b^2}{(c-z)^2}$ als Werth der entsprechenden Gröfsen für den Fall, wenn der materielle Punkt in M ist. Die beschleunigende Kraft φ ist der Ueberschufs der zweiten Kraft, welche den Raum x zu vergröfsern strebt, über die erste, welche ihn zu vermindern sucht, daher hat man, da $dx = dz$ ist,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{b^2}{(c-z)^2} - \frac{a^2}{z^2}, \qquad (a)$$

in welchen Ausdruck hier die dritte Gleichung (1) übergeht; $\frac{dz}{dt}$ ist die Geschwindigkeit v des materiellen Punktes im Punkte M.

Multipliciert man die Gleichung (a) durch $2dz$ und integriert, so hat man

$$\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{2b^2}{c-z} + \frac{2a^2}{z} - \gamma, \qquad (b)$$

wo γ die willkührliche Constante ist. Um sie zu bestimmen, bezeichne ich durch k die Anfangsgeschwindigkeit, die dem Werthe $z = \alpha$ entspricht, so hat man

$$\gamma = \frac{2b^2}{c-\alpha} + \frac{2a^2}{\alpha} - k^2.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorhergehenden ab, so folgt hieraus

$$\frac{dz^2}{dt^2} = k^2 + 2b^2\left(\frac{1}{c-z} - \frac{1}{c-\alpha}\right) - 2a^2\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{z}\right) \quad (c)$$

welcher Ausdruck die Geschwindigkeit des Punktes, in einer beliebigen Lage zwischen den zwei Punkten A und B, angiebt.

140.

Es giebt auf der geraden Linie AB einen gewissen Punkt C, in welchem die beiden Anziehungskräfte gleich sind, so dafs, wenn man den materiellen Punkt dorthin bringt, oder derselbe, ohne irgend eine Geschwindigkeit erlangt zu haben, dorthin kommt, er daselbst in Ruhe bleiben wird. Nennt man h den Abstand AC, so hat man

$$\frac{b^2}{(c-h)^2} = \frac{a^2}{h^2}.$$

Hieraus findet man zwei Werthe von h, von welchen der eine dem Punkte C angehört, der zwischen A und B liegt, der andere einem Punkte, der auf der Verlängerung von AB, auf der Seite des Mittelpunktes, der die schwächere Anziehung ausübt, liegt. Der erste dieser zwei Werthe ist

$$h = \frac{ac}{a+b}.$$

Man nenne f die kleinste Anfangsgeschwindigkeit, die man dem Punkte beilegen mufs, damit er in C ankomme, so dafs seine Geschwindigkeit, wenn er in diesem Punkte angelangt ist, Null ist, so hat man zu gleicher Zeit

$$k = f, \quad z = h, \quad \frac{dz}{dt} = o,$$

und in Folge der Gleichung (c) und des Werthes von h folgt hieraus

$$f^2 = \frac{2b^2}{c-a} + \frac{2a^2}{a} - \frac{2(a+b)^2}{c}. \qquad (d)$$

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit k kleiner als f ist, so fällt der materielle Punkt auf A zurück, ist sie gröfser, so geht er über den Punkt C hinaus und fällt auf B. Ist $k=f$, so braucht der Punkt eine unendlich grofse Zeit, um den Punkt C zu erreichen, weil er in einem unendlich kleinen Abstande von diesem Punkte nur noch eine unendlich kleine Geschwindigkeit besitzt, und von einer unendlich kleinen Kraft getrieben wird.

141.

Sind A und B die Mittelpunkte zweier gleichartiger Kugeln, oder solcher, die aus concentrischen gleichartigen Schichten zusammen gesetzt sind, so kann man annehmen, dafs die

Anziehungen, die man betrachtet, die der zwei Kugeln sind; alsdann verhalten sich die Gröfsen a^2 und b^2 wie die Massen (§. 101). Nimmt man z. B. an, dafs A der Mittelpunkt des Mondes und B der der Erde ist, und vernachlässigt man die Abweichung dieser Körper von der Kugelgestalt, so hat man

$$a^2 = \frac{b^2}{75},$$

denn die Masse des Mondes, aus der Kraft, mit welcher er das Wasser des Meeres in die Höhe zieht, berechnet, ist $\frac{1}{75}$ der Masse der Erde*). Daher hat man

$$h = \frac{c}{1 + \sqrt{75}} = (0{,}10352)\, c,$$

so dafs der Punkt, der auf gleiche Weise durch die Erde und ihren Trabanten angezogen wird, sich ungefähr im zehnten Theile ihres Abstandes, vom Monde aus gerechnet, befindet.

Sey r der Halbmesser der Erde, so kann man $60\, r$ für den Abstand c des Mondes von der Erde nehmen, und wenn der sich bewegende Körper von der Oberfläche des Mondes ausgegangen ist, so hat man zu gleicher Zeit

$$\alpha = \frac{3r}{11}$$

vermöge des bekannten Verhältnisses des Durchmessers des Mondes zu dem der Erde. Vermittelst dieser Werthe von r und α und des Werthes $a = \frac{b}{\sqrt{75}}$, wird die Gleichung (d)

$$f^2 = (0{,}044894)\, \frac{2b^2}{r}.$$

Bezeichnet man die Anziehung der Erde an ihrer Oberfläche durch g, so hat man

$$b^2 = g r^2$$

für diese Kraft in der Einheit des Abstandes. Setzt man daher

$$(0{,}044894)\, r = r',$$

so folgt hieraus

$$f^2 = 2 g r'.$$

*) Vergl. §. 246. Herr von Lindenau hat die Masse des Mondes, nach einer Methode, die gröfserer Genauigkeit fähig ist, zu $\frac{1}{87{,}73}$ der Erdmasse berechnet. Anm. d. Uebers.

Die Anziehung g kann aber für die Schwerkraft genommen werden, von welcher sie den Haupttheil ausmacht, daher ist f die Geschwindigkeit, welche zu der Höhe r' gehört, und da

$$g = 9^m,80896, \quad \pi r = 20000000^m$$

ist, so hat man

$$f = 2368^m.$$

Da der Mond keine Atmosphäre hat, deren Widerstand die Geschwindigkeit der Körper, welche von seiner Oberfläche ausgehen, vermindern könnte, so folgt hieraus, dafs, wenn die Erde und der Mond in Ruhe wären, ein Körper, der von der Oberfläche des Mondes nach der Erde hin mit einer Geschwindigkeit geschleudert würde, die mehr als 2361 Meter in einer Secunde betrüge, über den Punkt, in welchem die Anziehung gleich ist, hinaus gehen und auf die Oberfläche der Erde fallen würde. Bei der Bewegung des Mondes um die Erde, trifft die gerade Linie AB, welche von einem Mittelpunkte zum anderen geht, die Oberfläche des Mondes beständig in demselben Punkte, welches der Punkt D seyn müfste, von welchem aus der Körper nach der Richtung DB geworfen wurde. Da aber der Punkt D, während einer Secunde, auf dem Kreise, der vom Mittelpunkte der Erde aus beschrieben wird, eine Länge von ungefähr 1000 Meter durchlauft, so wird die absolute Geschwindigkeit des Körpers, der Gröfse und Richtung nach, die Mittelkraft der Geschwindigkeit, die nach DB gerichtet ist, und einer Geschwindigkeit von 1000 Meter, die senkrecht auf DB ist, seyn. Hiernach bleibt der Körper nicht auf der Linie AB, sondern beschreibt eine krumme Linie im Raume; die vorhergehenden Formeln können daher nicht auf seine Bewegung angewandt werden, und er fällt nicht mehr auf die Oberfläche der Erde, wie in dem Falle, wenn der Mond unbeweglich wäre.

142.

Löfst man die Gleichung (b) in Beziehung auf dt auf, so hat man

$$dt = \frac{\sqrt{cz - z^2}\, dz}{\sqrt{2a^2c - (2a^2 - 2b^2 + c\gamma)z + \gamma z^2}}.$$

Das Integral dieser Formel kann immer vermittelst der

elliptischen Functionen ausgedrückt werden, so dafs man, mit Hülfe der Tafeln für diese Functionen, die Zeit, die einem gegebenen Abstande z entspricht, und umgekehrt berechnen kann. Aber abgesehen von dem Falle, wenn eine der zwei Anziehungen Null ist, giebt es noch andere, in welchen das Integral der vorhergehenden Formel in endlicher Gestalt erhalten werden kann. Diese Fälle treten dann ein, wenn die im Nenner unter dem Wurzelzeichen enthaltene Gröfse ein vollständiges Quadrat ist, wenn also

$$(2a^2 - 2b^2 + c\gamma)^2 = 8a^2 c\gamma,$$

aus welcher Gleichung man

$$\gamma = \frac{2}{c}(a \pm b)^2$$

findet. Setzt man diesen Werth dem Werthe von γ in §. 139 gleich, so findet man

$$k^2 = \frac{2b^2}{c - \alpha} + \frac{2a^2}{\alpha} - \frac{2(a \pm b)^2}{c}.$$

Einer dieser zwei Werthe von k^2 ist der von f^2, der andere ist offenbar gröfser. Hieraus folgt, dafs, wenn keine dieser zwei Gröfsen a und b Null ist, man die Zeit unter endlicher Form als Function von z darstellen kann, wenn der Körper die kleinste Geschwindigkeit f erhalten hat, mit welcher er den Punkt C erreichen kann, und wenn man ihm eine gewisse Geschwindigkeit beilegt, die gröfser ist als diese.

Ich substituiere den doppelten Werth von γ in den Ausdruck von dt, so erhalte ich

$$\sqrt{\frac{2}{c}}\, dt = \frac{\sqrt{cz - z^2}\, dz}{ac - (a \pm b) z},$$

welche Formel man rational machen und ohne Schwierigkeit nach bekannten Regeln integrieren kann. Das Differential dt mufs immer positiv seyn, das Differential dz ist positiv, während sich der Körper von D nach B bewegt, und negativ, wenn er nach A zurück kommt. Im ersten Falle mufs man die Wurzelgröfse $\sqrt{cz - z^2}$ mit demselben Zeichen nehmen, wie den Nenner $ac - (a \pm b) z$, und im zweiten Falle mit entgegengesetztem Zeichen.

143.

Sowohl wenn man $b = o$, als auch wenn man $c = \infty$ setzt, ist der Körper nur der Anziehung des Mittelpunktes A unterworfen. Die Gleichung (c) geht alsdann in

$$\frac{dz^2}{dt^2} = k^2 - 2a^2\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{z}\right) \qquad (e)$$

über; der Werth von dt, der sich hieraus ergiebt, kann unter endlicher Form integriert werden, und giebt den Werth von t in einer Function von z ausgedrückt.

Setzt man $\frac{dz}{dt} = o$, so hat man die Gleichung

$$\frac{2a^2}{\alpha} - k^2 = \frac{2a^2}{z},$$

um den Abstand z, in welchem der Körper sich zu bewegen aufhört, zu bestimmen. Ist $2a^2 = k^2\alpha$, so ist dieser Abstand unendlich groſs, was so viel sagen will, als daſs der Körper nirgendwo stille steht. Dies ist auch der Fall, wenn $2a^2 < k^2\alpha$ ist, aus welcher Annahme für z ein negativer Werth folgen würde, der keinem Punkte der unbestimmten geraden Linie BD angehören kann, nach welcher der Körper bewegt worden ist. In diesen zwei Fällen nähert sich die Bewegung immer mehr der Gleichförmigkeit, je mehr sich der Körper von A entfernt.

Wenn der Abstand z sehr groſs, und die Bewegung fast gleichförmig geworden ist, so ist die Geschwindigkeit des Körpers, nach der Gleichung (e), beinahe $= \sqrt{k^2 - \frac{2a^2}{\alpha}}$, oder $= \sqrt{k^2 - 2g\alpha}$, wenn man annimmt, daſs $a^2 = g\alpha^2$, d. h. wenn man annimmt, daſs der Körper von der Oberfläche einer Kugel ausgegangen ist, deren Halbmesser α ist, und an welcher die Anziehung gleich g war. Dies zeigt, daſs die Verminderung der anfänglichen Geschwindigkeit k um so bedeutender seyn wird, je gröſser diese Kraft und dieser Halbmesser ist.

Drittes Kapitel.

Von der krummlinigen Bewegung.

I. Allgemeine Formeln dieser Bewegung.

144.

Bei der krummlinigen Bewegung ist die krumme Linie, die durch den sich bewegenden Punkt beschrieben wird, das, was man die Trajectorie dieses materiellen Punktes nennt. Am Ende einer Zeit t sey M (Fig. 37) der Ort des Punktes. Nennt man s den Bogen CM der Trajectorie, der zwischen dem materiellen Punkte und einem festen Punkte C enthalten ist, welchen man willkührlich auf dieser krummen Linie gewählt hat, so ist s eine Function von t, so daſs man, bei einer beliebigen krummlinigen Bewegung,

$$s = Ft$$

hat. Bezeichnet man zu gleicher Zeit durch x, y, z die drei rechtwinkligen Coordinaten des sich bewegenden Punktes, so werden diese Veränderlichen ebenfalls Functionen von t seyn und man hat

$$x = ft, \quad y = f't, \quad z = f''t.$$

Sind diese drei letzteren Gleichungen bekannt, so kann man daraus, durch Elimination von t, die zwei Gleichungen der Trajectorie, in x, y und z ausgedrückt, finden. Vermittelst der Gleichungen dieser krummen Linie, kann man s als Function einer dieser drei Coordinaten, und daher auch als Function von t, bestimmen, wodurch man das Gesetz der Bewegung auf der Trajectorie kennen lernt. Jede dieser drei vorhergehenden Gleichungen ist die der geradlinigen Bewegung der Projection des materiellen Punktes auf eine der Coordinatenaxen. Hieraus folgt also, daſs die vollständige Bestimmung der krummlinigen Bewegung eines materiellen Punktes im Raume auf die dreier geradliniger Bewegungen zurück kommt, welche die Bewegungen seiner Projectionen auf die drei Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz seyn werden. Wenn diese drei

Bewegungen gleichförmig sind, so ist die des materiellen Punktes ebenfalls gleichförmig und geradlinig, und umgekehrt.

145.

Während des Augenblickes dt wird der Körper das Element ds der Trajectorie beschreiben; vernachlässigt man, in diesem unendlich kleinen Zeitraume, die Wirkung der Kräfte die ihn treiben, so kann man seine Bewegung als eine geradlinige und gleichförmige betrachten. Nennt man daher v die Geschwindigkeit, die er am Ende der Zeit t erlangt hat, so hat man

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Würden die Kräfte wirklich in dem Augenblicke, den man betrachtet, zu wirken aufhören, so würde sich der Körper mit dieser Geschwindigkeit v und nach der Verlängerung MT' des Elementes ds, d. h. nach der Tangente der Trajectorie fort bewegen, weil er, wegen der Trägheit der Materie, alsdann weder die Richtung seiner Bewegung, noch die Gröfse seiner Geschwindigkeit ändern könnte (§. 113). Man kann daher einen materiellen Punkt, der eine beliebige krumme Linie beschreibt, so ansehen, als hätte er in jedem Augenblicke eine Geschwindigkeit, die nach der Tangente dieser krummen Linie gerichtet ist, und deren Werth durch das Verhältnifs des Differentialelementes der krummen Linie zum Differentialelemente der Zeit ausgedrückt wird.

Bezeichnet man durch p, q, r, die Geschwindigkeiten der Projectionen des Körpers auf die drei Axen der x, y, z, am Ende der Zeit t, so hat man auch, bei diesen drei geradlinigen Bewegungen,

$$p = \frac{dx}{dt}, \quad q = \frac{dy}{dt}, \quad r = \frac{dz}{dt}.$$

Bezeichnet man aber durch α, β, γ die Winkel, welche die Tangente der Trajectorie oder die Richtung der Geschwindigkeit v mit den Linien macht, die den Axen der x, y, z parallel sind, so hat man (§. 17)

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

und hieraus findet man

$$p = v \cos\alpha, \quad q = v \cos\beta, \quad r = v \cos\gamma \qquad (1)$$

und zu gleicher Zeit

$$v^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

Da die Zeit t beständig wächst, so ist ihr Differential immer positiv. Die Geschwindigkeiten p, q, r sind positiv oder negativ, je nachdem die Coordinaten x, y, z wachsen oder abnehmen. In den Gleichungen (1) kann man die Geschwindigkeit v wie eine positive Gröfse ansehen, die Richtung dieser Geschwindigkeit oder der Theil MT der Tangente der Trajectorie, nach welchem sie gerichtet ist, bestimmt sich alsdann durch die Zeichen von p, q, r, welche angeben, ob die Winkel α, β, γ, spitz oder stumpf sind. In der Gleichung $v = \frac{ds}{dt}$ mufs man die Geschwindigkeit v als positiv oder negativ ansehen, je nachdem der Bogen s wächst oder abnimmt.

Seitengeschwindigkeiten der Geschwindigkeit v eines materiellen Punktes nennt man die Geschwindigkeiten p, q, r seiner drei Projectionen auf rechtwinklige Axen; jede dieser drei Seitengeschwindigkeiten ist das, was man die Geschwindigkeit eines Körpers parallel mit der Axe, der die Projection entspricht, nennt.

Vergleicht man die Gleichungen (1) mit denen des §. 31, so sieht man, dafs diese Zusammensetzung der Geschwindigkeiten auf dieselbe Weise vollzogen wird, wie die der Kräfte. Zieht man nach dieser Analogie durch den Punkt M eine beliebige gerade Linie MA, welche mit den, den Axen der x, y, z parallel, durch diesen Punkt gezogenen Linien, die spitzen oder stumpfen Winkel a, b, c einschliefst, so hat die Seitengeschwindigkeit dieser Geschwindigkeit v nach der Richtung der geraden Linie MA den Werth

$$p \cos a + q \cos b + r \cos c.$$

Die Gröfse der Bewegung (§. 126) eines isolierten materiellen Punktes und die eines Körpers, dessen Punkte alle gleiche und parallele Geschwindigkeiten besitzen, können in andere Gröfsen dieser Art zerlegt und diese wieder auf eine einzige zurück geführt werden, ganz nach denselben Regeln, wie die Geschwindigkeiten, die sie als Factor enthalten.

146.

Am Ende der Zeiten $t + dt$, seyen $p + p'$, $q + q'$, $r + r'$ das, was die drei Seitengeschwindigkeiten der Geschwindigkeit des Körpers werden, die den Axen der x, y, z parallel sind, so dafs p', q', r', die unendlich kleinen Zunahmen der Geschwindigkeiten vorstellen, welche während der Zeit dt nach diesen Richtungen statt haben. Der Zuwachs der Geschwindigkeit nach der geraden Linie MA ist

$$p' \cos a + q' \cos b + r' \cos c.$$

Wie aber auch die Gröfsen p', q', r' beschaffen seyn mögen, so kann man immer, sobald man

$$u^2 = p'^2 + q'^2 + r'^2$$

setzt, und u als eine positive Gröfse betrachtet, drei Winkel α', β', γ', die spitz oder stumpf seyn können, finden, so dafs

$$p' = u \cos \alpha', \quad q' = u \cos \beta', \quad r' = u \cos \gamma'$$

ist, wonach also der Zuwachs der Geschwindigkeit nach MA

$$u (\cos a \cos \alpha' + \cos b \cos \beta' + \cos c \cos \gamma')$$

wird. Aufserdem ist die in den Klammern enthaltene Gröfse der Cosinus eines gewissen Winkels, den ich σ nenne. Der eben erwähnte Zuwachs ist daher gleich $u \cos \sigma$; daher ist u sein gröfster Werth, welcher derjenigen Richtung der geraden Linie MA entspricht, für welche die Winkel a, b, c dieselben sind, wie α', β', γ', wodurch der Coefficient von u der Einheit gleich wird. In jeder anderen Richtung ist der Zuwachs der Geschwindigkeit gleich dem Maximum u, multipliciert mit dem Cosinus des Winkels σ, den diese beliebige Richtung mit der des Maximum einschliefst, woraus hervorgeht, dafs er für alle Richtungen, welche auf der seines gröfsten Werthes senkrecht stehen, Null seyn wird.

Wie auch die Veränderung der Geschwindigkeit des Körpers in der Zeit dt, der Gröfse und Richtung nach, beschaffen seyn möge, so giebt es immer eine Richtung, für welche die Zunahme der Geschwindigkeit die gröfste ist, und welche die Eigenschaft hat, dafs die Geschwindigkeit nach allen Richtungen, welche auf dieser senkrecht stehen, weder vermehrt noch verringert wird.

147.

Die Richtung einer Kraft, welche auf einen sich bewegenden materiellen Punkt wirkt, ist die gerade Linie, nach welcher sie die erlangte Geschwindigkeit vermehrt oder vermindert, während sie nach der, auf dieser senkrecht stehenden Richtung, gar keine Aenderung in der Geschwindigkeit hervorbringt. Wenn wir daher sagen, daſs die Schwere eines Körpers, der sich nach irgend einer Richtung bewegt, vertical ist, wie die eines ruhenden Körpers, so verstehen wir hierunter, daſs diese Kraft die verticale Geschwindigkeit vermehrt, die horizontale dagegen gar nicht ändert.

Dies vorausgesetzt, bezeichne man, am Ende der Zeit t, durch U, U', U'' u. s. w. die Gröſsen der verschiedenen Kräfte, die auf den materiellen Punkt wirken, dessen krummlinige Bewegung wir betrachten; ferner durch a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' u. s. w. die Winkel, welche ihre gegebenen Richtungen mit Linien machen, die den Axen der x, y, z parallel sind, und durch X, Y, Z die Summen ihrer Seitenkräfte nach diesen Axen, so haben wir zuerst (§. 32)

$$X = U \cos a + U' \cos a' + U'' \cos a'' + \ldots$$
$$Y = U \cos b + U' \cos b' + U'' \cos b'' + \ldots$$
$$Z = U \cos c + U' \cos c' + U'' \cos c'' + \ldots$$

Seyen ferner u, u', u'', u. s. w. die unendlich kleinen Geschwindigkeiten, welche diese Kräfte U, U', U'' u. s. w. während der Zeit dt, nach ihren bezüglichen Richtungen hervorbringen würden, wenn jede allein auf den Körper wirken würde, der die Geschwindigkeit v besitzt. Man sieht leicht, wie in §. 116, daſs das Zusammenwirken dieser Kräfte auf die Gröſsen und Richtungen der Geschwindigkeiten, die wirklich hervorgebracht werden, durchaus keinen Einfluſs hat; wenn man daher noch immer p', q', r' die unendlich kleinen Gröſsen nennt, um welche die Geschwindigkeiten p, q, r der Projectionen des Körpers auf die Axen x, y, z, in der Zeit dt wachsen, so werden diese Gröſsen die Summen der Seitenkräfte von u, u', u'', u. s. w. nach diesen drei Axen seyn, so daſs man hat

$$p' = u \cos a + u' \cos a' + u'' \cos a'' + \ldots$$
$$q' = u \cos b + u' \cos b' + u'' \cos b'' + \ldots$$
$$r' = u \cos c + u' \cos c' + u'' \cos c'' + \ldots$$

Wendet man aber auf jede dieser Kräfte u, u', u'' u. s. w. das an, was man (§. 118) für das Maafs einer Kraft, nach der Geschwindigkeit die sie hervorbringt, gefunden hat, so hat man auch

$$u = Udt, \quad u' = U'dt, \quad u'' = U''dt \text{ u. s. w.}$$

Vergleicht man nun die Werthe von p', q', r' mit denen von X, Y, Z, so erhält man

$$p' = Xdt, \quad q' = Ydt, \quad r' = Zdt,$$

woraus hervorgeht, dafs der Zuwachs der Seitenkraft der Geschwindigkeit des Körpers nach jeder Axe, welchen er im Augenblicke dt erhält, die Geschwindigkeit ist, welche während dieser Zeit durch die nach dieser Axe gerichtete Seitenkraft aller gegebenen Kräfte, die auf diesen materiellen Punkt wirken, hervorgebracht wird.

Der Grund hiervon liegt darin, dafs die Kräfte den Geschwindigkeiten, welche sie dem Körper in einer unendlich kleinen Zeit mittheilen, proportional sind, welche unendlich kleinen Geschwindigkeiten sich nicht ändern, mögen nun diese Kräfte getrennt oder vereint wirken. Hieraus folgt auch, dafs, wenn die Kräfte, die an den Körper angebracht sind, z. B. drei sind, welche nicht in einer Ebene liegen, und man auf den Richtungen dieser drei Kräfte U, U', U'', indem man von ihrem Angriffspunkte ausgeht, gerade Linien von endlicher Gröfse nimmt, welche sich wie die entsprechenden Geschwindigkeiten u, u', u'' verhalten, und man das Parallelopipedum bildet, dessen drei an einander stofsende Seiten diese geraden Linien sind, die Mittelkraft dieser Kräfte nach der Diagonale gerichtet seyn, und ihre Gröfse sich zu der jeder der drei Kräfte verhalten wird, wie die Diagonale zur entsprechenden Seite.

148.

Wenn die Kräfte, welche auf den Körper wirken, von seiner Geschwindigkeit und seiner Lage im Raume unabhängig sind, so werden auch die Bewegungen seiner drei Projectionen auf die Coordinatenaxen von einander unabhängig seyn, so dafs seine Projection auf jede Axe, am Ende einer beliebigen Zeit, in demselben Punkte seyn und dieselbe Geschwindigkeit haben wird, wie wenn die Kräfte und Geschwindigkeiten, parallel mit den beiden anderen Axen, Null wären.

Im Allgemeinen wird dies nicht der Fall seyn, wenn die gegebenen Kräfte, der Gröfse oder Richtung nach, sich mit der Lage des Körpers oder seiner erlangten Geschwindigkeit ändern; immer aber kann man seine Geschwindigkeit und seine Lage in jedem Augenblicke auf folgende Weise bestimmen.

Da alle Kräfte, welche auf den Körper wirken, immer auf eine einzige zurück geführt werden können, so nehme man an, dafs U, was die Geschwindigkeit u hervorbringt, diese einzige Kraft sey, und bezeichne durch ε den Raum, durch welchen sie den Körper während der Zeit dt, nach ihrer Richtung, unabhängig von der Geschwindigkeit v, die der materielle Punkt am Ende der Zeit t hat, treibe. Nach dem, was man in §. 114 gesehen hat, hat man

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} u\, dt.$$

In Folge der erlangten Geschwindigkeit v und der Wirkung der Kraft U oder ihrer Seitenkräfte, sind aber die Räume, welche die Projectionen des Körpers auf die Axen der x, y, z während der Zeit dt durchlaufen,

$$p\,dt + \tfrac{1}{2} p' dt, \quad q\,dt + \tfrac{1}{2} q' dt, \quad r\,dt + \tfrac{1}{2} r' dt,$$

folglich hat man, da

$$p' = u \cos a, \quad q' = u \cos b, \quad r' = u \cos c$$

ist, wenn man zugleich die Gleichungen (1) und den Werth von ε berücksichtigt,

$$\begin{aligned} x' - x &= \omega \cos \alpha + \varepsilon \cos a \\ y' - y &= \omega \cos \beta + \varepsilon \cos b \\ z' - z &= \omega \cos \gamma + \varepsilon \cos c, \end{aligned}$$

wo ω der Raum $v\,dt$ ist, welchen der Körper, während der Zeit dt, blos vermöge der Geschwindigkeit v beschreibt, und x', y', z' die drei Coordinaten am Ende der Zeit $t + dt$ sind, welche x, y, z am Ende der Zeit t waren.

Dies vorausgesetzt, sey noch immer M (Fig. 37) der Punkt der Trajectorie, dessen drei Coordinaten x, y, z sind, und MT die Richtung der Geschwindigkeit v. Ferner sey MA die der Kraft U. Man nehme auf MA und MT die geraden Linien MH und MK, die gleich ε und ω sind, und vollende das Parallelogramm $MHM'K$, dessen zwei zusammenstofsende Seiten diese geraden Linien sind. Der Endpunkt M' seiner Diagonale wird, in Folge der vorhergehenden Glei-

chungen, der Punkt seyn, dessen Coordinaten x', y', z' sind, oder der Ort des Körpers am Ende der Zeit $t + dt$.

Ferner nenne man v' die Geschwindigkeit des Körpers im Punkte M', welche nach der Verlängerung $M'T'$ der geraden Linie MM' gerichtet seyn wird, und deren Werth die Seitenkraft von v nach MM', vermehrt um die Geschwindigkeit, die nach dieser Richtung, durch die Wirkung der Kraft U während der Zeit dt, hervorgebracht wird, ist. Da der Raum ε im Verhältnifs zu ω unendlich klein ist, so folgt daraus, dafs der Winkel TMM' ebenfalls unendlich klein ist, die Seitenkraft von v ist daher diese Geschwindigkeit selbst, wenn man die unendlich kleinen Gröfsen der zweiten Ordnung vernachlässigt. Bezeichnet man aufserdem durch δ den Winkel AMM', welchen die Richtung der Kraft U mit der Seite MM' der Trajectorie einschliefst, so ist $u \cos \delta$ der Zuwachs der Geschwindigkeit, der durch die Wirkung dieser Kraft hervorgebracht wird. Hieraus folgt

$$v' = v + u \cos \delta.$$

Ich setze $v'dt = \omega'$, und nehme auf $M'T'$ einen Theil $M'K'$, welcher gleich ω' ist, ich bezeichne durch $M'A'$ die Richtung der Kraft, welche auf den Körper wirkt, wenn er in M' angekommen ist; auf dieser geraden Linie nehme ich einen Theil $M'H'$, welcher dem Raume gleich ist, durch welchen diese Kraft den Körper in der Zeit dt treibt, ich vollende das Parallelogramm $M'H'M''K''$, so wird der Endpunkt M'' der Diagonale ein dritter Punkt der Trajectorie seyn.

Fängt man diese Reihe von Constructionen in dem Punkte an, von welchem der Körper ausgeht, und wo man seine Geschwindigkeit der Gröfse und Richtung nach kennen mufs, so ist es offenbar, dafs man allmälich alle Punkte der ebenen oder doppelt gekrümmten Trajectorie bestimmen wird, und zugleich auch die Geschwindigkeit, die der Körper in jedem seiner Punkte hat. Wenn die Zeitabschnitte, welche man unendlich klein gesetzt und durch dt bezeichnet hat, nur sehr klein sind, so erhält man eine Reihe von Punkten, die die Spitzen eines Vielecks sind, welches sich um desto weniger von der Trajectorie unterscheidet, je kleiner seine Seiten sind. Nimmt man an, dafs die Geschwindigkeit auf jeder Seite der

Trajectorie constant ist, und nimmt die halbe Summe der Geschwindigkeiten, die man an den beiden Enden der Seite gefunden hat, für deren Werth, so kann man die Zeit berechnen, welche der Körper braucht, um einen Theil des Vielecks zu durchlaufen. Man findet daher, auf diese Weise, die krumme Linie, welche der Körper beschreibt, so wie seine Geschwindigkeit und seine Lage auf dieser krummen Linie in einem bestimmten Augenblicke, mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit. Es ist aber besser, daſs man die Werthe der Coordinaten des Körpers, in Functionen der Zeit ausgedrückt, von Differentialgleichungen abhängen läſst, die man nachher, wenn es angeht, integriert.

149.

Diese Differentialgleichungen der krummlinigen Bewegung sind eine unmittelbare Folge des in §. 147 aufgestellten Princips,

Denn da die Seitengeschwindigkeiten der Geschwindigkeit des Körpers, welche den Axen der Coordinaten x, y, z parallel sind, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ am Ende der beliebigen Zeit t sind, so sind ihre Zunahmen, während des Augenblickes dt, $d.\frac{dx}{dt}$, $d.\frac{dy}{dt}$, $d.\frac{dz}{dt}$, und da jede dieser Zunahmen nur von der nach der entsprechenden Axe gerichteten Seitenkraft der Kraft herrührt, welche in diesem Augenblicke auf den Körper wirkt, so folgt, daſs, wenn man X, Y, Z die Seitenkräfte dieser Kraft, die den Axen der Coordinaten x, y, z parallel sind, nennt, alsdann

$$d.\frac{dx}{dt} = Xdt, \quad d.\frac{dy}{dt} = Ydt, \quad d.\frac{dz}{dt} = Zdt,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z, \qquad (2)$$

ist.

Die Aufgabe besteht nun in jedem Falle darin, diese drei Gleichungen der Bewegung zu integrieren, und man kann, in Rücksicht auf diese Integration, das Verfahren des vorhergehenden §. wie eine allgemeine Näherungsmethode betrachten.

Ihre Integrale enthalten sechs willkührliche Constanten, die vermittelst der drei Coordinaten, welche dem Körper im Anfange der Bewegung zugehören, und der drei Seitenkräfte der Anfangsgeschwindigkeit, d. h. vermittelst der Werthe der sechs Gröſsen x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, die für $t = o$ gegeben sind, bestimmt werden. Diese Integrale und ihre ersten Differentiale geben alsdann die Lage des Körpers in irgend einem beliebigen Augenblicke an, und ebenso die Gröſse und Richtung seiner Geschwindigkeit. Eliminiert man die Zeit t aus diesen Gleichungen, so hat man die zwei Gleichungen der Trajectorie. Weiſs man im Voraus, daſs diese krumme Linie eine ebene ist, so kann man ihre Ebene allenfalls für die der x und y nehmen, wodurch die drei vorhergehenden Gleichungen auf die zwei ersten reduciert werden.

150.

Am Ende der Zeit t seyen a, b, c die drei Coordinaten eines zweiten materiellen Punktes, mit dessen Lage man die des ersten vergleichen will. Da die Axen dieser Coordinaten die der x, y, z sind, so setze ich

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'.$$

Die Veränderlichen x', y', z' geben in jedem Augenblicke die Lage des ersten Punktes im Verhältnisse zum zweiten an, und nach den Gleichungen (2) hat man

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = X - \frac{d^2a}{dt^2}, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = Y - \frac{d^2b}{dt^2}, \quad \frac{d^2z'}{dt^2} = Z - \frac{d^2c}{dt^2},$$

um sie in Functionen der Zeit zu bestimmen.

Wenn die Bewegung des zweiten Punktes nicht bekannt ist, und nur die mit den Coordinatenaxen parallelen Seitenkräfte A, B, C der Kraft, die ihn treibt, gegeben sind, so hat man

$$\frac{d^2a}{dt^2} = A, \quad \frac{d^2b}{dt^2} = B, \quad \frac{d^2c}{dt^2} = C,$$

und hieraus folgt

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = X - A, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = Y - B, \quad \frac{d^2z'}{dt^2} = Z - C$$

für die Gleichungen der Bewegung in Beziehung auf den ersten Punkt.

Wenn die Kraft, deren Seitenkräfte A, B, C sind, zugleich auf beide Körper wirkt, so erscheinen diese Seitenkräfte auch in den Werthen von X, Y, Z, und verschwinden daher aus den letzteren Gleichungen. Dies ist z. B. der Fall bei Körpern, die sich an der Oberfläche der Erde bewegen, und deren Lagen man auf bestimmte Punkte dieser Oberfläche bezieht. Die Kräfte, welche von der täglichen Bewegung der Erde herrühren, kommen in den Gleichungen der verschiedenen Bewegungen, die man betrachtet, nicht vor, und man kann völlig von ihnen absehen, wenn man diese Gleichungen bildet.

Dennoch soll hiermit nicht gesagt seyn, dafs die Bewegungen, welche wir beobachten, immer ganz unabhängig von der Geschwindigkeit der Umdrehung der Erde seyen. Vielmehr hat sie allerdings einigen Einflufs auf die Gröfse der Schwere, und daher auch auf die verticalen Bewegungen. Aufserdem ist die Umdrehungsgeschwindigkeit eines Körpers, wenn er von einer beträchtlichen Höhe herab fällt, in seinem Ausgangspunkte etwas gröfser, als am Fufse der Verticalen, die durch diesen Punkt geht.

Hieraus kann man leicht den Schlufs ziehen, dafs der Körper sich ein wenig von dieser geraden Linie entfernen mufs, und die Erde in einem kleinen Abstande vom untersten Ende dieser Linie treffen wird. Diese Abweichung, die man wirklich beobachtet hat, zeigt, durch einen directen Versuch, die Umdrehung der Erde um ihre Axe.

Die Bewegungen, welche unabhängig von dieser Umdrehung sind, sind die, welche der Stofs der Körper hervorbringt, und auch die, welche von der Muskelkraft der Menschen und Thiere herrühren.

151.

Die Gleichungen (2) sind die der Bewegung eines völlig freien materiellen Punktes, es ist aber leicht, sie auf einen materiellen Punkt aus zu dehnen, der gezwungen ist, sich auf einer gegebenen Oberfläche zu bewegen. Hierzu ist es hinreichend, wie im Falle des Gleichgewichtes (§. 36), zu den gegebenen Kräften, welche auf den Körper wirken, noch eine Kraft von unbekannter Gröfse hinzu zu fügen, welche den

Widerstand der Oberfläche vorstellt. Diese Kraft steht auf der gegebenen Oberfläche senkrecht; ich bezeichne sie durch N, und durch λ, μ, ν, die Winkel, welche sie mit den Verlängerungen der Coordinaten x, y, z des Körpers einschliefst. Die Gleichungen der Bewegung sind alsdann

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X + N\cos\lambda \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N\cos\mu \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N\cos\nu \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Bezeichnet man durch $L = o$ die Gleichung der gegebenen Oberfläche, und setzt zur Abkürzung

$$V = \pm \left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

so hat man zu gleicher Zeit (§. 21)

$$\cos\lambda = V\frac{dL}{dx}, \quad \cos\mu = V\frac{dL}{dy}, \quad \cos\nu = V\frac{dL}{dz}.$$

Hat man diese Werthe in die Gleichungen (3) substituiert, so eliminiert man das Produkt NV aus denselben; die hieraus entstehenden zwei Gleichungen, verbunden mit $L = o$, dienen dazu, x, y, z als Functionen von t zu bestimmen. Man kann alsdann aus einer der Gleichungen (3), oder aus einer beliebigen Verbindung dieser Gleichungen, den Werth von NV finden, und da N immer eine positive Gröfse seyn mufs, so findet man durch das Zeichen dieses Produktes das Zeichen von V, wodurch die senkrechte Kraft N und die Richtung, nach welcher sie wirkt, vollkommen bestimmt sind.

Wenn der Körper gezwungen ist, sich auf zwei gegebenen Oberflächen oder auf der krummen Linie, in welcher sie sich schneiden, zu bewegen, so kann man ihn noch immer wie einen völlig freien betrachten, sobald man zu den gegebenen Kräften zwei unbekannte Kräfte N und N' hinzu fügt, welche senkrecht auf diesen Oberflächen stehen. Bezeichnet man durch λ, μ, ν, die Winkel, welche die Richtungen der ersten, in Beziehung auf die Axen der x, y, z bestimmen, und durch λ', μ', ν', die Winkel, welche der zweiten entsprechen, so hat man

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= X + N\cos\lambda + N'\cos\lambda' \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N\cos\mu + N'\cos\mu' \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N\cos\nu + N'\cos\nu'\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

für die Gleichungen der Bewegung. Ist $L = o$ die Gleichung der Oberfläche, deren Widerstand N ist, und bezeichnet man durch $L' = o$ die der Oberfläche, welcher N' entspricht, so sind die Werthe von cos λ, cos μ, cos ν, dieselben, wie früher, und die von cos λ', cos μ', cos ν', können daraus abgeleitet werden, wenn man V und L in V' und L' umändert. Hat man diese Werthe in die Gleichungen (4) substituiert, so eliminiert man die Produkte NV und $N'V'$. Die hieraus entstehende Gleichung und die Gleichungen $L = o$, $L' = o$ dienen alsdann dazu, die Werthe von x, y, z, als Functionen von t, zu bestimmen. Ist dies geschehen, so findet man aus zweien der Gleichungen (4) die Werthe von NV und $N'V'$, deren Zeichen dieselben, wie die von V und V' seyn werden, und auf diese Weise erfährt man den Werth der senkrechten Kräfte N und N', und die Richtung, nach welcher sie wirken. Ihre Mittelkraft ist, der Gröfse und Richtung nach, der Widerstand der krummen Linie, auf welcher der Körper sich bewegen mufs.

152.

Um den Gleichungen (4) eine einfachere Gestalt zu geben, sey m die Masse des Körpers, und mP der Druck, den er während seiner Bewegung, auf die krumme Linie, die er beschreiben mufs, ausübt. Man bezeichne durch Π, Π', Π'' die Winkel, welche die Richtung dieser Kraft mit den nach der positiven Seite hin verlängerten Coordinaten x, y, z dieses Punktes einschliefst; der Widerstand, welchen die krumme Linie der Bewegung des Körpers entgegensetzt, als eine beschleunigende Kraft betrachtet, ist gleich P und ihm entgegengesetzt. Verbindet man denselben mit den gegebenen Kräften X, Y, Z, welche auf den Körper wirken, so haben wir, statt der Gleichungen (4),

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= X - P\cos\Pi \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y - P\cos\Pi' \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z - P\cos\Pi''\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Die Richtung der Kraft P ist nicht a priori bekannt, man weiſs blos, daſs sie auf der gegebenen krummen Linie senkrecht steht. Hieraus folgt, daſs der Cosinus des Winkels, welcher zwischen dieser Richtung und der Berührungslinie der Trajectorie enthalten ist, gleich Null seyn muſs. Hierdurch erhält man

$$\frac{dx}{ds}\cos\Pi + \frac{dy}{ds}\cos\Pi' + \frac{dz}{ds}\cos\Pi'' = o \qquad (6)$$

Die Winkel Π, Π', Π'' sind auſserdem durch die Gleichung

$$\cos^2\Pi + \cos^2\Pi' + \cos^2\Pi'' = 1$$

unter einander verbunden.

Eliminiert man P, Π, Π', Π'' aus diesen Gleichungen, indem man die Gleichungen (5) zusammen addiert, nachdem sie mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ multipliciert worden sind, berücksichtigt man die Gleichung (6) und setzt zur Abkürzung

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = \varphi,$$

so hat man alsdann

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{ds\,dt^2} = \varphi.$$

Differentiiert man die identische Gleichung

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2},$$

und dividiert man durch $2\,ds$, so sieht man, daſs der erste Theil der vorhergehenden Gleichung dasselbe ist wie $\frac{d^2s}{dt^2}$, man hat also einfach

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \varphi \qquad (7)$$

Die Kraft φ ist die Summe der Seitenkräfte der gegebenen Kräfte, nach der Richtung der Tangente der Trajectorie, und diese Seitenkräfte mufs man als positive oder negative Gröfsen ansehen, je nachdem sie den Bogen s, welchen der Körper beschreibt, zu vergröfsern oder zu vermindern streben. Die Gleichung (7) sagt daher, dafs bei der krummlinigen, wie bei der geradlinigen Bewegung, die Kraft, welche auf den Körper in der Richtung seiner Bewegung wirkt, dem zweiten Differentialcoefficienten des durchlaufenen Raumes gleich ist, und da $v = \frac{ds}{dt}$, so kann man auch sagen, dafs diese Kraft dem ersten Differentialcoefficienten der erlangten Geschwindigkeit v gleich ist.

Da diese Gleichung vom Widerstande der krummen Linie völlig unabhängig ist, so gilt sie für die Bewegung eines materiellen Punktes, der völlig frei ist, und für die eines materiellen Punktes, der auf einer krummen Oberfläche bleiben mufs; diese Gleichung wird aber besonders in dem Falle, wenn sich der materielle Punkt auf einer gegebenen krummen Linie bewegt, von Nutzen seyn. Aus den Gleichungen dieser krummen Linie findet man die Werthe von x, y, z in Functionen von s ausgedrückt, und nachdem man sie in die Gleichung (7) substituiert hat, so braucht man nur noch diese Gleichung der zweiten Ordnung zwischen s und t zu integrieren. Die beiden willkührlichen Constanten, welche ihr Integral enthält, kann man vermittelst der Werthe von s und $\frac{ds}{dt}$, welche dem Werthe $t = o$ entsprechen, bestimmen, d. h. vermittelst der anfänglichen Lage und Geschwindigkeit des Körpers. Sind die drei Coordinaten x, y, z, als Functionen von t, vermöge des Integrals der Gleichung (7) verbunden mit den zwei gegebenen Gleichungen der Trajectorie bestimmt, so geben die Gleichungen (5), für jeden beliebigen Augenblick, die drei Seitenkräfte des Druckes P, welchen die krumme Linie, auf welcher sich der Körper bewegen mufs, erleidet. Im folgenden Kapitel findet man eine einfachere Bestimmung dieser Kraft, ihrer Gröfse und Richtung nach.

II. Wichtigste Folgen der vorhergehenden Formeln.

153.

Wenn der Körper durch eine Kraft getrieben wird, welche nach einem festen Punkte gerichtet ist, so erhält man unmittelbar drei erste Integrale der Gleichungen (2). Hierzu verlege man den Anfangspunkt der Coordinaten x, y, z in diesen Punkt, stelle die Kraft, welche den Körper treibt, ihrer Gröſse und Richtung nach, durch den Radius Vector dar, und construire das Parallelopipedum, dessen Diagonale dieser Radius ist, und dessen drei zusammen stoſsende Seiten auf den Axen der x, y, z liegen. Die drei Coordinaten x, y, z des Körpers werden die Längen dieser drei Seiten seyn, und die drei Seitenkräfte der gegebenen Kraft darstellen, so daſs man

$$X : Y : Z = x : y : z$$

hat, woraus sich

$$Xy = Yx, \quad Zx = Xz, \quad Yz = Zy$$

ergiebt. Auſserdem können die Gleichungen (2) durch folgende ersetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} yd^2x - xd^2y &= (Xy - Yx)\, dt^2 \\ xd^2z - zd^2x &= (Zx - Xz)\, dt^2 \\ zd^2y - yd^2z &= (Yz - Zy)\, dt^2 \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Die zweiten Theile dieser Gleichungen sind aber, in Folge der vorhergehenden Gleichungen, gleich Null, und da die ersten Theile die Differentiale von $ydx - xdy$, $xdz - zdx$, $zdy - ydz$ sind, so hat man, wenn man integriert,

$$\left.\begin{aligned} ydx - xdy &= cdt \\ xdz - zdx &= c'dt \\ zdy - ydz &= c''dt \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

wo c, c', c'' willkührliche Constanten bedeuten.

154.

Um den Lehrsatz auszusprechen, der in den ersten Integralen der Gleichungen der Bewegung enthalten ist, betrachte man die Projection AMB (Fig. 38) der Trajectorie des Körpers auf die Ebene der Coordinaten x und y, deren Axen Ox und Oy sind. Am Ende der Zeit t sey M die Projection

‥s Körpers, OP und MP seine Abscisse x und Ordinate y, ‥d da C der Punkt ist, wo diese krumme Linie die Axe Oy ‥hneidet, so nenne man u den Sector COM, p die Fläche OPM, q das Dreieck OPM, so hat man

$$u = p - q, \quad q = \tfrac{1}{2} xy.$$

Ist M' die Projection des Körpers am Ende der Zeit ‥ $+ dt$, so ist MOM' die Fläche, welche der Radius Vector ‥ieser Projection, während der Zeit dt, beschreibt, dies ist auch das Differential von u oder $p - q$, und da

$$dp = ydx, \quad dq = \tfrac{1}{2} xdy + \tfrac{1}{2} ydx,$$

so hat man

$$du = \tfrac{1}{2} (ydx - xdy).$$

Die erste Gleichung (b) sagt daher, dafs die Fläche, welche der Radius Vector der Projection M des Körpers, während jedes Zeitmoments dt beschreibt, eine beständige Gröfse und gleich $\frac{1}{2} cdt$ ist; daher ist auch die Fläche, welche während einer Zeit t beschrieben wird, dieser Veränderlichen proportional und gleich $\frac{1}{2} ct$. Die Flächen, welche in dieser Zeit durch die Radius Vector der Projectionen des Körpers auf die Ebenen der x und z, und der y und z, beschrieben werden, sind ebenso gleich $\frac{1}{2} c't$ und $\frac{1}{2} c''t$.

Hieraus kann man den Schlufs ziehen, dafs, wenn ein materieller Punkt einer Kraft unterworfen ist, die beständig nach einem festen Mittelpunkte gerichtet ist, die Flächen, die der Radius Vector seiner Projection auf irgend eine Ebene, welche durch diesen Punkt geht, um diesen Punkt beschreibt, den Zeiten, die während ihrer Beschreibung verflossen sind, proportional sind. Hat umgekehrt diese Eigenschaft in Beziehung auf drei rechtwinklige Ebenen statt, die durch den Mittelpunkt der Flächen gezogen sind, so kann man hieraus schliefsen, dafs die Kraft, oder die Mittelkraft der Kräfte, welche den Körper treiben, immer nach diesem festen Mittelpunkte gerichtet ist. Denn sind die Gleichungen (b) gegeben, so hat man, wenn man sie differentiiert,

$$yd^2x - xd^2y = o, \quad xd^2z - zd^2x = o, \quad zd^2y - yd^2z = o;$$

in Folge der Gleichungen (a), welche die einer beliebigen Bewegung sind; man hat daher auch

$$Xy = Yx, \quad Zx = Xz, \quad Yz = Zy,$$

daher verhalten sich die Kräfte X, Y, Z zu einander, wie die Coordinaten x, y, z des Körpers; dies ist hinreichend, damit ihre Mittelkraft immer nach dem Anfangspunkte der Coordinaten gerichtet sey. Uebrigens kann diese Kraft eine anziehende oder abstofsende seyn, d. h. sie kann nach dem Radius Vector des Körpers, oder nach seiner Verlängerung wirken.

155.

Wenn ein materieller Punkt einer Kraft unterworfen ist, welche nach einem festen Mittelpunkte gerichtet ist, so ist es offenbar, dafs seine Trajectorie eine ebene krumme Linie seyn wird, weil kein Grund vorhanden ist, weswegen er eher nach der einen als nach der anderen Seite aus der Ebene heraus treten sollte, die durch die Richtung seiner anfänglichen Geschwindigkeit und den festen Mittelpunkt geht. Dies kann man auch aus den Gleichungen (b) ableiten. Denn addiert man sie, nachdem man sie durch z, y, x multipliciert und durch dt dividiert hat, so erhält man

$$cz + c'y + c''x = o.$$

Man kann diese Ebene für die der x und y nehmen, die Fläche welche, durch den Radius Vector des Körpers, in der Ebene der Trajectorie beschrieben wird, ist daher der Zeit proportional, und aufserdem reduciert sich der vorhergehende Lehrsatz auf diese Proportionalität. Denn hat sie für die Fläche statt, welche auf der Ebene der Trajectorie beschrieben wird, so gilt sie auch für diejenige Fläche welche, durch den Radius Vector der Projection des Körpers auf jede andere Ebene, beschrieben wird. Denn diese andere Fläche ist nichts Anderes, als die Projection der ersten auf diese Ebene, und wir wissen (§. 10), dafs die Projection einer ebenen Fläche ein beständiges Verhältnifs zu der projicierten Fläche hat.

156.

Die unendlich kleine Fläche MOM' kann ebenfalls durch Polarcoordinaten ausgedrückt werden. Zu diesem Zwecke bezeichne man durch r den Radius Vector OM, und durch ϑ den Winkel MOx, den er mit der Axe der x einschliefst. Man beschreibe aus dem Punkte O als Mittelpunkt den Kreis-

bogen MN, welcher im Punkte N den Radius Vector OM' schneidet, der dem Winkel $\vartheta - d\vartheta$ entspricht, und dessen Länge $rd\vartheta$ ist. Der Ausschnitt MON ist gleich $\frac{1}{2}r^2d\vartheta$ und kann für die Fläche MOM' genommen werden, wenn man die Fläche MNM', die ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung ist, vernachlässigt. Man mufs daher

$$ydx - xdy = r^2d\vartheta$$

haben, welcher Gleichung man wirklich durch die Werthe

$$x = r\cos\vartheta,\quad y = r\sin\vartheta$$

und ihre Differentiale, welche nemlich

$$dx = \cos\vartheta dr + r\sin\vartheta d\vartheta$$
$$dy = \sin\vartheta dr - r\cos\vartheta d\vartheta$$

sind, da hier das Differential von ϑ gleich $-d\vartheta$ ist, Genüge leistet. Auf diese Weise nimmt die erste Gleichung (b) die Gestalt

$$r^2d\vartheta = cdt$$

an, unter welcher man sie gewöhnlich anwendet.

Ebenso kann man das Element der krummen Linie in Polarcoordinaten ausdrücken. Bezeichnet man den Bogen CM durch σ, und dieses Element durch $d\sigma$, so hat man zu gleicher Zeit

$$MM' = d\sigma,\quad MN = rd\vartheta,\quad NM' = dr,$$

betrachtet man MNM' wie ein geradliniges Dreieck, das in N einen rechten Winkel hat, so findet man hieraus

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2d\vartheta^2,$$

was man auch aus der Formel

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$$

vermittelst der vorhergehenden Werthe von dx und dy ableiten kann.

Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dafs bei einer ebenen Trajectorie die Seitengeschwindigkeiten der Geschwindigkeit des Körpers nach der Verlängerung MO' des Radius Vector MO und nach der Richtung, die auf diesem Radius senkrecht steht, durch

$$\frac{dr}{dt},\quad \frac{rd\vartheta}{dt}$$

ausgedrückt werden. Denn der Winkel $O'MT$, welchen diese Verlängerung mit der Tangente MT einschliefst, ist das

Complement des Winkels M des Dreiecks $M'MN$; hier hat man also

$$\cos O'MT = \frac{dr}{d\sigma}, \quad \sin O'MT = \frac{r d\vartheta}{d\sigma},$$

und wenn man diesen Cosinus und diesen Sinus durch die Geschwindigkeit $\frac{d\sigma}{dt}$, die nach MT gerichtet ist, multipliciert, so hat man die Seitengeschwindigkeiten, von welchen die Rede ist. Man kann sie oft mit Nutzen gebrauchen. Sie sind von den Seitengeschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ darin verschieden, daſs die Richtungen fester sind, während die der vorhergehenden sich mit der Lage des Körpers ändern.

Die Geschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$, mit welcher der Radius Vector OM den Winkel COM beschreibt, welcher von einer festen Linie aus gerechnet wird, ist das, was man die Winkelgeschwindigkeit des Körpers nennt. Man kann sie, wie man sieht, aus seiner Geschwindigkeit $\frac{r d\vartheta}{dt}$, die er senkrecht auf OM hat, ableiten, indem man diese durch die Länge dieses Halbmessers dividiert.

157.

Ich komme jetzt auf die Differentialgleichungen der Bewegung zurück.

Addiert man die Gleichungen (5) des §. 152, nachdem man sie mit dx, dy, dz multipliciert hat, berücksichtigt man die Gleichung (6) in demselben §. und bemerkt, daſs

$$\frac{dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z}{dt^2} = \tfrac{1}{2} d.\frac{ds^2}{dt^2} = \tfrac{1}{2} d.v^2$$

ist, so folgt hieraus

$$\tfrac{1}{2} d.v^2 = X dx + Y dy + Z dz. \qquad (c)$$

Man nehme an, daſs die Ausdrücke für die gegebenen Kräfte X, Y, Z weder die Zeit t, noch die Geschwindigkeit v entwickelt enthalten, und daſs die Formel (c), wenn man x, y, z als unabhängige Veränderliche betrachtet, ein vollständiges Differential sey; man setze daher

$$X dx + Y dy + Z dz = d.F(x, y, z),$$

wo F eine gegebene Function bedeutet. Integriert man die Gleichung (c), und bezeichnet durch C die willkührliche Constante, so hat man

$$v^2 = 2F(x, y, z) + C.$$

Um diese Constante zu eliminieren, seyen a, b, c, k die anfänglichen Werthe von x, y, z, v, so hat man

$$k^2 = 2F(a, b, c) + C,$$

und wenn man diese Gleichung von der vorhergehenden abzieht,

$$v^2 = k^2 + 2F(x, y, z) - 2F(a, b, c). \qquad (d)$$

Da dieses Resultat vom Widerstande N der krummen Linie unabhängig ist, welcher der Kraft P, die in den Gleichungen, aus welchen das Resultat abgeleitet wurde, vorkommt, gleich und entgegengesetzt ist, so folgt hieraus, daſs es sowohl bei der Bewegung eines völlig freien materiellen Punktes statt hat, als auch bei der Bewegung auf einer Oberfläche oder einer gegebenen krummen Linie.

Eine unmittelbare Folge dieser Gleichung (d) ist die, daſs die Geschwindigkeit constant und die Bewegung gleichförmig ist, sobald der Körper durch keine gegebene Kraft getrieben wird. Denn die Function F ist alsdann Null, und man hat $v = k$, mag nun die Bewegung auf einer Oberfläche oder einer gegebenen krummen Linie statt haben, oder der Körper völlig frei seyn.

Diese Gleichung zeigt uns auſserdem, daſs, in der Voraussetzung, welche man über die Natur der Kräfte X, Y, Z gemacht hat, der Zuwachs des Quadrats der Geschwindigkeit des Körpers, wenn er aus einer Lage in die andere kommt, immer derselbe ist, wie auch die krumme Linie, die er beschreibt, beschaffen seyn mag, und nur von den Coordinaten a, b, c, x, y, z der zwei äuſsersten Punkte abhängt. Wenn diese krumme Linie gegeben ist, oder auch, wenn der Körper gezwungen ist, sich auf einer gegebenen Oberfläche zu bewegen, so kann man für k die Geschwindigkeit des Körpers nehmen, die nach der Tangente dieser krummen Linie oder dieser krummen Fläche gerichtet ist. Wenn der Stoſs, der auf den Körper im Anfang der Bewegung ausgeübt wird, nicht diese Richtung hat, so kann man ihn in zwei andere zerlegen, von welchen die eine nach der Normalen, die andere nach der

Tangente gerichtet ist, die erste Kraft wird durch den Widerstand der gegebenen krummen Linie oder krummen Fläche aufgehoben, und die zweite bringt die Geschwindigkeit k hervor, und bestimmt deren Richtung.

Bezeichnet man durch C eine willkührliche Constante, so ist die Gleichung

$$F(x, y, z) = C$$

die einer Oberfläche, welche mit gleicher Geschwindigkeit von allen Körpern erreicht wird, die von denselben Kräften getrieben werden, und von dem Punkte, dessen Coordinaten a, b, c sind, nach verschiedenen Richtungen und mit gleicher Geschwindigkeit k ausgegangen sind. Wenn z. B. diese Körper nur von der Schwerkraft getrieben werden, so ist diese Gleichung die einer horizontalen Ebene.

In dem Falle, wenn eine krumme Linie gegeben ist, kann man aus ihren Gleichungen die Werthe von x, y, z, in Functionen des Bogens s ausgedrückt, ableiten, substituiert man sie in die Gleichung (d) und setzt $\frac{ds}{dt}$ an die Stelle von v, so findet man

$$dt = Sds,$$

wo S eine gegebene Function von s ist. In diesem Falle ist daher die Bestimmung der Zeit, in einer Function des durchlaufenen Raumes ausgedrückt, auf die Integration eines gegebenen Differentials zurück geführt. Aber die Voraussetzung, auf welche die Gleichung (d) gegründet ist, und daher auch diese Gleichung, haben nicht statt, wenn der Körper den Widerstand eines Mittels erleidet, welcher eine Kraft ist, die von der Geschwindigkeit abhängt; ebendies wird der Fall seyn, wenn es sich um die Bewegung eines materiellen Punktes handelt, der von anderen Punkten, die selbst in Bewegung sind, angezogen oder abgestofsen wird, durch welchen Umstand die Zeit t in den Werthen von X, Y, Z entwickelt erscheinen würde. In beiden Fällen kann man, wenn die Trajectorie eine gegebene krumme Linie ist, die Gleichung (c) anwenden, in welcher man $\frac{ds}{dt}$ statt v setzen kann, und die sich alsdann in die Gleichung (7) des §. 152 verwandeln wird.

158.

Die Formel

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

wird, wie es eben angenommen wurde, ein vollständiges Differential seyn, sobald der Körper von festen Punkten angezogen oder abgestofsen wird, und die Gröfsen dieser Kräfte werden durch Functionen des Abstandes von den Mittelpunkten, von welchen sie ausgehen, ausgedrückt werden.

Seyen nemlich e, f, g die drei Coordinaten eines der festen Mittelpunkte, die auf dieselben Axen wie x, y, z bezogen sind. Man bezeichne durch r den Abstand des Körpers von diesem Punkte, so hat man

$$r^2 = (e - x)^2 + (f - y)^2 + (g - z)^2$$

und die Cosinus der Winkel, welche diese gerade Linie r mit den Axen einschliefst, die durch den Körper nach den Richtungen der positiven x, y, z gezogen sind, sind die Verhältnisse von $e - x$, $f - y$, $g - z$ zu r. Bezeichnet man daher durch R die anziehende Kraft, die vom Körper nach diesem festen Mittelpunkte gerichtet ist, so sind die Werthe ihrer drei Seitenkräfte

$$\frac{R(e - x)}{r}, \quad \frac{R(f - y)}{r}, \quad \frac{R(g - z)}{r},$$

und daher ist der Theil von $Xdx + Ydy + Zdz$, welcher von R herrührt,

$$\frac{R}{r}\left[(e - x)\, dx + (f - y)\, dy + (g - z)\, dz\right].$$

Differentiiert man aber den Werth von r^2, so hat man

$$rdr = -(e - x)\, dx - (f - y)\, dy - (g - z)\, dz,$$

wodurch die vorhergehende Gröfse in $-Rdr$ übergeht. Wenn die Kraft, welche von dem festen Mittelpunkte ausgeht, eine abstofsende ist, so ist es hinreichend, das Zeichen dieser Gröfse zu ändern, welche daher Rdr wird, wenn man in allen Fällen R wie eine positive Gröfse betrachtet. Hieraus schliefst man, dafs, wenn der Körper durch eine Anzahl von Kräften R, R', R''... getrieben wird, welche von festen Punkten ausgehen, deren Abstände von diesem materiellen Punkte r, r', r''... sind, so hat man

$$Xdx + Ydy + Zdz = \mp Rdr \mp R'dr' \mp R''dr'' \mp \ldots$$

wo die oberen Zeichen im Falle einer Anziehung und die unteren im Falle einer Abstoſsung gelten. Nimmt man aber an, daſs jede dieser Kräfte eine gegebene Function des entsprechenden Abstandes ist, so sind alle Glieder des Werthes von $Xdx + Ydy + Zdz$ Differentiale, welche von einer einzigen Veränderlichen abhängen und daher wird diese Formel ein vollständiges Differential seyn, was zu beweisen war.

Auch sieht man hierdurch und vermöge der Gleichung (d), daſs der Zuwachs des Quadrates der Geschwindigkeit, welcher von jeder der Kräfte R, R', R''... herrührt, derselbe seyn wird, als wenn sie allein nur vorhanden wäre. So z. B. wird dieser Zuwachs in Beziehung auf die Kraft R durch $\mp 2\int R dr$ ausgedrückt, wo das Integral so genommen wird, daſs es für den Anfangswerth von r verschwindet.

159.

In dem Falle, wenn ein materieller schwerer Punkt sich im leeren Raume, auf einer krummen Linie ohne Reibung bewegt, geht die Gleichung (d) in

$$v^2 = k^2 + 2g(z - c)$$

über, indem man durch g die Schwere bezeichnet und die Axe der positiven z vertical und nach der Richtung dieser Kraft nimmt, so daſs man hat

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = g.$$

Sey $ADBC$ (Fig. 39) die gegebene krumme Linie, B ihr tiefster, A ihr höchster Punkt, welcher nicht in derselben Verticalen wie B zu seyn braucht, und D der Ausgangspunkt des Körpers. Man verlege den Anfangspunkt der z in diesen letzteren Punkt und nehme an, daſs die anfängliche Geschwindigkeit k zu einer Höhe h gehört, so hat man

$$c = o, \quad k^2 = 2gh,$$

und daher

$$v^2 = 2g(h + z).$$

Hieraus folgt, daſs, wenn der Körper im Punkte B ankommt, das Maximum der Geschwindigkeit dasselbe seyn wird, als wenn er von der Höhe h, vermehrt um die des Punktes D über die horizontale Ebene, die durch den Punkt B gezogen ist, herabgefallen wäre. In Folge dieser erlangten Geschwindigkeit erhebt sich der Körper längs BCA, seine

Geschwindigkeit nimmt fortwährend ab, und wenn man $h = o$ hat, so ist sie im Punkte C, der in derselben horizontalen Ebene wie D liegt, Null. Im Punkte C angekommen, steigt der Körper wieder längs CB herab, und wird so unaufhörlich von D nach C und von C nach D gehen. Wenn die Constante h nicht Null ist, so erhebt sich der Körper über den Punkt C. Wenn die Höhe des Punktes A über der horizontalen Ebene, die D und C enthält, geringer ist als h, so erreicht der Körper nicht den Punkt A, er bleibt in einem gewissen Punkte C' stehen, und wenn man durch C' eine horizontale Ebene zieht, welche die krumme Linie in einem anderen Punkte D' schneidet, so bewegt sich der Körper unaufhörlich von C' nach D' und von D' nach C'.

Diese Schwingungen werden alle isochrone oder von gleicher Dauer seyn. Dies ist einleuchtend in Rücksicht auf diejenigen, welche nach derselben Richtung geschehen, auch sieht man, dafs die Dauer jeder Schwingung von C' nach D' dieselbe seyn wird, wie die einer Schwingung von D' nach C', wenn man bemerkt, dafs jedes Element der krummen Linie mit derselben Geschwindigkeit in beiden Fällen durchlaufen wird. Diese gemeinschaftliche Dauer aller ganzen Schwingungen hängt von der Gestalt der krummen Linie und der Gröfse von h ab.

Wenn die Höhe von A über der horizontalen Ebene, die durch den Ausgangspunkt geht, gleich h ist, so nähert sich der Körper dem Punkte A immer mehr, erreicht ihn aber nur nach einer unendlich grofsen Zeit. Ist diese Höhe gröfser als h, so geht der Körper über den Punkt A hinaus und durchlauft den ganzen Umring der krummen Linie. Kommt er wieder im Punkte D an, so ist seine Geschwindigkeit dieselbe wie im Anfange der Bewegung, und hieraus schliefst man, dafs er eine fortdauernde Reihe von Umdrehungen machen wird, die alle gleiche Dauer haben werden, welche von der Gestalt der krummen Linie und der Gröfse von h abhängt.

Wenn die gegebene krumme Linie zuerst in einer verticalen Ebene enthalten ist, welche einen Cylinder mit beliebiger Grundfläche berührt, und man wickelt diese Ebene um den Cylinder, so dafs die gegebene krumme Linie eine Linie

doppelter Krümmung wird, so ändert sich die schwingende oder umdrehende Bewegung des Körpers durchaus nicht, wenn man annimmt, daſs sein Ausgangspunkt und seine anfängliche Geschwindigkeit dieselben bleiben. Denn alsdann hängt der als Function von s gegebene Werth von t, der, wie vorher gesagt wurde (§. 157), bestimmt worden ist, nur von dem als Function von s gegebenen Werth von z ab, dieser aber ändert sich nicht, wie auch die Basis des verticalen Cylinders, auf welchem die gegebene krumme Linie gezeichnet ist, beschaffen seyn mag.

160.

In allen Fällen, in welchen die Gleichung (d) statt hat, und der Körper nicht gezwungen ist, sich auf einer gegebenen krummen Linie zu bewegen, hat diejenige, die er beschreibt, wenn er sich von einem gegebenen Punkte, den ich A nenne, nach einem anderen gegebenen Punkte, den ich B nenne, bewegt, eine merkwürdige Eigenschaft. Ist der Körper völlig frei, so ist das Integral $\int v ds$, welches von dem Punkte A bis zum Punkte B genommen wird, kleiner als für jede andere krumme Linie, die durch diese zwei Punkte begränzt wird; muſs er sich auf einer gegebenen Oberfläche bewegen, so hat diese Eigenschaft der Trajectorie nur in Beziehung auf alle krummen Linien statt, die auf dieser Oberfläche gezogen sind und immer von den Punkten A und B begränzt werden. In beiden Fällen ist ds das Differentialelement einer beliebigen krummen Linie, die den Coordinaten x, y, z entspricht, und v eine Function dieser drei Veränderlichen und einer Constanten k, die durch die Gleichung (d) gegeben ist.

Der Beweis dieses Lehrsatzes kommt darauf zurück, zu zeigen, daſs in Folge der Gleichungen der Bewegung, die Variation von $\int v ds$ Null ist, wenn man die Gränzen dieses Integrals als feste annimmt. Alsdann ist das Integral ein Minimum oder ein Maximum, und zwar wird immer das Minimum statt haben, wenn der Körper völlig frei ist, denn es ist einleuchtend, daſs das Integral $\int v ds$ mit der Länge der Trajectorie immer wachsen wird und kein Maximum haben kann.

Nach den einfachsten Regeln der Variationsrechnung hat man aber

$$\delta . \int v ds = \int \delta v ds, \quad \delta . v ds = \delta v ds + v \delta ds.$$

Aufserdem hat man, da dt das Element der Zeit ist,

$$ds = v dt,$$

also

$$\delta v ds = \tfrac{1}{2} dt \delta v^2.$$

Differentiiert man die Gleichung (d), und ersetzt die Differentiale dx, dy, dz durch die Variationen δx, δy, δz, so hat man

$$\tfrac{1}{2}\delta . v^2 = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Berücksichtigt man die Werthe von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, und bemerkt, dafs

$$\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z = \delta L$$

ist, so geben die Gleichungen (3) des §. 151

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{\delta^2 z}{dt^2}dz - NV\delta L.$$

Das Glied $NV\delta L$ würde nicht in dieser Gleichung vorkommen, wenn der Körper völlig frei wäre; wenn er sich auf der Oberfläche bewegen mufs, deren Gleichung $L = o$ ist, so ist dieses Glied Null, denn da alle krummen Linien, die man mit der Trajectorie des Körpers vergleicht, ebenfalls auf dieser Oberfläche beschrieben seyn müssen, so hat man $\delta L = o$, man mufs daher in jedem Falle dieses Glied weglassen, und man erhält

$$\delta v ds = \tfrac{1}{2} dt \delta . v^2 = \frac{d^2x}{dt}\delta x + \frac{d^2y}{dt}\delta y + \frac{d^2z}{dt}\delta z.$$

Was das zweite Glied $v\delta ds$ der Variation betrifft, so hat man

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

und folglich

$$\delta ds = \frac{dx}{ds}\delta dx + \frac{dy}{ds}\delta dy + \frac{dz}{ds}\delta dz,$$

da nun $ds = v dt$, so erhält man, wenn man im zweiten Gliede die Ordnung der Zeichen d und δ umkehrt,

$$v\delta ds = \frac{dx}{dt}d\delta x + \frac{dy}{dt}d\delta y + \frac{dz}{dt}d\delta z.$$

Vereinigt man die beiden Theile des Werthes von $\delta . v ds$, so erhält man

$$\delta . v ds = d\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right),$$

und hieraus folgt

$$\int \delta . v ds = \frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z + \text{const.}$$

als unbestimmtes Integral von $\delta . v ds$. Da man aber angenommen hat, daſs die beiden äuſseren Punkte A und B fest sind, so müssen die Variationen δx, δy, δz, welche sich auf dieselben beziehen, Null seyn, daher reduciert sich das bestimmte Integral $\int \delta . v ds$, welches von dem Punkte A bis zum Punkte B genommen wird, und der Variation $\delta \int v ds$ gleich ist, auf Null, was zu beweisen war.

161.

Wenn der Körper, welcher sich auf einer krummen Oberfläche bewegen muſs, durch keine gegebene Kraft getrieben wird, so ist seine Geschwindigkeit constant (§. 157); das Integral $\int v ds$ ist daher das Produkt vs. Der Bogen s, den der Körper beschreibt, ist hiernach, im Allgemeinen, die kürzeste Linie zwischen den Punkten A und B, und es folgt aus der Einförmigkeit der Bewegung, daſs der Körper sich in diesem Falle, von einem Punkte zum anderen in einer kürzeren Zeit bewegt, als wenn er gezwungen wäre, auf der gegebenen Oberfläche, jede andere krumme Linie als die Trajectorie zu beschreiben. Ist diese Oberfläche von allen Seiten geschlossen, wie z. B. eine Kugel, so sind die Punkte A und B die Endpunkte zweier Bogen eines gröſsten Kreises, von welchen der eine gröſser, der andere kleiner ist, als alle Bogen kleiner Kreise, die zwischen denselben Punkten enthalten sind, und der Körper kann den einen oder den anderen dieser zwei Theile eines groſsen Kreises beschreiben, je nachdem die anfängliche Geschwindigkeit k, die nach der Tangente der Kugel wirkt, gerichtet ist.

Man kann die Differentialgleichung der Trajectorie unter einer Form darstellen, welche die Eigenschaft der kürzesten Linie auf einer gegebenen Oberfläche zeigt, die darin besteht, daſs ihre Krümmungsebene für jeden Punkt senkrecht auf dieser Oberfläche steht.

Nimmt man an, daſs die Kräfte X, Y, Z Null sind, so reducieren sich die Gleichungen (3) des §. 151 auf

$$\frac{d^2x}{dt^2} = N \cos \lambda, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = N \cos \mu, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = N \cos \nu.$$

Da v eine beständige Gröſse und $vt = s$ ist, so hat man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v^2 \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = v^2 \frac{d^2z}{ds^2}$$

wenn man den Bogen s für die unabhängige Veränderliche nimmt; dies angenommen, kann man die vorhergehenden Gleichungen durch die folgenden ersetzen:

$$\frac{dxd^2y - dyd^2x}{ds^3} = \frac{N}{v^2}\left(\frac{dx}{ds}\cos\mu - \frac{dy}{ds}\cos\lambda\right)$$

$$\frac{dzd^2x - dxd^2z}{ds^3} = \frac{N}{v^2}\left(\frac{dz}{ds}\cos\lambda - \frac{dx}{ds}\cos\nu\right)$$

$$\frac{dyd^2z - dzd^2y}{ds^3} = \frac{N}{v^2}\left(\frac{dy}{ds}\cos\nu - \frac{dz}{ds}\cos\mu\right),$$

die leicht daraus abgeleitet werden kann. Man addiere sie, nachdem sie mit $\cos\nu$, $\cos\mu$, $\cos\lambda$ multipliciert worden sind; die Gröſse N verschwindet alsdann, und man hat einfach

$$\left.\begin{aligned}\frac{dxd^2y - dyd^2x}{ds^3}\cos\nu + \frac{dzd^2x - dxd^2z}{ds^3}\cos\mu \\ + \frac{dyd^2z - dzd^2y}{ds^3}\cos\lambda = o\end{aligned}\right\} \quad (e)$$

Nach den Werthen von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, die in §. 151 angeführt worden sind, hat man also

$$\left.\begin{aligned}\frac{dxd^2y - dyd^2x}{ds^3}\frac{dL}{dx} + \frac{dzd^2x - dxd^2z}{ds^3}\frac{dL}{dy} \\ + \frac{dyd^2z - dzd^2y}{ds^3}\frac{dL}{dz} = o\end{aligned}\right\} \quad (f)$$

als zweite Differentialgleichung der Trajectorie. Man substituiert in diese Gleichung den Werth einer der drei Coordinaten x, y, z, als Function der beiden anderen ausgedrückt, welchen man aus der Gleichung $L = o$ der gegebenen Oberfläche ableitet, auf welcher die krumme Linie gezogen seyn muſs; man integriere alsdann die hieraus entspringende Gleichung mit zwei Veränderlichen und bestimme die zwei willkührlichen Constanten, welche das Integral enthält, indem man die krumme Linie durch die zwei Punkte A und B der gegebenen Oberfläche gehen läſst. Die Gleichung, welche man auf diese Weise erhält, und die, wie man sieht, von der

Gröfse und Richtung der Anfangsgeschwindigkeit k unabhängig ist, mufs die der kürzesten Linie zwischen diesen zwei Punkten seyn.

Nennt man aber α, β, γ die Winkel, welche die Linie, die auf der Krümmungsebene einer beliebigen krummen Linie in dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, senkrecht steht, mit deren Verlängerungen nach der positiven Richtung einschliefst, und setzt man, zur Abkürzung,

$$\left[(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2\right]^{\frac{1}{2}}=h$$

so hat man

$$\cos\alpha = \frac{1}{h}(dyd^2z - dzd^2y)$$

$$\cos\beta = \frac{1}{h}(dzd^2x - dxd^2z)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{h}(dxd^2y - dyd^2x)$$

vermöge der Formeln (3) des §. 19, wo dieselben Winkel durch λ, μ, ν bezeichnet sind. In Folge der Gleichung (e) hat man daher

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu,$$

woraus hervorgeht, dafs die Linie, welche auf der Krümmungsebene der Trajectorie, und die, welche auf der gegebenen Oberfläche senkrecht steht, auch auf einander senkrecht stehen. Hieraus folgt aber, dafs die Gleichung (f), welche der kürzesten Linie angehört, auch die der krummen Linie ist, bei welcher die Krümmungsebene überall auf der gegebenen Oberfläche senkrecht steht, so dafs diese zwei Linien eine und dieselbe krumme Linie sind, die auf dieser Oberfläche gezogen ist, sobald man bei beiden die Bedingung macht, dafs sie durch dieselben äufsersten Punkte A und B gehen müssen.

Hieraus folgt, dafs, wenn diese zwei Punkte einer der Krümmungslinien der gegebenen Oberfläche angehören, diese Linie die kürzeste von einem Punkte zum anderen ist, denn die Krümmungsebene für irgend einen Punkt, enthält zwei auf einander folgende Normalen der gegebenen Oberfläche, und steht daher auf dieser Oberfläche senkrecht.

III. Digression über die Bewegung des Lichtes.

162.

Der Lehrsatz des §. 160 ist unter dem Namen des Princips der kleinsten Wirkung bekannt, welchen er durch den metaphysischen Gesichtspunkt erhalten hat, aus welchem man ihn zuerst betrachtet hat und der später mit Recht verlassen worden ist. Es kann aber nützlich seyn, hier eine der ersten Anwendungen mitzutheilen, die man von diesem Principe gemacht hat, nemlich diejenige, welche sich auf die Reflexion und Refraction des Lichtes nach dem Emanationssysteme bezieht.

So lange sich ein Lichtstrahl in einem Mittel von gleichförmiger Dichtigkeit bewegt, bleiben seine Geschwindigkeit und Richtung dieselben, wenn er aber aus einem Mittel in das andere fährt, so ändern sich beide. Im Augenblicke des Uebergangs beschreibt nemlich das Licht eine krumme Linie von unmeſsbarer Ausdehnung, die man ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann. Die Trajectorie jedes Lichttheilchens ist alsdann eine Verbindung zweier gerader Linien, von welchen jede mit gleichförmiger Bewegung beschrieben wird. Nennt man daher y und y' die Längen dieser geraden Linien, n die Geschwindigkeit des Lichtes im ersten, n' die im zweiten Mittel, so hat man ny für den Werth des Integrals $\int v ds$, welches von dem Ausgangspunkte des Theilchens bis zu seinem Eintritt in das zweite Mittel genommen ist, und $n'y'$ für den Theil dieses Integrals, der sich auf das zweite Mittel bezieht. Dieses Integral, in der ganzen Ausdehnung der Trajectorie genommen, wird daher durch $ny + n'y'$ ausgedrückt, und diese Summe muſs, nach dem Principe der kleinsten Wirkung, ein Minimum seyn.

Ehe man weiter geht, bemerke man, daſs, wenn das zweite Mittel eine durchsichtige und krystallisierte Substanz ist, die Geschwindigkeit des Lichtes in dieser Substanz, im Allgemeinen, von der Richtung des Lichtstrahls abhängen wird, so daſs sie für denselben Lichtstrahl immer dieselbe bleibt, für jeden anderen aber eine andere ist. Das Phänomen der doppelten Strahlenbrechung, welches der Kalkspath

und die meisten durchsichtigen Krystalle zeigen, hängt von dem Unterschiede der Geschwindigkeit der verschiedenen Lichtstrahlen ab, die durch dieselben gehen. Man mufs alsdann die Geschwindigkeit n' wie eine Function der Winkel betrachten, die die Richtung jedes Strahles bestimmen, und das Gesetz der Refraction hängt von der Form ab, welche man dieser Function beilegt. Laplace hat, indem er eine passende Hypothese über diese Form machte, aus dem Principe der kleinsten Wirkung das Gesetz der doppelten Strahlenbrechung abgeleitet, welches Huyghens entdeckt und Malus bestätigt hat *); es ist jedoch hier nicht der Ort, diese Theorie aus einander zu setzen, wir beschränken uns darauf, den Fall zu betrachten, wo alle Strahlen sich mit derselben Geschwindigkeit bewegen, wie auch ihre Richtungen beschaffen seyn mögen. In dem Folgenden werden daher die Geschwindigkeiten n und n' als die Gröfsen betrachtet, die für jedes Mittel besonders gegeben sind und nicht von der Richtung der Lichtstrahlen abhängen.

163.

Seyen jetzt A und B (Fig. 40) die beiden äufsersten Punkte der Trajectorie. Man nehme an, die Trennungsfläche der beiden Mittel sey eine Ebene, und ziehe durch diese zwei Punkte eine Ebene, die sie nach der geraden Linie CD schneidet. Sey ferner AEB eine Linie, die in E gebrochen ist, und die Projection der Trajectorie auf diese Ebene darstellt. Man ziehe durch die Punkte A, B, E die Linien AF, BG, HEK senkrecht auf die gerade Linie CD. Da die Lage der Punkte A und B gegeben ist, so sind die drei geraden Linien AF, BG, FG bekannt, aber die Lage des Punktes E und die Winkel AEH und BEK sind unbekannt, und müssen durch die Bedingung des Minimum bestimmt werden. Wir setzen daher

$$AF = a, \quad BG = b, \quad FG = c, \quad AEH = x, \quad BEK = x';$$

alsdann geben die rechtwinkligen Dreiecke AFE und BGE

$$EF = a \text{ tang } x, \quad EG = b \text{ tang } x'$$

und man hat daher

$$a \text{ tang. } x + b \text{ tang. } x' = c. \qquad (a)$$

*) Mémoires de la première classe de l'Institut, pour l'année 1809.

Der Lichtstrahl geht durch die Trennungsfläche der beiden Mittel in einem Punkte, dessen Projection, auf die Ebene der Figur, E ist. Nennt man nun z den Abstand dieses unbekannten Punktes vom Punkte E, so ist y die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem z und AE die beiden Katheten sind, und y' ist Hypotenuse eines anderen Dreiecks, dessen Katheten z und BE sind. Betrachtet man aber die Dreiecke AEF und BEG, so hat man

$$AE = \frac{a}{\cos x}, \quad BE = \frac{b}{\cos x'},$$

und daher

$$y = \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{\cos^2 x}}, \quad y' = \sqrt{z^2 + \frac{b^2}{\cos^2 x'}}.$$

Substituiert man diese Werthe in die Gröfse $ny + n'y'$, so ergiebt sich hieraus eine Function von z, x, x', die ein Minimum in Rücksicht auf diese drei Veränderlichen seyn mufs, von welchen die beiden Letzteren durch die Gleichung (a) mit einander verbunden sind. Es mufs daher zuvörderst das Differential dieser Function, in Beziehung auf z genommen, gleich Null seyn, woraus man

$$n\frac{dy}{dz} + n'\frac{dy'}{dz} = \frac{nz}{y} + \frac{n'z}{y'} = o$$

erhält. Dieser Bedingung kann man aber nur dadurch Genüge leisten, dafs man $z = o$ setzt, woraus sich ergiebt, dafs der Lichtstrahl die Trennungsfläche der beiden Mittel im Punkte E trifft, und dafs er daher nicht aus der Ebene heraus tritt, die durch die Punkte A und B gezogen und auf dieser Oberfläche senkrecht ist.

Setzt man $z = o$, so hat man einfach

$$ny + n'y' = \frac{na}{\cos x} + \frac{n'b}{\cos x'},$$

und wenn man das vollständige Differential dieser Gröfse gleich Null setzt, so erhält man

$$\frac{na \sin x dx}{\cos^2 x} + \frac{n'b \sin x' dx'}{\cos^2 x'} = o;$$

differentiiert man aber auch die Gleichung (a), so hat man zu gleicher Zeit

$$\frac{adx}{\cos^2 x} + \frac{bdx'}{\cos^2 x'} = o,$$

und wenn man $\frac{dx'}{dx}$ aus diesen zwei Gleichungen eliminiert, so findet man

$$n \sin x = n' \sin x'. \qquad (b)$$

Diese Gleichung und die Gleichung (a) bestimmen die Werthe von x und x', welche dem Minimum von $ny + n'y'$ entsprechen. Hat man den Werth von x berechnet, so construiert man den Punkt E, indem man $EF = a \operatorname{tang.} x$ setzt, alsdann zieht man die geraden Linien AE und BE, so wird die gebrochene Linie AEB der Weg seyn, welchen der Lichtstrahl verfolgt, um vom Punkte A nach dem Punkte B zu gehen.

Der Winkel AEH, der zwischen der Normalen EH der Trennungsfläche der beiden Mittel und dem einfallenden Strahl AE enthalten ist, ist das, was man den Einfallswinkel nennt, der Winkel BEK, der zwischen der Verlängerung dieser Normalen und dem gebrochenen Strahle BE enthalten ist, heifst der Brechungswinkel. Diese beiden Winkel werden hier durch x und x' bezeichnet. Die Gleichung (b) giebt daher den Brechungswinkel, wenn der Einfallswinkel gegeben ist, und man sieht, vermöge dieser Gleichung, dafs der Sinus des Brechungswinkels zum Sinus des Einfallswinkels in einem beständigen Verhältnisse steht.

Dies ist wirklich das bekannte Gesetz der gewöhnlichen Strahlenbrechung, dessen Entdeckung man Descartes verdankt. Das Verhältnifs der zwei Sinus hängt von dem der Geschwindigkeiten n und n', für die Mittel, die man betrachtet, ab, und ist daher, bei den verschiedenen Arten durchsichtiger Mittel, verschieden.

164.

Wenn der Lichtstrahl, statt in das zweite Mittel einzudringen, an der Trennungsfläche reflectiert wird, so ist seine Geschwindigkeit in der ganzen Ausdehnung der Trajectorie dieselbe, welche alsdann ganz in demselben Mittel enthalten ist. Das Integral $\int v ds$ wird also der ganzen Länge der Trajectorie, mit dieser beständigen Geschwindigkeit multipliciert, gleich seyn, diese Länge mufs daher, in Folge des Princips der kleinsten Wirkung ein Minimum seyn.

Man nehme, wie in dem vorhergehenden §., an, dafs die Trennungsfläche eine ebene sey. Seyen A und B (Fig. 41) die beiden äufsersten Punkte der Trajectorie, man lege durch diese Punkte eine Ebene, welche auf dieser Fläche senkrecht steht und sie in der Linie CD schneidet. Jeder Lichtstrahl bewegt sich von A nach B, indem er die gebrochene Linie AEB beschreibt, welche die kürzeste von allen denen ist, die auf der Trennungsfläche reflectiert werden. Es ist aber zuvörderst einleuchtend, dafs diese Linie in der Ebene enthalten ist, welche auf dieser Fläche senkrecht steht, denn jede andere Trajectorie wäre länger, als ihre Projection auf diese Ebene. Aufserdem kann man leicht ohne Rechnung zeigen, dafs die kürzeste gebrochene Linie diejenige ist, welche zwei gleiche Winkel mit der geraden Linie CD macht, d. h. wenn man

$$AEC = BED$$

hat, so wird die Linie AEB kürzer seyn, als jede andere gebrochene Linie $AE'B$, deren Punkt E', ebenso wie E, in der Linie CD liegt.

Man fälle nemlich von A die senkrechte Linie AF auf die Linie CD, verlängere sie um das Stück $A'F$, welches gleich AF ist, und ziehe die geraden Linien $A'E$ und $A'E'$. Die zwei Winkel AEC und $A'EC$ werden gleich seyn, daher sind es die zwei Winkel $A'EC$ und BED ebenfalls, vermöge der vorhergehenden Gleichung, folglich ist die Linie $A'EB$ eine gerade, und man hat daher

$$A'E + BE < A'E' + BE',$$

und da $A'E = AE$ und $A'E' = AE'$ ist, so folgt hieraus

$$AE + BE < AE' + BE',$$

was zu beweisen war.

Errichtet man im Punkte E die senkrechte Linie EH auf CD, so sind AEH und BEH die Einfallswinkel und Reflexionswinkel des Lichtstrahls, der sich vom Punkte A nach dem Punkte B bewegt. Diese Winkel werden gleich seyn, weil sie die gleichen Winkel AEC und BED bezüglich zu 90 Graden ergänzen; hieraus folgt das bekannte Gesetz der Reflexion des Lichtes, welches darin besteht, dafs der Reflexionswinkel immer dem Einfallswinkel gleich ist.

165.

Wenn man die Emanationstheorie des Lichtes annimmt, so kann man die Gesetze der Reflexion und der Brechung aus dem Ausdrucke des Quadrates der Geschwindigkeit eines Punktes, der Anziehungskräften unterworfen ist (§. 158), auf eine directere Weise ableiten, als wenn man das Princip der kleinsten Wirkung anwendet. Da diese Frage uns ein Beispiel der Bewegung eines materiellen Punktes darbietet, welches durch die Natur der Kräfte, die man betrachtet, und durch seine Anwendung auf die Physik interessant ist, so werde ich die Auflösung desselben für den gewöhnlichen Fall aus einander setzen, wenn die beiden Mittel, durch welche das Licht geht, nicht krystallisiert sind.

In dieser Theorie nimmt man an, dafs jedes Lichttheilchen der Anziehung aller materiellen Punkte des Mittels, durch welches es geht, unterworfen ist, und man betrachtet diese Kraft wie eine unbekannte Function des Abstandes, von welcher man blos weifs, dafs sie sehr schnell abnimmt, so wie der Abstand zunimmt, so dafs sie ganz unmerklich wird, wenn der Abstand eine mefsbare Gröfse hat. So z. B. bezeichne man durch r den Abstand des angezogenen Punktes vom anziehenden Punkte, durch α eine Linie von endlicher Gröfse, die jedoch unmefsbar ist, und durch e die Basis der natürlichen Logarithmen. Eine Kraft dieser Art kann durch

$$A\, e^{-\frac{r}{\alpha}}$$

bezeichnet werden, wo A ihre Gröfse für einen unendlich kleinen Abstand r bedeutet. Sobald dieser Abstand eine mefsbare Gröfse hat, und daher ein sehr bedeutendes Vielfaches von α ist, so hat diese Function keinen merklichen Werth mehr.

So lange sich ein Lichtstrahl in einem Mittel bewegt, das gleichartig und von beständiger Dichtigkeit ist, so heben sich die Anziehungen, die er erleidet, auf, und seine Bewegung ist geradlinig und einförmig. Nun nehme man aber an, dafs er in einem Punkte M (Fig. 42) angekommen sey, der sich in einem unmefsbaren Abstande von der Oberfläche CD befindet, welche die zwei verschiedenen Mittel trennt, und welchen wir, um einen bestimmten Fall zu betrachten, horizontal

annehmen; von diesem Punkte M fälle man auf CD die senkrechte Linie MP, und ziehe alsdann in dem oberen Mittel zwei Ebenen $C'D'$ und $C''D''$ mit CD parallel, deren wechselseitiger Abstand gleich MP sey, und so, daſs die erste durch den Punkt M geht. Es ist offenbar, daſs die Anziehungen, welche auf den Lichtstrahl im Punkte M, durch die zwei Schichten des oberen Mittels ausgeübt werden, die bezüglich zwischen CD und $C'D'$, und $C'D'$ und $C''D''$ enthalten sind, gleich und einander entgegengesetzt sind; sie heben sich daher auf, und der Lichtstrahl wird nur durch die Anziehung des Theils des oberen Mittels, durch welches er geht, getrieben, der über $C''D''$ liegt, und durch die ganze Anziehung des unteren Mittels. Diese beiden Kräfte sind senkrecht auf CD, sie ändern sich mit dem Abstande MP nach unbekannten Gesetzen, die jedoch so beschaffen sind, daſs jede dieser Kräfte unmerklich ist, wenn MP es nicht ist, und daſs sie ihren gröſsten Werth erreichen, wenn dieser Abstand Null ist, oder der Lichtstrahl an die Trennungsfläche der beiden Mittel gekommen ist.

Sey z der Abstand MP am Ende der Zeit t, und seyen Z und Z' unbekannte Functionen von z, welche die beschleunigenden Kräfte ausdrücken, die von den Anziehungen des unteren Mittels und des Theils des oberen, welcher über $C''D''$ liegt, herrühren. Die ganze beschleunigende Kraft, welche z zu vermindern strebt, wird der Unterschied $Z - Z'$ seyn, man hat daher in dem oberen Mittel

$$\frac{d^2z}{dt^2} + Z - Z' = o \qquad (1)$$

als Gleichung der verticalen Bewegung eines Lichttheilchens.

Wenn der Lichtstrahl im Punkte E durch die Fläche CD gegangen und in das andere Mittel bis zu dem Punkte M' eingedrungen ist, so daſs die Linie $M'P'$, die auf CD senkrecht steht, ebenfalls durch z dargestellt wird, so sieht man leicht, daſs die beschleunigende Kraft, welche diese Veränderliche zu vermindern strebt, dem Unterschiede $Z' - Z$ gleich seyn wird, so daſs man

$$\frac{d^2z}{dt^2} + Z' - Z = o \qquad (2)$$

als Gleichung der verticalen Bewegung in dem unteren Mittel

hat. Was die horizontale Bewegung, d. h. die, welche mit CD parallel ist, betrifft, so ist sie gleichförmig, und die horizontale Geschwindigkeit ändert sich nicht, wenn der Lichtstrahl von einem Mittel zum anderen übergeht; denn die Anziehungskräfte in jedem Mittel heben sich nach der mit CD parallelen Richtung auf, und nach dieser Richtung wird der Lichtstrahl von gar keiner beschleunigenden Kraft getrieben. Nennt man daher k die Geschwindigkeit des Lichtes in einem Punkte A des oberen Mittels, der in einem meſsbaren Abstande von CD liegt, und α den spitzen Winkel, den die Richtung dieser Geschwindigkeit mit der Verticalen einschlieſst, so hat man, für einen beliebigen Augenblick, $k \sin \alpha$ als Ausdruck der Geschwindigkeit nach der mit CD parallelen Richtung. Dringt der Lichtstrahl bis zu einer meſsbaren Tiefe in das zweite Mittel ein, und bezeichnet man durch k' und α' das, was k und α in einem Punkte A' dieses Mittels werden, der in einem meſsbaren Abstande von CD liegt, so kann man auch die horizontale Geschwindigkeit des Lichtstrahls durch $k' \sin \alpha'$ bezeichnen, so daſs man

$$k \sin \alpha = k' \sin \alpha' \qquad (3)$$

hat.

Man sieht auch a priori, daſs die Trajectorie des Lichtstrahls eine ebene und verticale krumme Linie seyn wird; man braucht daher nur noch seine Geschwindigkeit nach der auf CD senkrechten Richtung zu bestimmen, welche er sowohl in dem oberen als unteren Mittel, in einem beliebigen Abstande z von dieser Oberfläche, hat.

166.

Ich bezeichne diese Geschwindigkeit durch u, so daſs man für beide Mittel $\frac{dz^2}{dt^2} = u^2$ hat. Multipliciert man die Gleichung (1) mit $2dz$, integriert und bezeichnet die willkührliche Constante durch c, so hat man im oberen Mittel

$$u^2 = c + 2\int Z'dz - 2\int Zdz.$$

Ich nehme an, daſs diese beiden Integrale zugleich mit z verschwinden, und bezeichne durch h und h' ihre Werthe in einem meſsbaren Abstande von CD. Es ist erlaubt, diese Integrale h und h' von Null bis zum Unendlichen auszudeh-

nen, denn die Functionen Z und Z' und folglich auch die entsprechenden Theile von $\int Zdz$ und $\int Z'dz'$ sind, über einen meſsbaren Werth hinaus, nach der Voraussetzung, Null oder unmeſsbar. Man kann daher, wenn man will, auch schreiben

$$h = \int_o^\infty Zdz, \quad h' = \int_o^\infty Z'dz.$$

Auſserdem hat man, für einen meſsbaren Werth von z,

$$u^2 = k^2 \cos^2 \alpha,$$

also auch

$$k^2 \cos^2 \alpha = c + 2h' - 2h,$$

und wenn man c aus dem allgemeinen Werthe von u^2 eliminiert, so folgt hieraus

$$u^2 = k^2 \cos^2 \alpha + 2h - 2h' + 2\int Z'dz - 2\int Zdz$$

für einen beliebigen Punkt M.

Ich bezeichne durch k_1 die Geschwindigkeit des Lichtstrahls im Punkte E der Oberfläche CD, und durch α_1 den Winkel, den seine Richtung mit der Verticalen einschlieſst. In diesem Punkte hat man

$$u^2 = k_1^2 \cos^2 \alpha_1,$$

und da er dem Werthe $z = o$ entspricht, so verschwinden die zwei letzten Glieder der vorhergehenden Formel, und man hat

$$k_1^2 \cos^2 \alpha_1 = k^2 \cos^2 \alpha + 2h - 2h'. \qquad (4)$$

Damit der Lichtstrahl die Trennungsfläche der beiden Mittel erreiche, muſs der zweite Theil dieser Gleichung eine positive Gröſse seyn, oder man muſs

$$h' < h + \tfrac{1}{2} k^2 \cos^2 \alpha$$

haben. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, was voraussetzt, daſs die Anziehung des oberen Mittels die des unteren übertrifft, so erschöpft sich die verticale Geschwindigkeit des Lichtstrahls, ehe er noch die Ebene CD erreicht hat. Es giebt alsdann einen Punkt in der Trajectorie, wo die Tangente horizontal seyn wird. In diesem Punkte angelangt, geht der Lichtstrahl wieder zurück, die zwei Zweige dieser krummen Linie, die in diesem Punkte zusammen treffen, werden ähnlich seyn, da sie durch Kräfte beschrieben werden, die für denselben Werth von z gleich sind. Hat dieser Abstand z eine meſsbare Gröſse, so gehen diese zwei Zweige in gerade

hat. Was die horizontale Bewegung, d. h. die, welche mit CD parallel ist, betrifft, so ist sie gleichförmig, und die horizontale Geschwindigkeit ändert sich nicht, wenn der Lichtstrahl von einem Mittel zum anderen übergeht; denn die Anziehungskräfte in jedem Mittel heben sich nach der mit CD parallelen Richtung auf, und nach dieser Richtung wird der Lichtstrahl von gar keiner beschleunigenden Kraft getrieben. Nennt man daher k die Geschwindigkeit des Lichtes in einem Punkte A des oberen Mittels, der in einem meſsbaren Abstande von CD liegt, und α den spitzen Winkel, den die Richtung dieser Geschwindigkeit mit der Verticalen einschlieſst, so hat man, für einen beliebigen Augenblick, $k \sin \alpha$ als Ausdruck der Geschwindigkeit nach der mit CD parallelen Richtung. Dringt der Lichtstrahl bis zu einer meſsbaren Tiefe in das zweite Mittel ein, und bezeichnet man durch k' und α' das, was k und α in einem Punkte A' dieses Mittels werden, der in einem meſsbaren Abstande von CD liegt, so kann man auch die horizontale Geschwindigkeit des Lichtstrahls durch $k' \sin \alpha'$ bezeichnen, so daſs man

$$k \sin \alpha = k' \sin \alpha' \qquad (3)$$

hat.

Man sieht auch a priori, daſs die Trajectorie des Lichtstrahls eine ebene und verticale krumme Linie seyn wird; man braucht daher nur noch seine Geschwindigkeit nach der auf CD senkrechten Richtung zu bestimmen, welche er sowohl in dem oberen als unteren Mittel, in einem beliebigen Abstande z von dieser Oberfläche, hat.

166.

Ich bezeichne diese Geschwindigkeit durch u, so daſs man für beide Mittel $\frac{dz^2}{dt^2} = u^2$ hat. Multipliciert man die Gleichung (1) mit $2dz$, integriert und bezeichnet die willkührliche Constante durch c, so hat man im oberen Mittel

$$u^2 = c + 2\int Z'dz - 2\int Zdz.$$

Ich nehme an, daſs diese beiden Integrale zugleich mit z verschwinden, und bezeichne durch h und h' ihre Werthe in einem meſsbaren Abstande von CD. Es ist erlaubt, diese Integrale h und h' von Null bis zum Unendlichen auszudeh-

nen, denn die Functionen Z und Z' und folglich auch die entsprechenden Theile von $\int Zdz$ und $\int Z'dz'$ sind, über einen meſsbaren Werth hinaus, nach der Voraussetzung, Null oder unmeſsbar. Man kann daher, wenn man will, auch schreiben

$$h = \int_o^\infty Zdz, \quad h' = \int_o^\infty Z'dz.$$

Auſserdem hat man, für einen meſsbaren Werth von z,

$$u^2 = k^2 \cos^2 \alpha,$$

also auch

$$k^2 \cos^2 \alpha = c + 2h' - 2h,$$

und wenn man c aus dem allgemeinen Werthe von u^2 eliminiert, so folgt hieraus

$$u^2 = k^2 \cos^2 \alpha + 2h - 2h' + 2\int Z'dz - 2\int Zdz$$

für einen beliebigen Punkt M.

Ich bezeichne durch k_1 die Geschwindigkeit des Lichtstrahls im Punkte E der Oberfläche CD, und durch α_1 den Winkel, den seine Richtung mit der Verticalen einschlieſst. In diesem Punkte hat man

$$u^2 = k_1^2 \cos^2 \alpha_1,$$

und da er dem Werthe $z = o$ entspricht, so verschwinden die zwei letzten Glieder der vorhergehenden Formel, und man hat

$$k_1^2 \cos^2 \alpha_1 = k^2 \cos^2 \alpha + 2h - 2h'. \qquad (4)$$

Damit der Lichtstrahl die Trennungsfläche der beiden Mittel erreiche, muſs der zweite Theil dieser Gleichung eine positive Gröſse seyn, oder man muſs

$$h' < h + \tfrac{1}{2} k^2 \cos^2 \alpha$$

haben. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, was voraussetzt, daſs die Anziehung des oberen Mittels die des unteren übertrifft, so erschöpft sich die verticale Geschwindigkeit des Lichtstrahls, ehe er noch die Ebene CD erreicht hat. Es giebt alsdann einen Punkt in der Trajectorie, wo die Tangente horizontal seyn wird. In diesem Punkte angelangt, geht der Lichtstrahl wieder zurück, die zwei Zweige dieser krummen Linie, die in diesem Punkte zusammen treffen, werden ähnlich seyn, da sie durch Kräfte beschrieben werden, die für denselben Werth von z gleich sind. Hat dieser Abstand z eine meſsbare Gröſse, so gehen diese zwei Zweige in gerade

Gröfse und Richtung der Anfangsgeschwindigkeit k unabhängig ist, mufs die der kürzesten Linie zwischen diesen zwei Punkten seyn.

Nennt man aber α, β, γ die Winkel, welche die Linie, die auf der Krümmungsebene einer beliebigen krummen Linie in dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, senkrecht steht, mit deren Verlängerungen nach der positiven Richtung einschliefst, und setzt man, zur Abkürzung,

$$[(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2]^{\frac{1}{2}}=h$$

so hat man

$$\cos\alpha = \frac{1}{h}(dyd^2z - dzd^2y)$$

$$\cos\beta = \frac{1}{h}(dzd^2x - dxd^2z)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{h}(dxd^2y - dyd^2x)$$

vermöge der Formeln (3) des §. 19, wo dieselben Winkel durch λ, μ, ν bezeichnet sind. In Folge der Gleichung (e) hat man daher

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu,$$

woraus hervorgeht, dafs die Linie, welche auf der Krümmungsebene der Trajectorie, und die, welche auf der gegebenen Oberfläche senkrecht steht, auch auf einander senkrecht stehen. Hieraus folgt aber, dafs die Gleichung (f), welche der kürzesten Linie angehört, auch die der krummen Linie ist, bei welcher die Krümmungsebene überall auf der gegebenen Oberfläche senkrecht steht, so dafs diese zwei Linien eine und dieselbe krumme Linie sind, die auf dieser Oberfläche gezogen ist, sobald man bei beiden die Bedingung macht, dafs sie durch dieselben äufsersten Punkte A und B gehen müssen.

Hieraus folgt, dafs, wenn diese zwei Punkte einer der Krümmungslinien der gegebenen Oberfläche angehören, diese Linie die kürzeste von einem Punkte zum anderen ist, denn die Krümmungsebene für irgend einen Punkt, enthält zwei auf einander folgende Normalen der gegebenen Oberfläche, und steht daher auf dieser Oberfläche senkrecht.

III. Digression über die Bewegung des Lichtes.

162.

Der Lehrsatz des §. 160 ist unter dem Namen des **Princips der kleinsten Wirkung** bekannt, welchen er durch den metaphysischen Gesichtspunkt erhalten hat, aus welchem man ihn zuerst betrachtet hat und der später mit Recht verlassen worden ist. Es kann aber nützlich seyn, hier eine der ersten Anwendungen mitzutheilen, die man von diesem Principe gemacht hat, nemlich diejenige, welche sich auf die Reflexion und Refraction des Lichtes nach dem Emanationssysteme bezieht.

So lange sich ein Lichtstrahl in einem Mittel von gleichförmiger Dichtigkeit bewegt, bleiben seine Geschwindigkeit und Richtung dieselben, wenn er aber aus einem Mittel in das andere fährt, so ändern sich beide. Im Augenblicke des Uebergangs beschreibt nemlich das Licht eine krumme Linie von unmeſsbarer Ausdehnung, die man ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann. Die Trajectorie jedes Lichttheilchens ist alsdann eine Verbindung zweier gerader Linien, von welchen jede mit gleichförmiger Bewegung beschrieben wird. Nennt man daher y und y' die Längen dieser geraden Linien, n die Geschwindigkeit des Lichtes im ersten, n' die im zweiten Mittel, so hat man ny für den Werth des Integrals $\int v ds$, welches von dem Ausgangspunkte des Theilchens bis zu seinem Eintritt in das zweite Mittel genommen ist, und $n'y'$ für den Theil dieses Integrals, der sich auf das zweite Mittel bezieht. Dieses Integral, in der ganzen Ausdehnung der Trajectorie genommen, wird daher durch $ny + n'y'$ ausgedrückt, und diese Summe muſs, nach dem Principe der kleinsten Wirkung, ein Minimum seyn.

Ehe man weiter geht, bemerke man, daſs, wenn das zweite Mittel eine durchsichtige und krystallisierte Substanz ist, die Geschwindigkeit des Lichtes in dieser Substanz, im Allgemeinen, von der Richtung des Lichtstrahls abhängen wird, so daſs sie für denselben Lichtstrahl immer dieselbe bleibt, für jeden anderen aber eine andere ist. Das Phänomen der doppelten Strahlenbrechung, welches der Kalkspath

und die meisten durchsichtigen Krystalle zeigen, hängt von dem Unterschiede der Geschwindigkeit der verschiedenen Lichtstrahlen ab, die durch dieselben gehen. Man mufs alsdann die Geschwindigkeit n' wie eine Function der Winkel betrachten, die die Richtung jedes Strahles bestimmen, und das Gesetz der Refraction hängt von der Form ab, welche man dieser Function beilegt. Laplace hat, indem er eine passende Hypothese über diese Form machte, aus dem Principe der kleinsten Wirkung das Gesetz der doppelten Strahlenbrechung abgeleitet, welches Huyghens entdeckt und Malus bestätigt hat *); es ist jedoch hier nicht der Ort, diese Theorie aus einander zu setzen, wir beschränken uns darauf, den Fall zu betrachten, wo alle Strahlen sich mit derselben Geschwindigkeit bewegen, wie auch ihre Richtungen beschaffen seyn mögen. In dem Folgenden werden daher die Geschwindigkeiten n und n' als die Gröfsen betrachtet, die für jedes Mittel besonders gegeben sind und nicht von der Richtung der Lichtstrahlen abhängen.

163.

Seyen jetzt A und B (Fig. 40) die beiden äufsersten Punkte der Trajectorie. Man nehme an, die Trennungsfläche der beiden Mittel sey eine Ebene, und ziehe durch diese zwei Punkte eine Ebene, die sie nach der geraden Linie CD schneidet. Sey ferner AEB eine Linie, die in E gebrochen ist, und die Projection der Trajectorie auf diese Ebene darstellt. Man ziehe durch die Punkte A, B, E die Linien AF, BG, HEK senkrecht auf die gerade Linie CD. Da die Lage der Punkte A und B gegeben ist, so sind die drei geraden Linien AF, BG, FG bekannt, aber die Lage des Punktes E und die Winkel AEH und BEK sind unbekannt, und müssen durch die Bedingung des Minimum bestimmt werden. Wir setzen daher

$$AF = a, \quad BG = b, \quad FG = c, \quad AEH = x, \quad BEK = x',$$

alsdann geben die rechtwinkligen Dreiecke AFE und BGE

$$EF = a \text{ tang } x, \quad EG = b \text{ tang } x'$$

und man hat daher

$$a \text{ tang. } x + b \text{ tang. } x' = c. \qquad (a)$$

*) Mémoires de la première classe de l'Institut, pour l'année 1809.

Der Lichtstrahl geht durch die Trennungsfläche der beiden Mittel in einem Punkte, dessen Projection, auf die Ebene der Figur, E ist. Nennt man nun z den Abstand dieses unbekannten Punktes vom Punkte E, so ist y die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem z und AE die beiden Katheten sind, und y' ist Hypotenuse eines anderen Dreiecks, dessen Katheten z und BE sind. Betrachtet man aber die Dreiecke AEF und BEG, so hat man

$$AE = \frac{a}{\cos x}, \quad BE = \frac{b}{\cos x'},$$

und daher

$$y = \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{\cos^2 x}}, \quad y' = \sqrt{z^2 + \frac{b^2}{\cos^2 x'}}.$$

Substituiert man diese Werthe in die Gröfse $ny + n'y'$, so ergiebt sich hieraus eine Function von z, x, x', die ein Minimum in Rücksicht auf diese drei Veränderlichen seyn muſs, von welchen die beiden Letzteren durch die Gleichung (a) mit einander verbunden sind. Es muſs daher zuvörderst das Differential dieser Function, in Beziehung auf z genommen, gleich Null seyn, woraus man

$$n\frac{dy}{dz} + n'\frac{dy'}{dz} = \frac{nz}{y} + \frac{n'z}{y'} = o$$

erhält. Dieser Bedingung kann man aber nur dadurch Genüge leisten, daſs man $z = o$ setzt, woraus sich ergiebt, daſs der Lichtstrahl die Trennungsfläche der beiden Mittel im Punkte E trifft, und daſs er daher nicht aus der Ebene heraus tritt, die durch die Punkte A und B gezogen und auf dieser Oberfläche senkrecht ist.

Setzt man $z = o$, so hat man einfach

$$ny + n'y' = \frac{na}{\cos x} + \frac{n'b}{\cos x'},$$

und wenn man das vollständige Differential dieser Gröfse gleich Null setzt, so erhält man

$$\frac{na \sin x dx}{\cos^2 x} + \frac{n'b \sin x' dx'}{\cos^2 x'} = o;$$

differentiiert man aber auch die Gleichung (a), so hat man zu gleicher Zeit

$$\frac{a dx}{\cos^2 x} + \frac{b dx'}{\cos^2 x'} = o,$$

und wenn man $\frac{dx'}{dx}$ aus diesen zwei Gleichungen eliminiert, so findet man

$$n \sin x = n' \sin x'. \qquad (b)$$

Diese Gleichung und die Gleichung (a) bestimmen die Werthe von x und x', welche dem Minimum von $ny + n'y'$ entsprechen. Hat man den Werth von x berechnet, so construiert man den Punkt E, indem man $EF = a \operatorname{tang}. x$ setzt, alsdann zieht man die geraden Linien AE und BE, so wird die gebrochene Linie AEB der Weg seyn, welchen der Lichtstrahl verfolgt, um vom Punkte A nach dem Punkte B zu gehen.

Der Winkel AEH, der zwischen der Normalen EH der Trennungsfläche der beiden Mittel und dem einfallenden Strahl AE enthalten ist, ist das, was man den Einfallswinkel nennt, der Winkel BEK, der zwischen der Verlängerung dieser Normalen und dem gebrochenen Strahle BE enthalten ist, heifst der Brechungswinkel. Diese beiden Winkel werden hier durch x und x' bezeichnet. Die Gleichung (b) giebt daher den Brechungswinkel, wenn der Einfallswinkel gegeben ist, und man sieht, vermöge dieser Gleichung, dafs der Sinus des Brechungswinkels zum Sinus des Einfallswinkels in einem beständigen Verhältnisse steht.

Dies ist wirklich das bekannte Gesetz der gewöhnlichen Strahlenbrechung, dessen Entdeckung man Descartes verdankt. Das Verhältnifs der zwei Sinus hängt von dem der Geschwindigkeiten n und n', für die Mittel, die man betrachtet, ab, und ist daher, bei den verschiedenen Arten durchsichtiger Mittel, verschieden.

164.

Wenn der Lichtstrahl, statt in das zweite Mittel einzudringen, an der Trennungsfläche reflectiert wird, so ist seine Geschwindigkeit in der ganzen Ausdehnung der Trajectorie dieselbe, welche alsdann ganz in demselben Mittel enthalten ist. Das Integral $\int v ds$ wird also der ganzen Länge der Trajectorie, mit dieser beständigen Geschwindigkeit multipliciert, gleich seyn, diese Länge mufs daher, in Folge des Princips der kleinsten Wirkung ein Minimum seyn.

Man nehme, wie in dem vorhergehenden §., an, dafs die Trennungsfläche eine ebene sey. Seyen A und B (Fig. 41) die beiden äufsersten Punkte der Trajectorie, man lege durch diese Punkte eine Ebene, welche auf dieser Fläche senkrecht steht und sie in der Linie CD schneidet. Jeder Lichtstrahl bewegt sich von A nach B, indem er die gebrochene Linie AEB beschreibt, welche die kürzeste von allen denen ist, die auf der Trennungsfläche reflectiert werden. Es ist aber zuvörderst einleuchtend, dafs diese Linie in der Ebene enthalten ist, welche auf dieser Fläche senkrecht steht, denn jede andere Trajectorie wäre länger, als ihre Projection auf diese Ebene. Aufserdem kann man leicht ohne Rechnung zeigen, dafs die kürzeste gebrochene Linie diejenige ist, welche zwei gleiche Winkel mit der geraden Linie CD macht, d. h. wenn man

$$AEC = BED$$

hat, so wird die Linie AEB kürzer seyn, als jede andere gebrochene Linie $AE'B$, deren Punkt E', ebenso wie E, in der Linie CD liegt.

Man fälle nemlich von A die senkrechte Linie AF auf die Linie CD, verlängere sie um das Stück $A'F$, welches gleich AF ist, und ziehe die geraden Linien $A'E$ und $A'E'$. Die zwei Winkel AEC und $A'EC$ werden gleich seyn, daher sind es die zwei Winkel $A'EC$ und BED ebenfalls, vermöge der vorhergehenden Gleichung, folglich ist die Linie $A'EB$ eine gerade, und man hat daher

$$A'E + BE < A'E' + BE',$$

und da $A'E = AE$ und $A'E' = AE'$ ist, so folgt hieraus

$$AE + BE < AE' + BE',$$

was zu beweisen war.

Errichtet man im Punkte E die senkrechte Linie EH auf CD, so sind AEH und BEH die Einfallswinkel und Reflexionswinkel des Lichtstrahls, der sich vom Punkte A nach dem Punkte B bewegt. Diese Winkel werden gleich seyn, weil sie die gleichen Winkel AEC und BED bezüglich zu 90 Graden ergänzen; hieraus folgt das bekannte Gesetz der Reflexion des Lichtes, welches darin besteht, dafs der Reflexionswinkel immer dem Einfallswinkel gleich ist.

165.

Wenn man die Emanationstheorie des Lichtes annimmt, so kann man die Gesetze der Reflexion und der Brechung aus dem Ausdrucke des Quadrates der Geschwindigkeit eines Punktes, der Anziehungskräften unterworfen ist (§. 158), auf eine directere Weise ableiten, als wenn man das Princip der kleinsten Wirkung anwendet. Da diese Frage uns ein Beispiel der Bewegung eines materiellen Punktes darbietet, welches durch die Natur der Kräfte, die man betrachtet, und durch seine Anwendung auf die Physik interessant ist, so werde ich die Auflösung desselben für den gewöhnlichen Fall aus einander setzen, wenn die beiden Mittel, durch welche das Licht geht, nicht krystallisiert sind.

In dieser Theorie nimmt man an, daſs jedes Lichttheilchen der Anziehung aller materiellen Punkte des Mittels, durch welches es geht, unterworfen ist, und man betrachtet diese Kraft wie eine unbekannte Function des Abstandes, von welcher man blos weiſs, daſs sie sehr schnell abnimmt, so wie der Abstand zunimmt, so daſs sie ganz unmerklich wird, wenn der Abstand eine meſsbare Gröſse hat. So z. B. bezeichne man durch r den Abstand des angezogenen Punktes vom anziehenden Punkte, durch α eine Linie von endlicher Gröſse, die jedoch unmeſsbar ist, und durch e die Basis der natürlichen Logarithmen. Eine Kraft dieser Art kann durch

$$A\, e^{-\frac{r}{\alpha}}$$

bezeichnet werden, wo A ihre Gröſse für einen unendlich kleinen Abstand r bedeutet. Sobald dieser Abstand eine meſsbare Gröſse hat, und daher ein sehr bedeutendes Vielfaches von α ist, so hat diese Function keinen merklichen Werth mehr.

So lange sich ein Lichtstrahl in einem Mittel bewegt, das gleichartig und von beständiger Dichtigkeit ist, so heben sich die Anziehungen, die er erleidet, auf, und seine Bewegung ist geradlinig und einförmig. Nun nehme man aber an, daſs er in einem Punkte M (Fig. 42) angekommen sey, der sich in einem unmeſsbaren Abstande von der Oberfläche CD befindet, welche die zwei verschiedenen Mittel trennt, und welchen wir, um einen bestimmten Fall zu betrachten, horizontal

annehmen; von diesem Punkte M fälle man auf CD die senkrechte Linie MP, und ziehe alsdann in dem oberen Mittel zwei Ebenen $C'D'$ und $C''D''$ mit CD parallel, deren wechselseitiger Abstand gleich MP sey, und so, dafs die erste durch den Punkt M geht. Es ist offenbar, dafs die Anziehungen, welche auf den Lichtstrahl im Punkte M, durch die zwei Schichten des oberen Mittels ausgeübt werden, die bezüglich zwischen CD und $C'D'$, und $C'D'$ und $C''D''$ enthalten sind, gleich und einander entgegengesetzt sind; sie heben sich daher auf, und der Lichtstrahl wird nur durch die Anziehung des Theils des oberen Mittels, durch welches er geht, getrieben, der über $C''D''$ liegt, und durch die ganze Anziehung des unteren Mittels. Diese beiden Kräfte sind senkrecht auf CD, sie ändern sich mit dem Abstande MP nach unbekannten Gesetzen, die jedoch so beschaffen sind, dafs jede dieser Kräfte unmerklich ist, wenn MP es nicht ist, und dafs sie ihren gröfsten Werth erreichen, wenn dieser Abstand Null ist, oder der Lichtstrahl an die Trennungsfläche der beiden Mittel gekommen ist.

Sey z der Abstand MP am Ende der Zeit t, und seyen Z und Z' unbekannte Functionen von z, welche die beschleunigenden Kräfte ausdrücken, die von den Anziehungen des unteren Mittels und des Theils des oberen, welcher über $C''D''$ liegt, herrühren. Die ganze beschleunigende Kraft, welche z zu vermindern strebt, wird der Unterschied $Z-Z'$ seyn, man hat daher in dem oberen Mittel

$$\frac{d^2z}{dt^2}+Z-Z'=o \qquad (1)$$

als Gleichung der verticalen Bewegung eines Lichttheilchens.

Wenn der Lichtstrahl im Punkte E durch die Fläche CD gegangen und in das andere Mittel bis zu dem Punkte M' eingedrungen ist, so dafs die Linie $M'P'$, die auf CD senkrecht steht, ebenfalls durch z dargestellt wird, so sieht man leicht, dafs die beschleunigende Kraft, welche diese Veränderliche zu vermindern strebt, dem Unterschiede $Z'-Z$ gleich seyn wird, so dafs man

$$\frac{d^2z}{dt^2}+Z'-Z=o \qquad (2)$$

als Gleichung der verticalen Bewegung in dem unteren Mittel

hat. Was die horizontale Bewegung, d. h. die, welche mit CD parallel ist, betrifft, so ist sie gleichförmig, und die horizontale Geschwindigkeit ändert sich nicht, wenn der Lichtstrahl von einem Mittel zum anderen übergeht; denn die Anziehungskräfte in jedem Mittel heben sich nach der mit CD parallelen Richtung auf, und nach dieser Richtung wird der Lichtstrahl von gar keiner beschleunigenden Kraft getrieben. Nennt man daher k die Geschwindigkeit des Lichtes in einem Punkte A des oberen Mittels, der in einem meſsbaren Abstande von CD liegt, und α den spitzen Winkel, den die Richtung dieser Geschwindigkeit mit der Verticalen einschlieſst, so hat man, für einen beliebigen Augenblick, $k \sin \alpha$ als Ausdruck der Geschwindigkeit nach der mit CD parallelen Richtung. Dringt der Lichtstrahl bis zu einer meſsbaren Tiefe in das zweite Mittel ein, und bezeichnet man durch k' und α' das, was k und α in einem Punkte A' dieses Mittels werden, der in einem meſsbaren Abstande von CD liegt, so kann man auch die horizontale Geschwindigkeit des Lichtstrahls durch $k' \sin \alpha'$ bezeichnen, so daſs man

$$k \sin \alpha = k' \sin \alpha' \qquad (3)$$

hat.

Man sieht auch a priori, daſs die Trajectorie des Lichtstrahls eine ebene und verticale krumme Linie seyn wird; man braucht daher nur noch seine Geschwindigkeit nach der auf CD senkrechten Richtung zu bestimmen, welche er sowohl in dem oberen als unteren Mittel, in einem beliebigen Abstande z von dieser Oberfläche, hat.

166.

Ich bezeichne diese Geschwindigkeit durch u, so daſs man für beide Mittel $\frac{dz^2}{dt^2} = u^2$ hat. Multipliciert man die Gleichung (1) mit $2dz$, integriert und bezeichnet die willkührliche Constante durch c, so hat man im oberen Mittel

$$u^2 = c + 2\int Z'dz - 2\int Zdz.$$

Ich nehme an, daſs diese beiden Integrale zugleich mit z verschwinden, und bezeichne durch h und h' ihre Werthe in einem meſsbaren Abstande von CD. Es ist erlaubt, diese Integrale h und h' von Null bis zum Unendlichen auszudeh-

nen, denn die Functionen Z und Z' und folglich auch die entsprechenden Theile von $\int Zdz$ und $\int Z'dz'$ sind, über einen meſsbaren Werth hinaus, nach der Voraussetzung, Null oder unmeſsbar. Man kann daher, wenn man will, auch schreiben

$$h = \int_o^\infty Zdz, \quad h' = \int_o^\infty Z'dz.$$

Auſserdem hat man, für einen meſsbaren Werth von z,

$$u^2 = k^2 \cos^2\alpha,$$

also auch

$$k^2 \cos^2\alpha = c + 2h' - 2h,$$

und wenn man c aus dem allgemeinen Werthe von u^2 eliminiert, so folgt hieraus

$$u^2 = k^2 \cos^2\alpha + 2h - 2h' + 2\int Z'dz - 2\int Zdz$$

für einen beliebigen Punkt M.

Ich bezeichne durch k_1 die Geschwindigkeit des Lichtstrahls im Punkte E der Oberfläche CD, und durch α_1 den Winkel, den seine Richtung mit der Verticalen einschlieſst. In diesem Punkte hat man

$$u^2 = k_1^2 \cos^2\alpha_1,$$

und da er dem Werthe $z = o$ entspricht, so verschwinden die zwei letzten Glieder der vorhergehenden Formel, und man hat

$$k_1^2 \cos^2\alpha_1 = k^2 \cos^2\alpha + 2h - 2h'. \qquad (4)$$

Damit der Lichtstrahl die Trennungsfläche der beiden Mittel erreiche, muſs der zweite Theil dieser Gleichung eine positive Gröſse seyn, oder man muſs

$$h' < h + \tfrac{1}{2} k^2 \cos^2\alpha$$

haben. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, was voraussetzt, daſs die Anziehung des oberen Mittels die des unteren übertrifft, so erschöpft sich die verticale Geschwindigkeit des Lichtstrahls, ehe er noch die Ebene CD erreicht hat. Es giebt alsdann einen Punkt in der Trajectorie, wo die Tangente horizontal seyn wird. In diesem Punkte angelangt, geht der Lichtstrahl wieder zurück, die zwei Zweige dieser krummen Linie, die in diesem Punkte zusammen treffen, werden ähnlich seyn, da sie durch Kräfte beschrieben werden, die für denselben Werth von z gleich sind. Hat dieser Abstand z eine meſsbare Gröſse, so gehen diese zwei Zweige in gerade

Gröfse und Richtung der Anfangsgeschwindigkeit k unabhängig ist, mufs die der kürzesten Linie zwischen diesen zwei Punkten seyn.

Nennt man aber α, β, γ die Winkel, welche die Linie, die auf der Krümmungsebene einer beliebigen krummen Linie in dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, senkrecht steht, mit deren Verlängerungen nach der positiven Richtung einschliefst, und setzt man, zur Abkürzung,

$$\left[(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2\right]^{\frac{1}{2}}=h$$

so hat man

$$\cos\alpha = \frac{1}{h}(dyd^2z - dzd^2y)$$

$$\cos\beta = \frac{1}{h}(dzd^2x - dxd^2z)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{h}(dxd^2y - dyd^2x)$$

vermöge der Formeln (3) des §. 19, wo dieselben Winkel durch λ, μ, ν bezeichnet sind. In Folge der Gleichung (e) hat man daher

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu,$$

woraus hervorgeht, dafs die Linie, welche auf der Krümmungsebene der Trajectorie, und die, welche auf der gegebenen Oberfläche senkrecht steht, auch auf einander senkrecht stehen. Hieraus folgt aber, dafs die Gleichung (f), welche der kürzesten Linie angehört, auch die der krummen Linie ist, bei welcher die Krümmungsebene überall auf der gegebenen Oberfläche senkrecht steht, so dafs diese zwei Linien eine und dieselbe krumme Linie sind, die auf dieser Oberfläche gezogen ist, sobald man bei beiden die Bedingung macht, dafs sie durch dieselben äufsersten Punkte A und B gehen müssen.

Hieraus folgt, dafs, wenn diese zwei Punkte einer der Krümmungslinien der gegebenen Oberfläche angehören, diese Linie die kürzeste von einem Punkte zum anderen ist, denn die Krümmungsebene für irgend einen Punkt, enthält zwei auf einander folgende Normalen der gegebenen Oberfläche, und steht daher auf dieser Oberfläche senkrecht.

III. Digression über die Bewegung des Lichtes.

162.

Der Lehrsatz des §. 160 ist unter dem Namen des **Princips der kleinsten Wirkung** bekannt, welchen er durch den metaphysischen Gesichtspunkt erhalten hat, aus welchem man ihn zuerst betrachtet hat und der später mit Recht verlassen worden ist. Es kann aber nützlich seyn, hier eine der ersten Anwendungen mitzutheilen, die man von diesem Principe gemacht hat, nemlich diejenige, welche sich auf die Reflexion und Refraction des Lichtes nach dem Emanations-systeme bezieht.

So lange sich ein Lichtstrahl in einem Mittel von gleichförmiger Dichtigkeit bewegt, bleiben seine Geschwindigkeit und Richtung dieselben, wenn er aber aus einem Mittel in das andere fährt, so ändern sich beide. Im Augenblicke des Uebergangs beschreibt nemlich das Licht eine krumme Linie von unmeſsbarer Ausdehnung, die man ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann. Die Trajectorie jedes Lichttheilchens ist alsdann eine Verbindung zweier gerader Linien, von welchen jede mit gleichförmiger Bewegung beschrieben wird. Nennt man daher y und y' die Längen dieser geraden Linien, n die Geschwindigkeit des Lichtes im ersten, n' die im zweiten Mittel, so hat man ny für den Werth des Integrals $\int v ds$, welches von dem Ausgangspunkte des Theilchens bis zu seinem Eintritt in das zweite Mittel genommen ist, und $n'y'$ für den Theil dieses Integrals, der sich auf das zweite Mittel bezieht. Dieses Integral, in der ganzen Ausdehnung der Trajectorie genommen, wird daher durch $ny + n'y'$ ausgedrückt, und diese Summe muſs, nach dem Principe der kleinsten Wirkung, ein Minimum seyn.

Ehe man weiter geht, bemerke man, daſs, wenn das zweite Mittel eine durchsichtige und krystallisierte Substanz ist, die Geschwindigkeit des Lichtes in dieser Substanz, im Allgemeinen, von der Richtung des Lichtstrahls abhängen wird, so daſs sie für denselben Lichtstrahl immer dieselbe bleibt, für jeden anderen aber eine andere ist. Das Phänomen der doppelten Strahlenbrechung, welches der Kalkspath

und die meisten durchsichtigen Krystalle zeigen, hängt von dem Unterschiede der Geschwindigkeit der verschiedenen Lichtstrahlen ab, die durch dieselben gehen. Man mufs alsdann die Geschwindigkeit n' wie eine Function der Winkel betrachten, die die Richtung jedes Strahles bestimmen, und das Gesetz der Refraction hängt von der Form ab, welche man dieser Function beilegt. Laplace hat, indem er eine passende Hypothese über diese Form machte, aus dem Principe der kleinsten Wirkung das Gesetz der doppelten Strahlenbrechung abgeleitet, welches Huyghens entdeckt und Malus bestätigt hat *); es ist jedoch hier nicht der Ort, diese Theorie aus einander zu setzen, wir beschränken uns darauf, den Fall zu betrachten, wo alle Strahlen sich mit derselben Geschwindigkeit bewegen, wie auch ihre Richtungen beschaffen seyn mögen. In dem Folgenden werden daher die Geschwindigkeiten n und n' als die Gröfsen betrachtet, die für jedes Mittel besonders gegeben sind und nicht von der Richtung der Lichtstrahlen abhängen.

163.

Seyen jetzt A und B (Fig. 40) die beiden äufsersten Punkte der Trajectorie. Man nehme an, die Trennungsfläche der beiden Mittel sey eine Ebene, und ziehe durch diese zwei Punkte eine Ebene, die sie nach der geraden Linie CD schneidet. Sey ferner AEB eine Linie, die in E gebrochen ist, und die Projection der Trajectorie auf diese Ebene darstellt. Man ziehe durch die Punkte A, B, E die Linien AF, BG, HEK senkrecht auf die gerade Linie CD. Da die Lage der Punkte A und B gegeben ist, so sind die drei geraden Linien AF, BG, FG bekannt, aber die Lage des Punktes E und die Winkel AEH und BEK sind unbekannt, und müssen durch die Bedingung des Minimum bestimmt werden. Wir setzen daher

$$AF = a, \quad BG = b, \quad FG = c, \quad AEH = x, \quad BEK = x',$$

alsdann geben die rechtwinkligen Dreiecke AFE und BGE

$$EF = a \text{ tang } x, \quad EG = b \text{ tang } x'$$

und man hat daher

$$a \text{ tang. } x + b \text{ tang. } x' = c. \qquad (a)$$

*) Mémoires de la première classe de l'Institut, pour l'année 1809.

Der Lichtstrahl geht durch die Trennungsfläche der beiden Mittel in einem Punkte, dessen Projection, auf die Ebene der Figur, E ist. Nennt man nun z den Abstand dieses unbekannten Punktes vom Punkte E, so ist y die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem z und AE die beiden Katheten sind, und y' ist Hypotenuse eines anderen Dreiecks, dessen Katheten z und BE sind. Betrachtet man aber die Dreiecke AEF und BEG, so hat man

$$AE = \frac{a}{\cos x}, \quad BE = \frac{b}{\cos x'},$$

und daher

$$y = \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{\cos^2 x}}, \quad y' = \sqrt{z^2 + \frac{b^2}{\cos^2 x'}}.$$

Substituiert man diese Werthe in die Gröfse $ny + n'y'$, so ergiebt sich hieraus eine Function von z, x, x', die ein Minimum in Rücksicht auf diese drei Veränderlichen seyn mufs, von welchen die beiden Letzteren durch die Gleichung (a) mit einander verbunden sind. Es mufs daher zuvörderst das Differential dieser Function, in Beziehung auf z genommen, gleich Null seyn, woraus man

$$n\frac{dy}{dz} + n'\frac{dy'}{dz} = \frac{nz}{y} + \frac{n'z}{y'} = o$$

erhält. Dieser Bedingung kann man aber nur dadurch Genüge leisten, dafs man $z = o$ setzt, woraus sich ergiebt, dafs der Lichtstrahl die Trennungsfläche der beiden Mittel im Punkte E trifft, und dafs er daher nicht aus der Ebene heraus tritt, die durch die Punkte A und B gezogen und auf dieser Oberfläche senkrecht ist.

Setzt man $z = o$, so hat man einfach

$$ny + n'y' = \frac{na}{\cos x} + \frac{n'b}{\cos x'},$$

und wenn man das vollständige Differential dieser Gröfse gleich Null setzt, so erhält man

$$\frac{na \sin x dx}{\cos^2 x} + \frac{n'b \sin x' dx'}{\cos^2 x'} = o;$$

differentiiert man aber auch die Gleichung (a), so hat man zu gleicher Zeit

$$\frac{adx}{\cos^2 x} + \frac{bdx'}{\cos^2 x'} = o,$$

und wenn man $\frac{dx'}{dx}$ aus diesen zwei Gleichungen eliminiert, so findet man

$$n \sin x = n' \sin x'. \qquad (b)$$

Diese Gleichung und die Gleichung (a) bestimmen die Werthe von x und x', welche dem Minimum von $ny + n'y'$ entsprechen. Hat man den Werth von x berechnet, so construiert man den Punkt E, indem man $EF = a$ tang. x setzt, alsdann zieht man die geraden Linien AE und BE, so wird die gebrochene Linie AEB der Weg seyn, welchen der Lichtstrahl verfolgt, um vom Punkte A nach dem Punkte B zu gehen.

Der Winkel AEH, der zwischen der Normalen EH der Trennungsfläche der beiden Mittel und dem einfallenden Strahl AE enthalten ist, ist das, was man den Einfallswinkel nennt, der Winkel BEK, der zwischen der Verlängerung dieser Normalen und dem gebrochenen Strahle BE enthalten ist, heifst der Brechungswinkel. Diese beiden Winkel werden hier durch x und x' bezeichnet. Die Gleichung (b) giebt daher den Brechungswinkel, wenn der Einfallswinkel gegeben ist, und man sieht, vermöge dieser Gleichung, dafs der Sinus des Brechungswinkels zum Sinus des Einfallswinkels in einem beständigen Verhältnisse steht.

Dies ist wirklich das bekannte Gesetz der gewöhnlichen Strahlenbrechung, dessen Entdeckung man Descartes verdankt. Das Verhältnifs der zwei Sinus hängt von dem der Geschwindigkeiten n und n', für die Mittel, die man betrachtet, ab, und ist daher, bei den verschiedenen Arten durchsichtiger Mittel, verschieden.

164.

Wenn der Lichtstrahl, statt in das zweite Mittel einzudringen, an der Trennungsfläche reflectiert wird, so ist seine Geschwindigkeit in der ganzen Ausdehnung der Trajectorie dieselbe, welche alsdann ganz in demselben Mittel enthalten ist. Das Integral $\int v ds$ wird also der ganzen Länge der Trajectorie, mit dieser beständigen Geschwindigkeit multipliciert, gleich seyn, diese Länge mufs daher, in Folge des Princips der kleinsten Wirkung ein Minimum seyn.

Man nehme, wie in dem vorhergehenden §., an, dafs die Trennungsfläche eine ebene sey. Seyen A und B (Fig. 41) die beiden äufsersten Punkte der Trajectorie, man lege durch diese Punkte eine Ebene, welche auf dieser Fläche senkrecht steht und sie in der Linie CD schneidet. Jeder Lichtstrahl bewegt sich von A nach B, indem er die gebrochene Linie AEB beschreibt, welche die kürzeste von allen denen ist, die auf der Trennungsfläche reflectiert werden. Es ist aber zuvörderst einleuchtend, dafs diese Linie in der Ebene enthalten ist, welche auf dieser Fläche senkrecht steht, denn jede andere Trajectorie wäre länger, als ihre Projection auf diese Ebene. Aufserdem kann man leicht ohne Rechnung zeigen, dafs die kürzeste gebrochene Linie diejenige ist, welche zwei gleiche Winkel mit der geraden Linie CD macht, d. h. wenn man

$$AEC = BED$$

hat, so wird die Linie AEB kürzer seyn, als jede andere gebrochene Linie $AE'B$, deren Punkt E', ebenso wie E, in der Linie CD liegt.

Man fälle nemlich von A die senkrechte Linie AF auf die Linie CD, verlängere sie um das Stück $A'F$, welches gleich AF ist, und ziehe die geraden Linien $A'E$ und $A'E'$. Die zwei Winkel AEC und $A'EC$ werden gleich seyn, daher sind es die zwei Winkel $A'EC$ und BED ebenfalls, vermöge der vorhergehenden Gleichung, folglich ist die Linie $A'EB$ eine gerade, und man hat daher

$$A'E + BE < A'E' + BE',$$

und da $A'E = AE$ und $A'E' = AE'$ ist, so folgt hieraus

$$AE + BE < AE' + BE',$$

was zu beweisen war.

Errichtet man im Punkte E die senkrechte Linie EH auf CD, so sind AEH und BEH die Einfallswinkel und Reflexionswinkel des Lichtstrahls, der sich vom Punkte A nach dem Punkte B bewegt. Diese Winkel werden gleich seyn, weil sie die gleichen Winkel AEC und BED bezüglich zu 90 Graden ergänzen; hieraus folgt das bekannte Gesetz der Reflexion des Lichtes, welches darin besteht, dafs der Reflexionswinkel immer dem Einfallswinkel gleich ist.

165.

Wenn man die Emanationstheorie des Lichtes annimmt, so kann man die Gesetze der Reflexion und der Brechung aus dem Ausdrucke des Quadrates der Geschwindigkeit eines Punktes, der Anziehungskräften unterworfen ist (§. 158), auf eine directere Weise ableiten, als wenn man das Princip der kleinsten Wirkung anwendet. Da diese Frage uns ein Beispiel der Bewegung eines materiellen Punktes darbietet, welches durch die Natur der Kräfte, die man betrachtet, und durch seine Anwendung auf die Physik interessant ist, so werde ich die Auflösung desselben für den gewöhnlichen Fall aus einander setzen, wenn die beiden Mittel, durch welche das Licht geht, nicht krystallisiert sind.

In dieser Theorie nimmt man an, dafs jedes Lichttheilchen der Anziehung aller materiellen Punkte des Mittels, durch welches es geht, unterworfen ist, und man betrachtet diese Kraft wie eine unbekannte Function des Abstandes, von welcher man blos weifs, dafs sie sehr schnell abnimmt, so wie der Abstand zunimmt, so dafs sie ganz unmerklich wird, wenn der Abstand eine mefsbare Gröfse hat. So z. B. bezeichne man durch r den Abstand des angezogenen Punktes vom anziehenden Punkte, durch α eine Linie von endlicher Gröfse, die jedoch unmefsbar ist, und durch e die Basis der natürlichen Logarithmen. Eine Kraft dieser Art kann durch

$$A\, e^{-\frac{r}{\alpha}}$$

bezeichnet werden, wo A ihre Gröfse für einen unendlich kleinen Abstand r bedeutet. Sobald dieser Abstand eine mefsbare Gröfse hat, und daher ein sehr bedeutendes Vielfaches von α ist, so hat diese Function keinen merklichen Werth mehr.

So lange sich ein Lichtstrahl in einem Mittel bewegt, das gleichartig und von beständiger Dichtigkeit ist, so heben sich die Anziehungen, die er erleidet, auf, und seine Bewegung ist geradlinig und einförmig. Nun nehme man aber an, dafs er in einem Punkte M (Fig. 42) angekommen sey, der sich in einem unmefsbaren Abstande von der Oberfläche CD befindet, welche die zwei verschiedenen Mittel trennt, und welchen wir, um einen bestimmten Fall zu betrachten, horizontal

annehmen; von diesem Punkte M fälle man auf CD die senkrechte Linie MP, und ziehe alsdann in dem oberen Mittel zwei Ebenen $C'D'$ und $C''D''$ mit CD parallel, deren wechselseitiger Abstand gleich MP sey, und so, daſs die erste durch den Punkt M geht. Es ist offenbar, daſs die Anziehungen, welche auf den Lichtstrahl im Punkte M, durch die zwei Schichten des oberen Mittels ausgeübt werden, die bezüglich zwischen CD und $C'D'$, und $C'D'$ und $C''D''$ enthalten sind, gleich und einander entgegengesetzt sind; sie heben sich daher auf, und der Lichtstrahl wird nur durch die Anziehung des Theils des oberen Mittels, durch welches er geht, getrieben, der über $C''D''$ liegt, und durch die ganze Anziehung des unteren Mittels. Diese beiden Kräfte sind senkrecht auf CD, sie ändern sich mit dem Abstande MP nach unbekannten Gesetzen, die jedoch so beschaffen sind, daſs jede dieser Kräfte unmerklich ist, wenn MP es nicht ist, und daſs sie ihren gröſsten Werth erreichen, wenn dieser Abstand Null ist, oder der Lichtstrahl an die Trennungsfläche der beiden Mittel gekommen ist.

Sey z der Abstand MP am Ende der Zeit t, und seyen Z und Z' unbekannte Functionen von z, welche die beschleunigenden Kräfte ausdrücken, die von den Anziehungen des unteren Mittels und des Theils des oberen, welcher über $C''D''$ liegt, herrühren. Die ganze beschleunigende Kraft, welche z zu vermindern strebt, wird der Unterschied $Z - Z'$ seyn, man hat daher in dem oberen Mittel

$$\frac{d^2z}{dt^2} + Z - Z' = o \qquad (1)$$

als Gleichung der verticalen Bewegung eines Lichttheilchens.

Wenn der Lichtstrahl im Punkte E durch die Fläche CD gegangen und in das andere Mittel bis zu dem Punkte M' eingedrungen ist, so daſs die Linie $M'P'$, die auf CD senkrecht steht, ebenfalls durch z dargestellt wird, so sieht man leicht, daſs die beschleunigende Kraft, welche diese Veränderliche zu vermindern strebt, dem Unterschiede $Z' - Z$ gleich seyn wird, so daſs man

$$\frac{d^2z}{dt^2} + Z' - Z = o \qquad (2)$$

als Gleichung der verticalen Bewegung in dem unteren Mittel

hat. Was die horizontale Bewegung, d. h. die, welche mit CD parallel ist, betrifft, so ist sie gleichförmig, und die horizontale Geschwindigkeit ändert sich nicht, wenn der Lichtstrahl von einem Mittel zum anderen übergeht; denn die Anziehungskräfte in jedem Mittel heben sich nach der mit CD parallelen Richtung auf, und nach dieser Richtung wird der Lichtstrahl von gar keiner beschleunigenden Kraft getrieben. Nennt man daher k die Geschwindigkeit des Lichtes in einem Punkte A des oberen Mittels, der in einem meſsbaren Abstande von CD liegt, und α den spitzen Winkel, den die Richtung dieser Geschwindigkeit mit der Verticalen einschlieſst, so hat man, für einen beliebigen Augenblick, $k \sin \alpha$ als Ausdruck der Geschwindigkeit nach der mit CD parallelen Richtung. Dringt der Lichtstrahl bis zu einer meſsbaren Tiefe in das zweite Mittel ein, und bezeichnet man durch k' und α' das, was k und α in einem Punkte A' dieses Mittels werden, der in einem meſsbaren Abstande von CD liegt, so kann man auch die horizontale Geschwindigkeit des Lichtstrahls durch $k' \sin \alpha'$ bezeichnen, so daſs man

$$k \sin \alpha = k' \sin \alpha' \qquad (3)$$

hat.

Man sieht auch a priori, daſs die Trajectorie des Lichtstrahls eine ebene und verticale krumme Linie seyn wird; man braucht daher nur noch seine Geschwindigkeit nach der auf CD senkrechten Richtung zu bestimmen, welche er sowohl in dem oberen als unteren Mittel, in einem beliebigen Abstande z von dieser Oberfläche, hat.

166.

Ich bezeichne diese Geschwindigkeit durch u, so daſs man für beide Mittel $\frac{dz^2}{dt^2} = u^2$ hat. Multipliciert man die Gleichung (1) mit $2dz$, integriert und bezeichnet die willkührliche Constante durch c, so hat man im oberen Mittel

$$u^2 = c + 2\int Z'dz - 2\int Zdz.$$

Ich nehme an, daſs diese beiden Integrale zugleich mit z verschwinden, und bezeichne durch h und h' ihre Werthe in einem meſsbaren Abstande von CD. Es ist erlaubt, diese Integrale h und h' von Null bis zum Unendlichen auszudeh-

nen, denn die Functionen Z und Z' und folglich auch die entsprechenden Theile von $\int Zdz$ und $\int Z'dz'$ sind, über einen meſsbaren Werth hinaus, nach der Voraussetzung, Null oder unmeſsbar. Man kann daher, wenn man will, auch schreiben

$$h = \int_o^\infty Zdz, \quad h' = \int_o^\infty Z'dz.$$

Auſserdem hat man, für einen meſsbaren Werth von z,

$$u^2 = k^2 \cos^2\alpha,$$

also auch

$$k^2 \cos^2\alpha = c + 2h' - 2h,$$

und wenn man c aus dem allgemeinen Werthe von u^2 eliminiert, so folgt hieraus

$$u^2 = k^2 \cos^2\alpha + 2h - 2h' + 2\int Z'dz - 2\int Zdz$$

für einen beliebigen Punkt M.

Ich bezeichne durch k_1 die Geschwindigkeit des Lichtstrahls im Punkte E der Oberfläche CD, und durch α_1 den Winkel, den seine Richtung mit der Verticalen einschlieſst. In diesem Punkte hat man

$$u^2 = k_1^2 \cos^2\alpha_1,$$

und da er dem Werthe $z = o$ entspricht, so verschwinden die zwei letzten Glieder der vorhergehenden Formel, und man hat

$$k_1^2 \cos^2\alpha_1 = k^2 \cos^2\alpha + 2h - 2h'. \qquad (4)$$

Damit der Lichtstrahl die Trennungsfläche der beiden Mittel erreiche, muſs der zweite Theil dieser Gleichung eine positive Gröſse seyn, oder man muſs

$$h' < h + \tfrac{1}{2}k^2 \cos^2\alpha$$

haben. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, was voraussetzt, daſs die Anziehung des oberen Mittels die des unteren übertrifft, so erschöpft sich die verticale Geschwindigkeit des Lichtstrahls, ehe er noch die Ebene CD erreicht hat. Es giebt alsdann einen Punkt in der Trajectorie, wo die Tangente horizontal seyn wird. In diesem Punkte angelangt, geht der Lichtstrahl wieder zurück, die zwei Zweige dieser krummen Linie, die in diesem Punkte zusammen treffen, werden ähnlich seyn, da sie durch Kräfte beschrieben werden, die für denselben Werth von z gleich sind. Hat dieser Abstand z eine meſsbare Gröſse, so gehen diese zwei Zweige in gerade

Gröfse und Richtung der Anfangsgeschwindigkeit k unabhängig ist, mufs die der kürzesten Linie zwischen diesen zwei Punkten seyn.

Nennt man aber α, β, γ die Winkel, welche die Linie, die auf der Krümmungsebene einer beliebigen krummen Linie in dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, senkrecht steht, mit deren Verlängerungen nach der positiven Richtung einschliefst, und setzt man, zur Abkürzung,

$$[(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2]^{\frac{1}{2}}=h$$

so hat man

$$\cos\alpha = \frac{1}{h}(dyd^2z - dzd^2y)$$

$$\cos\beta = \frac{1}{h}(dzd^2x - dxd^2z)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{h}(dxd^2y - dyd^2x)$$

vermöge der Formeln (3) des §. 19, wo dieselben Winkel durch λ, μ, ν bezeichnet sind. In Folge der Gleichung (e) hat man daher

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu,$$

woraus hervorgeht, dafs die Linie, welche auf der Krümmungsebene der Trajectorie, und die, welche auf der gegebenen Oberfläche senkrecht steht, auch auf einander senkrecht stehen. Hieraus folgt aber, dafs die Gleichung (f), welche der kürzesten Linie angehört, auch die der krummen Linie ist, bei welcher die Krümmungsebene überall auf der gegebenen Oberfläche senkrecht steht, so dafs diese zwei Linien eine und dieselbe krumme Linie sind, die auf dieser Oberfläche gezogen ist, sobald man bei beiden die Bedingung macht, dafs sie durch dieselben äufsersten Punkte A und B gehen müssen.

Hieraus folgt, dafs, wenn diese zwei Punkte einer der Krümmungslinien der gegebenen Oberfläche angehören, diese Linie die kürzeste von einem Punkte zum anderen ist, denn die Krümmungsebene für irgend einen Punkt, enthält zwei auf einander folgende Normalen der gegebenen Oberfläche, und steht daher auf dieser Oberfläche senkrecht.

III. Digression über die Bewegung des Lichtes.

162.

Der Lehrsatz des §. 160 ist unter dem Namen des Princips der kleinsten Wirkung bekannt, welchen er durch den metaphysischen Gesichtspunkt erhalten hat, aus welchem man ihn zuerst betrachtet hat und der später mit Recht verlassen worden ist. Es kann aber nützlich seyn, hier eine der ersten Anwendungen mitzutheilen, die man von diesem Principe gemacht hat, nemlich diejenige, welche sich auf die Reflexion und Refraction des Lichtes nach dem Emanationssysteme bezieht.

So lange sich ein Lichtstrahl in einem Mittel von gleichförmiger Dichtigkeit bewegt, bleiben seine Geschwindigkeit und Richtung dieselben, wenn er aber aus einem Mittel in das andere fährt, so ändern sich beide. Im Augenblicke des Uebergangs beschreibt nemlich das Licht eine krumme Linie von unmeſsbarer Ausdehnung, die man ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann. Die Trajectorie jedes Lichttheilchens ist alsdann eine Verbindung zweier gerader Linien, von welchen jede mit gleichförmiger Bewegung beschrieben wird. Nennt man daher y und y' die Längen dieser geraden Linien, n die Geschwindigkeit des Lichtes im ersten, n' die im zweiten Mittel, so hat man ny für den Werth des Integrals $\int v ds$, welches von dem Ausgangspunkte des Theilchens bis zu seinem Eintritt in das zweite Mittel genommen ist, und $n'y'$ für den Theil dieses Integrals, der sich auf das zweite Mittel bezieht. Dieses Integral, in der ganzen Ausdehnung der Trajectorie genommen, wird daher durch $ny + n'y'$ ausgedrückt, und diese Summe muſs, nach dem Principe der kleinsten Wirkung, ein Minimum seyn.

Ehe man weiter geht, bemerke man, daſs, wenn das zweite Mittel eine durchsichtige und krystallisierte Substanz ist, die Geschwindigkeit des Lichtes in dieser Substanz, im Allgemeinen, von der Richtung des Lichtstrahls abhängen wird, so daſs sie für denselben Lichtstrahl immer dieselbe bleibt, für jeden anderen aber eine andere ist. Das Phänomen der doppelten Strahlenbrechung, welches der Kalkspath

und die meisten durchsichtigen Krystalle zeigen, hängt von dem Unterschiede der Geschwindigkeit der verschiedenen Lichtstrahlen ab, die durch dieselben gehen. Man mufs alsdann die Geschwindigkeit n' wie eine Function der Winkel betrachten, die die Richtung jedes Strahles bestimmen, und das Gesetz der Refraction hängt von der Form ab, welche man dieser Function beilegt. Laplace hat, indem er eine passende Hypothese über diese Form machte, aus dem Principe der kleinsten Wirkung das Gesetz der doppelten Strahlenbrechung abgeleitet, welches Huyghens entdeckt und Malus bestätigt hat *); es ist jedoch hier nicht der Ort, diese Theorie aus einander zu setzen, wir beschränken uns darauf, den Fall zu betrachten, wo alle Strahlen sich mit derselben Geschwindigkeit bewegen, wie auch ihre Richtungen beschaffen seyn mögen. In dem Folgenden werden daher die Geschwindigkeiten n und n' als die Gröfsen betrachtet, die für jedes Mittel besonders gegeben sind und nicht von der Richtung der Lichtstrahlen abhängen.

163.

Seyen jetzt A und B (Fig. 40) die beiden äufsersten Punkte der Trajectorie. Man nehme an, die Trennungsfläche der beiden Mittel sey eine Ebene, und ziehe durch diese zwei Punkte eine Ebene, die sie nach der geraden Linie CD schneidet. Sey ferner AEB eine Linie, die in E gebrochen ist, und die Projection der Trajectorie auf diese Ebene darstellt. Man ziehe durch die Punkte A, B, E die Linien AF, BG, HEK senkrecht auf die gerade Linie CD. Da die Lage der Punkte A und B gegeben ist, so sind die drei geraden Linien AF, BG, FG bekannt, aber die Lage des Punktes E und die Winkel AEH und BEK sind unbekannt, und müssen durch die Bedingung des Minimum bestimmt werden. Wir setzen daher

$$AF = a,\quad BG = b,\quad FG = c,\quad AEH = x,\quad BEK = x',$$

alsdann geben die rechtwinkligen Dreiecke AFE und BGE

$$EF = a \text{ tang } x,\quad EG = b \text{ tang } x'$$

und man hat daher

$$a \text{ tang. } x + b \text{ tang. } x' = c. \qquad (a)$$

*) Mémoires de la première classe de l'Institut, pour l'année 1809.

Der Lichtstrahl geht durch die Trennungsfläche der beiden Mittel in einem Punkte, dessen Projection, auf die Ebene der Figur, E ist. Nennt man nun z den Abstand dieses unbekannten Punktes vom Punkte E, so ist y die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem z und AE die beiden Katheten sind, und y' ist Hypotenuse eines anderen Dreiecks, dessen Katheten z und BE sind. Betrachtet man aber die Dreiecke AEF und BEG, so hat man

$$AE = \frac{a}{\cos x}, \quad BE = \frac{b}{\cos x'},$$

und daher

$$y = \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{\cos^2 x}}, \quad y' = \sqrt{z^2 + \frac{b^2}{\cos^2 x'}}.$$

Substituiert man diese Werthe in die Gröfse $ny + n'y'$, so ergiebt sich hieraus eine Function von z, x, x', die ein Minimum in Rücksicht auf diese drei Veränderlichen seyn mufs, von welchen die beiden Letzteren durch die Gleichung (a) mit einander verbunden sind. Es mufs daher zuvörderst das Differential dieser Function, in Beziehung auf z genommen, gleich Null seyn, woraus man

$$n\frac{dy}{dz} + n'\frac{dy'}{dz} = \frac{nz}{y} + \frac{n'z}{y'} = o$$

erhält. Dieser Bedingung kann man aber nur dadurch Genüge leisten, dafs man $z = o$ setzt, woraus sich ergiebt, dafs der Lichtstrahl die Trennungsfläche der beiden Mittel im Punkte E trifft, und dafs er daher nicht aus der Ebene heraus tritt, die durch die Punkte A und B gezogen und auf dieser Oberfläche senkrecht ist.

Setzt man $z = o$, so hat man einfach

$$ny + n'y' = \frac{na}{\cos x} + \frac{n'b}{\cos x'},$$

und wenn man das vollständige Differential dieser Gröfse gleich Null setzt, so erhält man

$$\frac{na \sin x dx}{\cos^2 x} + \frac{n'b \sin x' dx'}{\cos^2 x'} = o;$$

differentiiert man aber auch die Gleichung (a), so hat man zu gleicher Zeit

$$\frac{a dx}{\cos^2 x} + \frac{b dx'}{\cos^2 x'} = o,$$

und wenn man $\frac{dx'}{dx}$ aus diesen zwei Gleichungen eliminiert, so findet man

$$n \sin x = n' \sin x'. \qquad (b)$$

Diese Gleichung und die Gleichung (a) bestimmen die Werthe von x und x', welche dem Minimum von $ny + n'y'$ entsprechen. Hat man den Werth von x berechnet, so construiert man den Punkt E, indem man $EF = a \text{ tang.} x$ setzt, alsdann zieht man die geraden Linien AE und BE, so wird die gebrochene Linie AEB der Weg seyn, welchen der Lichtstrahl verfolgt, um vom Punkte A nach dem Punkte B zu gehen.

Der Winkel AEH, der zwischen der Normalen EH der Trennungsfläche der beiden Mittel und dem einfallenden Strahl AE enthalten ist, ist das, was man den Einfallswinkel nennt, der Winkel BEK, der zwischen der Verlängerung dieser Normalen und dem gebrochenen Strahle BE enthalten ist, heifst der Brechungswinkel. Diese beiden Winkel werden hier durch x und x' bezeichnet. Die Gleichung (b) giebt daher den Brechungswinkel, wenn der Einfallswinkel gegeben ist, und man sieht, vermöge dieser Gleichung, dafs der Sinus des Brechungswinkels zum Sinus des Einfallswinkels in einem beständigen Verhältnisse steht.

Dies ist wirklich das bekannte Gesetz der gewöhnlichen Strahlenbrechung, dessen Entdeckung man Descartes verdankt. Das Verhältnifs der zwei Sinus hängt von dem der Geschwindigkeiten n und n', für die Mittel, die man betrachtet, ab, und ist daher, bei den verschiedenen Arten durchsichtiger Mittel, verschieden.

164.

Wenn der Lichtstrahl, statt in das zweite Mittel einzudringen, an der Trennungsfläche reflectiert wird, so ist seine Geschwindigkeit in der ganzen Ausdehnung der Trajectorie dieselbe, welche alsdann ganz in demselben Mittel enthalten ist. Das Integral $\int v ds$ wird also der ganzen Länge der Trajectorie, mit dieser beständigen Geschwindigkeit multipliciert, gleich seyn, diese Länge mufs daher, in Folge des Princips der kleinsten Wirkung ein Minimum seyn.

Man nehme, wie in dem vorhergehenden §., an, daſs die Trennungsfläche eine ebene sey. Seyen A und B (Fig. 41) die beiden äuſsersten Punkte der Trajectorie, man lege durch diese Punkte eine Ebene, welche auf dieser Fläche senkrecht steht und sie in der Linie CD schneidet. Jeder Lichtstrahl bewegt sich von A nach B, indem er die gebrochene Linie AEB beschreibt, welche die kürzeste von allen denen ist, die auf der Trennungsfläche reflectiert werden. Es ist aber zuvörderst einleuchtend, daſs diese Linie in der Ebene enthalten ist, welche auf dieser Fläche senkrecht steht, denn jede andere Trajectorie wäre länger, als ihre Projection auf diese Ebene. Auſserdem kann man leicht ohne Rechnung zeigen, daſs die kürzeste gebrochene Linie diejenige ist, welche zwei gleiche Winkel mit der geraden Linie CD macht, d. h. wenn man

$$AEC = BED$$

hat, so wird die Linie AEB kürzer seyn, als jede andere gebrochene Linie $AE'B$, deren Punkt E', ebenso wie E, in der Linie CD liegt.

Man fälle nemlich von A die senkrechte Linie AF auf die Linie CD, verlängere sie um das Stück $A'F$, welches gleich AF ist, und ziehe die geraden Linien $A'E$ und $A'E'$. Die zwei Winkel AEC und $A'EC$ werden gleich seyn, daher sind es die zwei Winkel $A'EC$ und BED ebenfalls, vermöge der vorhergehenden Gleichung, folglich ist die Linie $A'EB$ eine gerade, und man hat daher

$$A'E + BE < A'E' + BE',$$

und da $A'E = AE$ und $A'E' = AE'$ ist, so folgt hieraus

$$AE + BE < AE' + BE',$$

was zu beweisen war.

Errichtet man im Punkte E die senkrechte Linie EH auf CD, so sind AEH und BEH die Einfallswinkel und Reflexionswinkel des Lichtstrahls, der sich vom Punkte A nach dem Punkte B bewegt. Diese Winkel werden gleich seyn, weil sie die gleichen Winkel AEC und BED bezüglich zu 90 Graden ergänzen; hieraus folgt das bekannte Gesetz der Reflexion des Lichtes, welches darin besteht, daſs der Reflexionswinkel immer dem Einfallswinkel gleich ist.

165.

Wenn man die Emanationstheorie des Lichtes annimmt, so kann man die Gesetze der Reflexion und der Brechung aus dem Ausdrucke des Quadrates der Geschwindigkeit eines Punktes, der Anziehungskräften unterworfen ist (§. 158), auf eine directere Weise ableiten, als wenn man das Princip der kleinsten Wirkung anwendet. Da diese Frage uns ein Beispiel der Bewegung eines materiellen Punktes darbietet, welches durch die Natur der Kräfte, die man betrachtet, und durch seine Anwendung auf die Physik interessant ist, so werde ich die Auflösung desselben für den gewöhnlichen Fall aus einander setzen, wenn die beiden Mittel, durch welche das Licht geht, nicht krystallisiert sind.

In dieser Theorie nimmt man an, dafs jedes Lichttheilchen der Anziehung aller materiellen Punkte des Mittels, durch welches es geht, unterworfen ist, und man betrachtet diese Kraft wie eine unbekannte Function des Abstandes, von welcher man blos weifs, dafs sie sehr schnell abnimmt, so wie der Abstand zunimmt, so dafs sie ganz unmerklich wird, wenn der Abstand eine mefsbare Gröfse hat. So z. B. bezeichne man durch r den Abstand des angezogenen Punktes vom anziehenden Punkte, durch α eine Linie von endlicher Gröfse, die jedoch unmefsbar ist, und durch e die Basis der natürlichen Logarithmen. Eine Kraft dieser Art kann durch

$$A\, e^{-\frac{r}{\alpha}}$$

bezeichnet werden, wo A ihre Gröfse für einen unendlich kleinen Abstand r bedeutet. Sobald dieser Abstand eine mefsbare Gröfse hat, und daher ein sehr bedeutendes Vielfaches von α ist, so hat diese Function keinen merklichen Werth mehr.

So lange sich ein Lichtstrahl in einem Mittel bewegt, das gleichartig und von beständiger Dichtigkeit ist, so heben sich die Anziehungen, die er erleidet, auf, und seine Bewegung ist geradlinig und einförmig. Nun nehme man aber an, dafs er in einem Punkte M (Fig. 42) angekommen sey, der sich in einem unmefsbaren Abstande von der Oberfläche CD befindet, welche die zwei verschiedenen Mittel trennt, und welchen wir, um einen bestimmten Fall zu betrachten, horizontal

annehmen; von diesem Punkte M fälle man auf CD die senkrechte Linie MP, und ziehe alsdann in dem oberen Mittel zwei Ebenen $C'D'$ und $C''D''$ mit CD parallel, deren wechselseitiger Abstand gleich MP sey, und so, daſs die erste durch den Punkt M geht. Es ist offenbar, daſs die Anziehungen, welche auf den Lichtstrahl im Punkte M, durch die zwei Schichten des oberen Mittels ausgeübt werden, die bezüglich zwischen CD und $C'D'$, und $C'D'$ und $C''D''$ enthalten sind, gleich und einander entgegengesetzt sind; sie heben sich daher auf, und der Lichtstrahl wird nur durch die Anziehung des Theils des oberen Mittels, durch welches er geht, getrieben, der über $C''D''$ liegt, und durch die ganze Anziehung des unteren Mittels. Diese beiden Kräfte sind senkrecht auf CD, sie ändern sich mit dem Abstande MP nach unbekannten Gesetzen, die jedoch so beschaffen sind, daſs jede dieser Kräfte unmerklich ist, wenn MP es nicht ist, und daſs sie ihren gröſsten Werth erreichen, wenn dieser Abstand Null ist, oder der Lichtstrahl an die Trennungsfläche der beiden Mittel gekommen ist.

Sey z der Abstand MP am Ende der Zeit t, und seyen Z und Z' unbekannte Functionen von z, welche die beschleunigenden Kräfte ausdrücken, die von den Anziehungen des unteren Mittels und des Theils des oberen, welcher über $C''D''$ liegt, herrühren. Die ganze beschleunigende Kraft, welche z zu vermindern strebt, wird der Unterschied $Z - Z'$ seyn, man hat daher in dem oberen Mittel

$$\frac{d^2z}{dt^2} + Z - Z' = o \qquad (1)$$

als Gleichung der verticalen Bewegung eines Lichttheilchens.

Wenn der Lichtstrahl im Punkte E durch die Fläche CD gegangen und in das andere Mittel bis zu dem Punkte M' eingedrungen ist, so daſs die Linie $M'P'$, die auf CD senkrecht steht, ebenfalls durch z dargestellt wird, so sieht man leicht, daſs die beschleunigende Kraft, welche diese Veränderliche zu vermindern strebt, dem Unterschiede $Z' - Z$ gleich seyn wird, so daſs man

$$\frac{d^2z}{dt^2} + Z' - Z = o \qquad (2)$$

als Gleichung der verticalen Bewegung in dem unteren Mittel

hat. Was die horizontale Bewegung, d. h. die, welche mit CD parallel ist, betrifft, so ist sie gleichförmig, und die horizontale Geschwindigkeit ändert sich nicht, wenn der Lichtstrahl von einem Mittel zum anderen übergeht; denn die Anziehungskräfte in jedem Mittel heben sich nach der mit CD parallelen Richtung auf, und nach dieser Richtung wird der Lichtstrahl von gar keiner beschleunigenden Kraft getrieben. Nennt man daher k die Geschwindigkeit des Lichtes in einem Punkte A des oberen Mittels, der in einem meſsbaren Abstande von CD liegt, und α den spitzen Winkel, den die Richtung dieser Geschwindigkeit mit der Verticalen einschlieſst, so hat man, für einen beliebigen Augenblick, $k \sin \alpha$ als Ausdruck der Geschwindigkeit nach der mit CD parallelen Richtung. Dringt der Lichtstrahl bis zu einer meſsbaren Tiefe in das zweite Mittel ein, und bezeichnet man durch k' und α' das, was k und α in einem Punkte A' dieses Mittels werden, der in einem meſsbaren Abstande von CD liegt, so kann man auch die horizontale Geschwindigkeit des Lichtstrahls durch $k' \sin \alpha'$ bezeichnen, so daſs man

$$k \sin \alpha = k' \sin \alpha' \qquad (3)$$

hat.

Man sieht auch a priori, daſs die Trajectorie des Lichtstrahls eine ebene und verticale krumme Linie seyn wird; man braucht daher nur noch seine Geschwindigkeit nach der auf CD senkrechten Richtung zu bestimmen, welche er sowohl in dem oberen als unteren Mittel, in einem beliebigen Abstande z von dieser Oberfläche, hat.

166.

Ich bezeichne diese Geschwindigkeit durch u, so daſs man für beide Mittel $\frac{dz^2}{dt^2} = u^2$ hat. Multipliciert man die Gleichung (1) mit $2dz$, integriert und bezeichnet die willkührliche Constante durch c, so hat man im oberen Mittel

$$u^2 = c + 2\int Z'dz - 2\int Zdz.$$

Ich nehme an, daſs diese beiden Integrale zugleich mit z verschwinden, und bezeichne durch h und h' ihre Werthe in einem meſsbaren Abstande von CD. Es ist erlaubt, diese Integrale h und h' von Null bis zum Unendlichen auszudeh-

nen, denn die Functionen Z und Z' und folglich auch die entsprechenden Theile von $\int Zdz$ und $\int Z'dz'$ sind, über einen meſsbaren Werth hinaus, nach der Voraussetzung, Null oder unmeſsbar. Man kann daher, wenn man will, auch schreiben

$$h = \int_o^\infty Zdz, \quad h' = \int_o^\infty Z'dz.$$

Auſserdem hat man, für einen meſsbaren Werth von z,

$$u^2 = k^2 \cos^2 \alpha,$$

also auch

$$k^2 \cos^2 \alpha = c + 2h' - 2h,$$

und wenn man c aus dem allgemeinen Werthe von u^2 eliminiert, so folgt hieraus

$$u^2 = k^2 \cos^2 \alpha + 2h - 2h' + 2\int Z'dz - 2\int Zdz$$

für einen beliebigen Punkt M.

Ich bezeichne durch k_1 die Geschwindigkeit des Lichtstrahls im Punkte E der Oberfläche CD, und durch α_1 den Winkel, den seine Richtung mit der Verticalen einschlieſst. In diesem Punkte hat man

$$u^2 = k_1{}^2 \cos^2 \alpha_1,$$

und da er dem Werthe $z = o$ entspricht, so verschwinden die zwei letzten Glieder der vorhergehenden Formel, und man hat

$$k_1{}^2 \cos^2 \alpha_1 = k^2 \cos^2 \alpha + 2h - 2h'. \qquad (4)$$

Damit der Lichtstrahl die Trennungsfläche der beiden Mittel erreiche, muſs der zweite Theil dieser Gleichung eine positive Gröſse seyn, oder man muſs

$$h' < h + \tfrac{1}{2} k^2 \cos^2 \alpha$$

haben. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, was voraussetzt, daſs die Anziehung des oberen Mittels die des unteren übertrifft, so erschöpft sich die verticale Geschwindigkeit des Lichtstrahls, ehe er noch die Ebene CD erreicht hat. Es giebt alsdann einen Punkt in der Trajectorie, wo die Tangente horizontal seyn wird. In diesem Punkte angelangt, geht der Lichtstrahl wieder zurück, die zwei Zweige dieser krummen Linie, die in diesem Punkte zusammen treffen, werden ähnlich seyn, da sie durch Kräfte beschrieben werden, die für denselben Werth von z gleich sind. Hat dieser Abstand z eine meſsbare Gröſse, so gehen diese zwei Zweige in gerade

Gröſse und Richtung der Anfangsgeschwindigkeit k unabhängig ist, muſs die der kürzesten Linie zwischen diesen zwei Punkten seyn.

Nennt man aber α, β, γ die Winkel, welche die Linie, die auf der Krümmungsebene einer beliebigen krummen Linie in dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, senkrecht steht, mit deren Verlängerungen nach der positiven Richtung einschlieſst, und setzt man, zur Abkürzung,

$$\left[(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2\right]^{\frac{1}{2}}=h$$

so hat man

$$\cos\alpha = \frac{1}{h}(dyd^2z - dzd^2y)$$

$$\cos\beta = \frac{1}{h}(dzd^2x - dxd^2z)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{h}(dxd^2y - dyd^2x)$$

vermöge der Formeln (3) des §. 19, wo dieselben Winkel durch λ, μ, ν bezeichnet sind. In Folge der Gleichung (e) hat man daher

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu,$$

woraus hervorgeht, daſs die Linie, welche auf der Krümmungsebene der Trajectorie, und die, welche auf der gegebenen Oberfläche senkrecht steht, auch auf einander senkrecht stehen. Hieraus folgt aber, daſs die Gleichung (f), welche der kürzesten Linie angehört, auch die der krummen Linie ist, bei welcher die Krümmungsebene überall auf der gegebenen Oberfläche senkrecht steht, so daſs diese zwei Linien eine und dieselbe krumme Linie sind, die auf dieser Oberfläche gezogen ist, sobald man bei beiden die Bedingung macht, daſs sie durch dieselben äuſsersten Punkte A und B gehen müssen.

Hieraus folgt, daſs, wenn diese zwei Punkte einer der Krümmungslinien der gegebenen Oberfläche angehören, diese Linie die kürzeste von einem Punkte zum anderen ist, denn die Krümmungsebene für irgend einen Punkt, enthält zwei auf einander folgende Normalen der gegebenen Oberfläche, und steht daher auf dieser Oberfläche senkrecht.

III. Digression über die Bewegung des Lichtes.

162.

Der Lehrsatz des §. 160 ist unter dem Namen des Princips der kleinsten Wirkung bekannt, welchen er durch den metaphysischen Gesichtspunkt erhalten hat, aus welchem man ihn zuerst betrachtet hat und der später mit Recht verlassen worden ist. Es kann aber nützlich seyn, hier eine der ersten Anwendungen mitzutheilen, die man von diesem Principe gemacht hat, nemlich diejenige, welche sich auf die Reflexion und Refraction des Lichtes nach dem Emanationssysteme bezieht.

So lange sich ein Lichtstrahl in einem Mittel von gleichförmiger Dichtigkeit bewegt, bleiben seine Geschwindigkeit und Richtung dieselben, wenn er aber aus einem Mittel in das andere fährt, so ändern sich beide. Im Augenblicke des Uebergangs beschreibt nemlich das Licht eine krumme Linie von unmefsbarer Ausdehnung, die man ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann. Die Trajectorie jedes Lichttheilchens ist alsdann eine Verbindung zweier gerader Linien, von welchen jede mit gleichförmiger Bewegung beschrieben wird. Nennt man daher y und y' die Längen dieser geraden Linien, n die Geschwindigkeit des Lichtes im ersten, n' die im zweiten Mittel, so hat man ny für den Werth des Integrals $\int v ds$, welches von dem Ausgangspunkte des Theilchens bis zu seinem Eintritt in das zweite Mittel genommen ist, und $n'y'$ für den Theil dieses Integrals, der sich auf das zweite Mittel bezieht. Dieses Integral, in der ganzen Ausdehnung der Trajectorie genommen, wird daher durch $ny + n'y'$ ausgedrückt, und diese Summe mufs, nach dem Principe der kleinsten Wirkung, ein Minimum seyn.

Ehe man weiter geht, bemerke man, dafs, wenn das zweite Mittel eine durchsichtige und krystallisierte Substanz ist, die Geschwindigkeit des Lichtes in dieser Substanz, im Allgemeinen, von der Richtung des Lichtstrahls abhängen wird, so dafs sie für denselben Lichtstrahl immer dieselbe bleibt, für jeden anderen aber eine andere ist. Das Phänomen der doppelten Strahlenbrechung, welches der Kalkspath

und die meisten durchsichtigen Krystalle zeigen, hängt von dem Unterschiede der Geschwindigkeit der verschiedenen Lichtstrahlen ab, die durch dieselben gehen. Man mufs alsdann die Geschwindigkeit n' wie eine Function der Winkel betrachten, die die Richtung jedes Strahles bestimmen, und das Gesetz der Refraction hängt von der Form ab, welche man dieser Function beilegt. Laplace hat, indem er eine passende Hypothese über diese Form machte, aus dem Principe der kleinsten Wirkung das Gesetz der doppelten Strahlenbrechung abgeleitet, welches Huyghens entdeckt und Malus bestätigt hat *); es ist jedoch hier nicht der Ort, diese Theorie aus einander zu setzen, wir beschränken uns darauf, den Fall zu betrachten, wo alle Strahlen sich mit derselben Geschwindigkeit bewegen, wie auch ihre Richtungen beschaffen seyn mögen. In dem Folgenden werden daher die Geschwindigkeiten n und n' als die Gröfsen betrachtet, die für jedes Mittel besonders gegeben sind und nicht von der Richtung der Lichtstrahlen abhängen.

163.

Seyen jetzt A und B (Fig. 40) die beiden äufsersten Punkte der Trajectorie. Man nehme an, die Trennungsfläche der beiden Mittel sey eine Ebene, und ziehe durch diese zwei Punkte eine Ebene, die sie nach der geraden Linie CD schneidet. Sey ferner AEB eine Linie, die in E gebrochen ist, und die Projection der Trajectorie auf diese Ebene darstellt. Man ziehe durch die Punkte A, B, E die Linien AF, BG, HEK senkrecht auf die gerade Linie CD. Da die Lage der Punkte A und B gegeben ist, so sind die drei geraden Linien AF, BG, FG bekannt, aber die Lage des Punktes E und die Winkel AEH und BEK sind unbekannt, und müssen durch die Bedingung des Minimum bestimmt werden. Wir setzen daher

$$AF = a, \quad BG = b, \quad FG = c, \quad AEH = x, \quad BEK = x',$$

alsdann geben die rechtwinkligen Dreiecke AFE und BGE

$$EF = a \text{ tang } x, \quad EG = b \text{ tang } x'$$

und man hat daher

$$a \text{ tang. } x + b \text{ tang. } x' = c. \qquad (a)$$

*) Mémoires de la première classe de l'Institut, pour l'année 1809.

Der Lichtstrahl geht durch die Trennungsfläche der beiden Mittel in einem Punkte, dessen Projection, auf die Ebene der Figur, E ist. Nennt man nun z den Abstand dieses unbekannten Punktes vom Punkte E, so ist y die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem z und AE die beiden Katheten sind, und y' ist Hypotenuse eines anderen Dreiecks, dessen Katheten z und BE sind. Betrachtet man aber die Dreiecke AEF und BEG, so hat man

$$AE = \frac{a}{\cos x}, \quad BE = \frac{b}{\cos x'},$$

und daher

$$y = \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{\cos^2 x}}, \quad y' = \sqrt{z^2 + \frac{b^2}{\cos^2 x'}}.$$

Substituiert man diese Werthe in die Grösse $ny + n'y'$, so ergiebt sich hieraus eine Function von z, x, x', die ein Minimum in Rücksicht auf diese drei Veränderlichen seyn muss, von welchen die beiden Letzteren durch die Gleichung (a) mit einander verbunden sind. Es muss daher zuvörderst das Differential dieser Function, in Beziehung auf z genommen, gleich Null seyn, woraus man

$$n\frac{dy}{dz} + n'\frac{dy'}{dz} = \frac{nz}{y} + \frac{n'z}{y'} = o$$

erhält. Dieser Bedingung kann man aber nur dadurch Genüge leisten, dass man $z = o$ setzt, woraus sich ergiebt, dass der Lichtstrahl die Trennungsfläche der beiden Mittel im Punkte E trifft, und dass er daher nicht aus der Ebene heraus tritt, die durch die Punkte A und B gezogen und auf dieser Oberfläche senkrecht ist.

Setzt man $z = o$, so hat man einfach

$$ny + n'y' = \frac{na}{\cos x} + \frac{n'b}{\cos x'},$$

und wenn man das vollständige Differential dieser Grösse gleich Null setzt, so erhält man

$$\frac{na \sin x dx}{\cos^2 x} + \frac{n'b \sin x' dx'}{\cos^2 x'} = o;$$

differentiirt man aber auch die Gleichung (a), so hat man zu gleicher Zeit

$$\frac{adx}{\cos^2 x} + \frac{bdx'}{\cos^2 x'} = o,$$

und wenn man $\frac{dx'}{dx}$ aus diesen zwei Gleichungen eliminiert, so findet man

$$n \sin x = n' \sin x'. \qquad (b)$$

Diese Gleichung und die Gleichung (*a*) bestimmen die Werthe von x und x', welche dem Minimum von $ny + n'y'$ entsprechen. Hat man den Werth von x berechnet, so construiert man den Punkt E, indem man $EF = a$ tang. x setzt, alsdann zieht man die geraden Linien AE und BE, so wird die gebrochene Linie AEB der Weg seyn, welchen der Lichtstrahl verfolgt, um vom Punkte A nach dem Punkte B zu gehen.

Der Winkel AEH, der zwischen der Normalen EH der Trennungsfläche der beiden Mittel und dem einfallenden Strahl AE enthalten ist, ist das, was man den Einfallswinkel nennt, der Winkel BEK, der zwischen der Verlängerung dieser Normalen und dem gebrochenen Strahle BE enthalten ist, heifst der Brechungswinkel. Diese beiden Winkel werden hier durch x und x' bezeichnet. Die Gleichung (*b*) giebt daher den Brechungswinkel, wenn der Einfallswinkel gegeben ist, und man sieht, vermöge dieser Gleichung, dafs der Sinus des Brechungswinkels zum Sinus des Einfallswinkels in einem beständigen Verhältnisse steht.

Dies ist wirklich das bekannte Gesetz der gewöhnlichen Strahlenbrechung, dessen Entdeckung man Descartes verdankt. Das Verhältnifs der zwei Sinus hängt von dem der Geschwindigkeiten n und n', für die Mittel, die man betrachtet, ab, und ist daher, bei den verschiedenen Arten durchsichtiger Mittel, verschieden.

164.

Wenn der Lichtstrahl, statt in das zweite Mittel einzudringen, an der Trennungsfläche reflectiert wird, so ist seine Geschwindigkeit in der ganzen Ausdehnung der Trajectorie dieselbe, welche alsdann ganz in demselben Mittel enthalten ist. Das Integral $\int v ds$ wird also der ganzen Länge der Trajectorie, mit dieser beständigen Geschwindigkeit multipliciert, gleich seyn, diese Länge mufs daher, in Folge des Princips der kleinsten Wirkung ein Minimum seyn.

Man nehme, wie in dem vorhergehenden §., an, dafs die Trennungsfläche eine ebene sey. Seyen A und B (Fig. 41) die beiden äufsersten Punkte der Trajectorie, man lege durch diese Punkte eine Ebene, welche auf dieser Fläche senkrecht steht und sie in der Linie CD schneidet. Jeder Lichtstrahl bewegt sich von A nach B, indem er die gebrochene Linie AEB beschreibt, welche die kürzeste von allen denen ist, die auf der Trennungsfläche reflectiert werden. Es ist aber zuvörderst einleuchtend, dafs diese Linie in der Ebene enthalten ist, welche auf dieser Fläche senkrecht steht, denn jede andere Trajectorie wäre länger, als ihre Projection auf diese Ebene. Aufserdem kann man leicht ohne Rechnung zeigen, dafs die kürzeste gebrochene Linie diejenige ist, welche zwei gleiche Winkel mit der geraden Linie CD macht, d. h. wenn man

$$AEC = BED$$

hat, so wird die Linie AEB kürzer seyn, als jede andere gebrochene Linie $AE'B$, deren Punkt E', ebenso wie E, in der Linie CD liegt.

Man fälle nemlich von A die senkrechte Linie AF auf die Linie CD, verlängere sie um das Stück $A'F$, welches gleich AF ist, und ziehe die geraden Linien $A'E$ und $A'E'$. Die zwei Winkel AEC und $A'EC$ werden gleich seyn, daher sind es die zwei Winkel $A'EC$ und BED ebenfalls, vermöge der vorhergehenden Gleichung, folglich ist die Linie $A'EB$ eine gerade, und man hat daher

$$A'E + BE < A'E' + BE',$$

und da $A'E = AE$ und $A'E' = AE'$ ist, so folgt hieraus

$$AE + BE < AE' + BE',$$

was zu beweisen war.

Errichtet man im Punkte E die senkrechte Linie EH auf CD, so sind AEH und BEH die Einfallswinkel und Reflexionswinkel des Lichtstrahls, der sich vom Punkte A nach dem Punkte B bewegt. Diese Winkel werden gleich seyn, weil sie die gleichen Winkel AEC und BED bezüglich zu 90 Graden ergänzen; hieraus folgt das bekannte Gesetz der Reflexion des Lichtes, welches darin besteht, dafs der Reflexionswinkel immer dem Einfallswinkel gleich ist.

165.

Wenn man die Emanationstheorie des Lichtes annimmt, so kann man die Gesetze der Reflexion und der Brechung aus dem Ausdrucke des Quadrates der Geschwindigkeit eines Punktes, der Anziehungskräften unterworfen ist (§. 158), auf eine directere Weise ableiten, als wenn man das Princip der kleinsten Wirkung anwendet. Da diese Frage uns ein Beispiel der Bewegung eines materiellen Punktes darbietet, welches durch die Natur der Kräfte, die man betrachtet, und durch seine Anwendung auf die Physik interessant ist, so werde ich die Auflösung desselben für den gewöhnlichen Fall aus einander setzen, wenn die beiden Mittel, durch welche das Licht geht, nicht krystallisiert sind.

In dieser Theorie nimmt man an, daſs jedes Lichttheilchen der Anziehung aller materiellen Punkte des Mittels, durch welches es geht, unterworfen ist, und man betrachtet diese Kraft wie eine unbekannte Function des Abstandes, von welcher man blos weiſs, daſs sie sehr schnell abnimmt, so wie der Abstand zunimmt, so daſs sie ganz unmerklich wird, wenn der Abstand eine meſsbare Gröſse hat. So z. B. bezeichne man durch r den Abstand des angezogenen Punktes vom anziehenden Punkte, durch α eine Linie von endlicher Gröſse, die jedoch unmeſsbar ist, und durch e die Basis der natürlichen Logarithmen. Eine Kraft dieser Art kann durch

$$A\, e^{-\frac{r}{\alpha}}$$

bezeichnet werden, wo A ihre Gröſse für einen unendlich kleinen Abstand r bedeutet. Sobald dieser Abstand eine meſsbare Gröſse hat, und daher ein sehr bedeutendes Vielfaches von α ist, so hat diese Function keinen merklichen Werth mehr.

So lange sich ein Lichtstrahl in einem Mittel bewegt, das gleichartig und von beständiger Dichtigkeit ist, so heben sich die Anziehungen, die er erleidet, auf, und seine Bewegung ist geradlinig und einförmig. Nun nehme man aber an, daſs er in einem Punkte M (Fig. 42) angekommen sey, der sich in einem unmeſsbaren Abstande von der Oberfläche CD befindet, welche die zwei verschiedenen Mittel trennt, und welchen wir, um einen bestimmten Fall zu betrachten, horizontal

annehmen; von diesem Punkte M fälle man auf CD die senkrechte Linie MP, und ziehe alsdann in dem oberen Mittel zwei Ebenen $C'D'$ und $C''D''$ mit CD parallel, deren wechselseitiger Abstand gleich MP sey, und so, daſs die erste durch den Punkt M geht. Es ist offenbar, daſs die Anziehungen, welche auf den Lichtstrahl im Punkte M, durch die zwei Schichten des oberen Mittels ausgeübt werden, die bezüglich zwischen CD und $C'D'$, und $C'D'$ und $C''D''$ enthalten sind, gleich und einander entgegengesetzt sind; sie heben sich daher auf, und der Lichtstrahl wird nur durch die Anziehung des Theils des oberen Mittels, durch welches er geht, getrieben, der über $C''D''$ liegt, und durch die ganze Anziehung des unteren Mittels. Diese beiden Kräfte sind senkrecht auf CD, sie ändern sich mit dem Abstande MP nach unbekannten Gesetzen, die jedoch so beschaffen sind, daſs jede dieser Kräfte unmerklich ist, wenn MP es nicht ist, und daſs sie ihren gröſsten Werth erreichen, wenn dieser Abstand Null ist, oder der Lichtstrahl an die Trennungsfläche der beiden Mittel gekommen ist.

Sey z der Abstand MP am Ende der Zeit t, und seyen Z und Z' unbekannte Functionen von z, welche die beschleunigenden Kräfte ausdrücken, die von den Anziehungen des unteren Mittels und des Theils des oberen, welcher über $C''D''$ liegt, herrühren. Die ganze beschleunigende Kraft, welche z zu vermindern strebt, wird der Unterschied $Z - Z'$ seyn, man hat daher in dem oberen Mittel

$$\frac{d^2z}{dt^2} + Z - Z' = o \qquad (1)$$

als Gleichung der verticalen Bewegung eines Lichttheilchens.

Wenn der Lichtstrahl im Punkte E durch die Fläche CD gegangen und in das andere Mittel bis zu dem Punkte M' eingedrungen ist, so daſs die Linie $M'P'$, die auf CD senkrecht steht, ebenfalls durch z dargestellt wird, so sieht man leicht, daſs die beschleunigende Kraft, welche diese Veränderliche zu vermindern strebt, dem Unterschiede $Z' - Z$ gleich seyn wird, so daſs man

$$\frac{d^2z}{dt^2} + Z' - Z = o \qquad (2)$$

als Gleichung der verticalen Bewegung in dem unteren Mittel

hat. Was die horizontale Bewegung, d. h. die, welche mit CD parallel ist, betrifft, so ist sie gleichförmig, und die horizontale Geschwindigkeit ändert sich nicht, wenn der Lichtstrahl von einem Mittel zum anderen übergeht; denn die Anziehungskräfte in jedem Mittel heben sich nach der mit CD parallelen Richtung auf, und nach dieser Richtung wird der Lichtstrahl von gar keiner beschleunigenden Kraft getrieben. Nennt man daher k die Geschwindigkeit des Lichtes in einem Punkte A des oberen Mittels, der in einem meſsbaren Abstande von CD liegt, und α den spitzen Winkel, den die Richtung dieser Geschwindigkeit mit der Verticalen einschlieſst, so hat man, für einen beliebigen Augenblick, $k \sin \alpha$ als Ausdruck der Geschwindigkeit nach der mit CD parallelen Richtung. Dringt der Lichtstrahl bis zu einer meſsbaren Tiefe in das zweite Mittel ein, und bezeichnet man durch k' und α' das, was k und α in einem Punkte A' dieses Mittels werden, der in einem meſsbaren Abstande von CD liegt, so kann man auch die horizontale Geschwindigkeit des Lichtstrahls durch $k' \sin \alpha'$ bezeichnen, so daſs man

$$k \sin \alpha = k' \sin \alpha' \qquad (3)$$

hat.

Man sieht auch a priori, daſs die Trajectorie des Lichtstrahls eine ebene und verticale krumme Linie seyn wird; man braucht daher nur noch seine Geschwindigkeit nach der auf CD senkrechten Richtung zu bestimmen, welche er sowohl in dem oberen als unteren Mittel, in einem beliebigen Abstande z von dieser Oberfläche, hat.

166.

Ich bezeichne diese Geschwindigkeit durch u, so daſs man für beide Mittel $\frac{dz^2}{dt^2} = u^2$ hat. Multipliciert man die Gleichung (1) mit $2dz$, integriert und bezeichnet die willkührliche Constante durch c, so hat man im oberen Mittel

$$u^2 = c + 2\int Z' dz - 2\int Z dz.$$

Ich nehme an, daſs diese beiden Integrale zugleich mit z verschwinden, und bezeichne durch h und h' ihre Werthe in einem meſsbaren Abstande von CD. Es ist erlaubt, diese Integrale h und h' von Null bis zum Unendlichen auszudeh-

nen, denn die Functionen Z und Z' und folglich auch die entsprechenden Theile von $\int Zdz$ und $\int Z'dz'$ sind, über einen meſsbaren Werth hinaus, nach der Voraussetzung, Null oder unmeſsbar. Man kann daher, wenn man will, auch schreiben

$$h = \int_o^\infty Zdz, \quad h' = \int_o^\infty Z'dz.$$

Auſserdem hat man, für einen meſsbaren Werth von z,

$$u^2 = k^2 \cos^2 \alpha,$$

also auch

$$k^2 \cos^2 \alpha = c + 2h' - 2h,$$

und wenn man c aus dem allgemeinen Werthe von u^2 eliminiert, so folgt hieraus

$$u^2 = k^2 \cos^2 \alpha + 2h - 2h' + 2\int Z'dz - 2\int Zdz$$

für einen beliebigen Punkt M.

Ich bezeichne durch k_1 die Geschwindigkeit des Lichtstrahls im Punkte E der Oberfläche CD, und durch α_1 den Winkel, den seine Richtung mit der Verticalen einschlieſst. In diesem Punkte hat man

$$u^2 = k_1^2 \cos^2 \alpha_1,$$

und da er dem Werthe $z = o$ entspricht, so verschwinden die zwei letzten Glieder der vorhergehenden Formel, und man hat

$$k_1^2 \cos^2 \alpha_1 = k^2 \cos^2 \alpha + 2h - 2h'. \qquad (4)$$

Damit der Lichtstrahl die Trennungsfläche der beiden Mittel erreiche, muſs der zweite Theil dieser Gleichung eine positive Gröſse seyn, oder man muſs

$$h' < h + \tfrac{1}{2} k^2 \cos^2 \alpha$$

haben. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, was voraussetzt, daſs die Anziehung des oberen Mittels die des unteren übertrifft, so erschöpft sich die verticale Geschwindigkeit des Lichtstrahls, ehe er noch die Ebene CD erreicht hat. Es giebt alsdann einen Punkt in der Trajectorie, wo die Tangente horizontal seyn wird. In diesem Punkte angelangt, geht der Lichtstrahl wieder zurück, die zwei Zweige dieser krummen Linie, die in diesem Punkte zusammen treffen, werden ähnlich seyn, da sie durch Kräfte beschrieben werden, die für denselben Werth von z gleich sind. Hat dieser Abstand z eine meſsbare Gröſse, so gehen diese zwei Zweige in gerade

Linien über, die gleiche Winkel mit der Verticalen machen, oder, mit anderen Worten, die Reflexions- und Einfallswinkel werden gleich seyn.

Uebertrifft dagegen die Anziehung des unteren Mittels die des oberen, und ist die vorhergehende Bedingung erfüllt, so wird der Lichtstrahl in das zweite Mittel mit einer auf CD senkrechten Geschwindigkeit eindringen, die durch die Gleichung (4) bestimmt ist.

In dieser Voraussetzung hat man, vermöge der Gleichung (2), in Beziehung auf dieses Mittel

$$u^2 = k_1^2 \cos^2\alpha_1 + 2\int Zdz - 2\int Z'dz,$$

indem man noch immer voraussetzt, dafs die Integrale für den Werth $z = o$ ebenfalls Null werden. In einem mefsbaren Abstande von CD hat man $u^2 = k'^2 \cos^2\alpha'$, man hat daher

$$k'^2 \cos^2\alpha' = k_1^2 \cos^2\alpha_1 + 2h - 2h',$$

und wenn man $k_1^2 \cos^2\alpha_1$ vermittelst der Gleichung (4) eliminiert, so hat man

$$k'^2 \cos^2\alpha' = k^2 \cos^2\alpha + 4h - 4h'. \qquad (5)$$

Damit der Lichtstrahl, nachdem er durch die Oberfläche CD gegangen ist, bis zu einer mefsbaren Tiefe in das untere Mittel eindringen könne, ist es folglich hinreichend und nothwendig, dafs man

$$h' < h + \tfrac{1}{4}k^2 \cos^2\alpha$$

habe. Wenn daher h', wiewohl es kleiner als $h + \frac{1}{2}k^2 \cos^2\alpha$ ist, dennoch $h + \frac{1}{4}k^2 \cos^2\alpha$ übertrifft, so kann der Lichtstrahl nur bis zu einer unmefsbaren Entfernung von CD in das zweite Mittel eindringen, er geht alsdann wieder in das erste Mittel zurück, und die beiden Zweige der Trajectorie werden auf beiden Seiten des Punktes, wo er zurück zu gehen anfängt, ähnlich seyn. Das Licht wird daher, wie im vorhergehenden Falle, reflectiert werden, und der Reflexionswinkel dem Einfallswinkel gleich seyn, so dafs es in der Theorie, die wir betrachten, zwei verschiedene Fälle der Reflexion giebt.

167.

Man nehme jetzt an, dafs keiner dieser beiden Fälle statt habe, so dafs der Lichtstrahl gebrochen wird. Nach der Gleichung (3) hat man

$$k'^2 \sin^2 \alpha' = k^2 \sin^2 \alpha,$$

und wenn man die Gleichung (5) und diese gliedweise addiert, so erhält man

$$k'^2 = k^2 + 4h - 4h' \qquad (6)$$

woraus hervorgeht, daſs der Zuwachs des Quadrates der Geschwindigkeit, welchen der Lichtstrahl erhält, indem er vom Punkte A des oberen Mittels zu dem Punkte A' des unteren geht, von dem Wege, den er eingeschlagen hat, unabhängig ist, wie dies auch seyn muſs (§. 157).

Aus den Gleichungen (3) und (6) findet man auch

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 4(h - h')}}, \qquad (7)$$

welche Formel das Gesetz des beständigen Verhältnisses des Brechungswinkels zum Einfallswinkel enthält, und den Werth dieses Verhältnisses, ausgedrückt als Function der Geschwindigkeit k des Lichtes in dem einen Mittel und des Unterschiedes $h - h'$ ihrer Brechungsvermögen h und h' angiebt.

Wenn das untere Mittel von zwei parallelen Ebenen begränzt, und unter ihm dasselbe Mittel ist wie über ihm, so zeigt die Beobachtung, daſs das Licht, nachdem es zwei Brechungen erlitten hat, und durch beide Gränzflächen des mittleren Mittels gegangen ist, eine Richtung annimmt, die der, welche es in dem oberen Mittel hatte, parallel ist. Dies folgt auch aus der Gleichung (7), denn bezeichnet man durch α'' den Winkel, welchen der Lichtstrahl mit der Verticalen einschlieſst, nachdem er aus dem mittleren Mittel herausgetreten ist, so muſs man, um $\sin \alpha''$ zu bestimmen, in dieser Gleichung die Gröſsen h und h' vertauschen, und k', α', α'' für k, α, α' setzen. Man hat daher

$$\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha'} = \frac{k'}{\sqrt{k'^2 + 4(h' - h)}},$$

oder, in Folge der Gleichungen (6) und (7)

$$\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha'} = \frac{\sqrt{k^2 + 4(h - h')}}{k} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'},$$

was wirklich $\alpha'' = \alpha$ giebt.

Die Erscheinung der Zerstreuung des Lichtes, welche entsteht, wenn der Brechungswinkel α' verschiedene Werthe

für die verschieden gefärbten Strahlen hat, aus welchen ein einfallender Lichtstrahl zusammengesetzt ist, kann nach Formel (7) entweder einer Verschiedenheit in ihrer Geschwindigkeit k, oder einer verschiedenen Wirkung jedes Mittels auf diese verschiedenen Strahlen, woraus sich ungleiche Werthe von $h - h'$ ergeben würden, zugeschrieben werden.

168.

Die Gleichung (7) zeigt, dafs, unter sonst gleichen Umständen, das Verhältnifs des Brechungswinkels zum Einfallswinkel mit der Geschwindigkeit des Lichtes sich ändern mufs. Betrachtet man aber einen Stern, der in der Ebene der Ekliptik liegt, so giebt es eine Zeit im Jahre, wo die Geschwindigkeit der Erde zu der des Lichtes hinzu kommt, und eine andere Epoche, wo die erste Geschwindigkeit von der zweiten abgezogen werden mufs, wodurch die Geschwindigkeit des Lichtes, in Beziehung auf ein Mittel, das sich mit der Erde fortbewegt, im ersten Falle wirklich gröfser ist, als im zweiten. Das eben besprochene Verhältnifs müfste daher ebenfalls zu diesen zwei Zeiten verschieden seyn; indessen haben sehr genaue Versuche Arago's gezeigt, dafs dieses Verhältnifs, während eines ganzen Jahres, sich nicht auf eine merkliche Weise ändert, und dafs aufserdem seine Gröfse dieselbe ist, sowohl für die Sonne als für die verschiedenen Sterne, von welchen das Licht ausgegangen ist.

Welche Theorie des Lichtes man auch annimmt, immer bleibt es eine sehr merkwürdige Thatsache, dafs die Verbindung der eigenen Geschwindigkeit des Lichtes mit der der Erde, die sich in der scheinbaren Bewegung der Fixsterne zeigt, welche unter dem Namen der Aberration bekannt ist, dennoch keinen mefsbaren Einflufs auf die Brechung des Lichtes hat, welches uns die Sterne zu verschiedenen Zeiten des Jahres zusenden.

Im leeren Raume ist die Bewegung des directen oder reflectierten Lichtes gleichförmig und seine Geschwindigkeit unabhängig von der Quelle, von welcher es ausgegangen ist. Die Gröfse dieser Geschwindigkeit ist der Art, dafs das Licht in 493,34 Secunden den mittleren Abstand der Sonne von der Erde durchlauft, was 30950 Myriameter für die Secunde giebt.

Ein Lichtstrahl, der von der Sonne oder von einem Sterne ausgeht, mufs wie jeder andere geworfene Körper, eine Verminderung in seiner Geschwindigkeit erleiden, die von seiner Schwere nach diesem Weltkörper hin herrührt, d. h. von der im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Abstandes vom Mittelpunkte wirkenden Anziehung, welche die Masse des Körpers auf jedes materielle Lichttheilchen ausübt, diese Verminderung ist aber ein sehr kleiner Bruch der endlichen Geschwindigkeit des Lichtes. So z. B. da die Intensität der Schwere an der Oberfläche der Sonne 27 $\frac{1}{2}$ mal gröfser ist, als die der Schwere an der Oberfläche der Erde, wie man in der Folge sehen wird, und der Halbmesser der Sonne 110 Halbmessern der Erde gleich ist, so schliefst man aus dem, was man in §. 143 gesehen hat, dafs die Geschwindigkeit des Lichtes, wenn sie in einem grofsen Abstande von der Sonne 30950 Myriameter beträgt, um ungefähr zwei Milliontel gröfser seyn mufste, als sie von der Oberfläche der Sonne ausgieng.

Viertes Kapitel.

Ueber die Centrifugalkraft.

169.

Der Druck, welchen ein materieller Punkt auf eine krumme Linie, die er beschreiben mufs, ausübt, ist nicht derselbe, wie wenn er auf dieser krummen Linie im Gleichgewichte ist. Der Zustand der Bewegung bringt einen besonderen Druck hervor, den man die Centrifugalkraft nennt, weil man ihn zuerst bei dem Kreise betrachtet hat, wo er nach der Verlängerung des Halbmessers gerichtet ist, und beständig den Körper, auf welchen er wirkt, vom Mittelpunkte zu entfernen strebt. Diese Kraft wollen wir nun bei jeder beliebigen krummen Linie betrachten.

Seyen M_1M und MM' (Fig. 43) zwei auf einander folgende und gleiche Elemente der gegebenen krummen Linie, H und H' die Mitten derselben, MT und $M'T'$ ihre Verlängerungen. Ihre Ebene und der Winkel TMT' werden bezüglich die Krümmungsebene und der Contingenzwinkel der krummen Linie am Punkte M seyn, und wenn man in dieser Ebene die Linie MO zieht, welche den Winkel M_1MM' in zwei gleiche Theile theilt, so stellt diese die Richtung des Krümmungshalbmessers für denselben Punkt M dar, so dafs der Punkt O dieser Linie, der Mittelpunkt der Krümmung seyn wird. Man nenne ds das Element M_1M der krummen Linie, welches auch gleich HMH' seyn wird; sey ferner δ der unendlich kleine Winkel TMT' und ϱ der Krümmungshalbmesser MO, so haben wir (§. 18)

$$\delta = \frac{ds}{\varrho}.$$

Dies vorausgesetzt, sehe man zuerst von den gegebenen Kräften ab, die auf den Körper wirken können, und nehme an, dafs er am Ende der Zeit t mit der Geschwindigkeit v im Punkte M ankomme. Wäre er ganz frei, so würde er sich auf MT mit derselben Geschwindigkeit fortbewegen, da er aber, der Voraussetzung gemäfs, gezwungen ist, eine ge-

gebene krumme Linie zu beschreiben, so mufs sich die Richtung seiner Bewegung ändern und wird MT'. Errichtet man aber über MT' die senkrechte Linie MK, die in der Krümmungsebene enthalten ist, und aufserhalb der Concavität der krummen Linie liegt, so kann man statt der Geschwindigkeit v, die nach MT gerichtet ist, zwei andere Geschwindigkeiten setzen, von welchen eine gleich $v \cos \delta$ und nach MT' gerichtet ist, die andere gleich $v \sin \delta$ und nach MK gerichtet ist. Die Wirkung der krummen Linie besteht alsdann darin, dafs diese die letztere dieser beiden Geschwindigkeiten aufhebt, und nur die erstere bestehen läfst, oder, mit anderen Worten, diese Wirkung kommt darauf zurück, dafs sie dem Körper eine Bewegung mittheilt, die gleich $v \sin \delta$ und ihr entgegengesetzt ist. Ersetzt man daher die gegebene krumme Linie durch ein Vieleck von unendlich vielen Seiten, so besteht ihr Widerstand darin, dafs sie dem Körper in jeder Spitze M dieses Vielecks, eine unendlich kleine Geschwindigkeit $v \sin \delta$ mittheilt, deren Richtung der Richtung von MK entgegengesetzt ist.

Um diesen Widerstand einer bewegenden Kraft f, die unaufhörlich auf den Körper wirkt, ähnlich zu machen, können wir annehmen, dafs die Geschwindigkeit $v \sin \delta$ hervorgebracht wird, während dieser materielle Punkt von H nach H' geht, und dt für die Dauer dieser Wirkung nehmen. Auch können wir, in diesem Zeitraume, die Aenderung der Richtung dieser Kraft vernachlässigen und sie z. B. als parallel mit der geraden Linie MO ansehen. Die entsprechende beschleunigende Kraft hat alsdann, wie jede der Kräfte U, U', U'' u. s. w. des §. 147, zu ihrem Mafse, die Geschwindigkeit $v \sin \delta$, welche sie während der Zeit dt hervorbringt, dividiert durch dt, und wenn man m die Masse des Körpers nennt, so folgt hieraus

$$f = \frac{mv \sin \delta}{dt}$$

für den Werth von f. Ersetzt man daher $\sin \delta$ durch δ, nimmt für δ seinen vorhergehenden Werth, und bemerkt, dafs $ds = v dt$, so hat man

$$f = \frac{mv^2}{\rho}.$$

Der Druck, den die krumme Linie erleidet, und welcher blos von dem Zustande der Bewegung des materiellen Punktes welcher dieselbe beschreibt, herrührt, oder die Centrifugalkraft, welche auf den Körper wirkt, ist der Kraft f' gleich und entgegengesetzt. Hieraus folgt, dafs die Centrifugalkraft in einem beliebigen Punkte M der gegebenen krummen Linie in der Krümmungsebene enthalten und aufserhalb der Concavität dieser krummen Linie nach der Verlängerung MN ihres Krümmungshalbmessers gerichtet ist, und dafs ihre Intensität im umgekehrten Verhältnisse dieses Halbmessers und im directen Verhältnisse der Masse des Körpers und des Quadrates seiner Geschwindigkeit steht.

170.

Da diese Geschwindigkeit auf der Seite M_1M gleich v ist, und auf der folgenden geraden Linie MM' gleich $v \cos \delta$ wird, so folgt hieraus, dafs ihre Gröfse nicht durch die krumme Linie geändert wird, denn man kann die Gröfse $v\,(1 - \cos \delta)$, da sie ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung ist, vernachlässigen, indem sie nur eine unendlich kleine Verminderung der Geschwindigkeit, auf einem Theile der krummen Linie, der eine endliche Gröfse hat, hervorbringen könnte. Die Bewegung auf einer beliebigen krummen Linie ist daher einförmig, wenn der Körper durch keine gegebene Kraft getrieben wird.

Dies wurde schon in §. 157 gefunden, wir sehen aber hier noch aufserdem, dafs der Grund hiervon darin liegt, dafs der Contingenzwinkel unendlich klein ist und dafs der Körper in einem Punkte, wo zwei verschiedene krumme Linien sich unter einem endlichen Winkel schneiden würden, einen endlichen Verlust an Geschwindigkeit erleiden würde, wenn er von einer krummen Linie zur anderen übergienge. Dieser Verlust wäre der anfänglichen Geschwindigkeit, multipliciert mit dem Sinus versus dieses Winkels, gleich.

Wird der Körper durch eine oder mehrere gegebene Kräfte getrieben, so ändert sich seine Geschwindigkeit vermöge der Seitenkräfte dieser Kräfte, die nach den Tangenten der Trajectorie gerichtet sind, und die auf der Trajectorie senkrechten Kräfte üben, wie im Zustande der Ruhe, einen

Druck auf diese krumme Linie aus, den man zu der Centrifugalkraft hinzu rechnen mufs.

Sey, im Allgemeinen, mR die Mittelkraft der gegebenen Kräfte, welche auf den Körper wirken, wenn er im Punkte M angelangt ist. Man zerlege diese bewegende Kraft in zwei andere, von welchen die eine die Trajectorie berührt, die andere senkrecht darauf steht; ich bezeichne dieselben durch mT und mQ, die erste ist die Kraft, welche die Geschwindigkeit verändert, die zweite bringt den Theil des Druckes hervor, der von dem Zustande der Bewegung des Körpers unabhängig ist. Nimmt man, nach der Regel des Parallelogramms der Kräfte, die Mittelkraft von mQ und der Centrifugalkraft f oder $\frac{mv^2}{\varrho}$, so hat man, der Gröfse und Richtung nach, den ganzen Druck, der im Punkte M der gegebenen krummen Linie statt hat. Diese Kraft, getheilt durch die Masse des Körpers, oder die Mittelkraft der beschleunigenden Kräfte Q und $\frac{v^2}{\varrho}$, mufs mit der Kraft P des §. 152 zusammen fallen. Es soll sogleich gezeigt werden, dafs dies wirklich der Fall ist.

171.

Ich ersetze die Gleichungen (5) dieses §. durch diejenigen, die man unmittelbar daraus ableiten kann:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dsdt^2} &= Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds} - P\left(\frac{dx}{ds}\cos\Pi' - \frac{dy}{ds}\cos\Pi\right) \\
\frac{dzd^2x - dxd^2z}{dsdt^2} &= X\frac{dz}{ds} - Z\frac{dx}{ds} - P\left(\frac{dx}{ds}\cos\Pi - \frac{dx}{ds}\cos\Pi''\right) \\
\frac{dyd^2z - dzd^2y}{dsdt^2} &= Z\frac{dy}{ds} - Y\frac{dz}{ds} - P\left(\frac{dy}{ds}\cos\Pi'' - \frac{dz}{ds}\cos\Pi'\right)
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Wie auch die unabhängige Veränderliche beschaffen sey, immer hat man

$$\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} \cdot \frac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{dt} dt,$$

und zu gleicher Zeit

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{ds^2} \cdot \frac{ds^2}{dt^2}, \quad \frac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{dt} = \frac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt};$$

da $v = \frac{ds}{dt}$, so folgt hieraus

$$\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dsdt^2} = v^2 \frac{dx^2}{ds^2} \frac{d.\frac{dy}{dx}}{ds} = \frac{v^2(dxd^2y - dyd^2x)}{ds^3}$$

und ebenso findet man

$$\frac{dzd^2x - dxd^2z}{dsdt^2} = \frac{v^2(dzd^2x - dxd^2z)}{ds^3}$$

$$\frac{dyd^2z - dzd^2y}{dsdt^2} = \frac{v^2(dyd^2z - dzd^2y)}{ds^3}.$$

Bezeichnet man durch q, q', q'' die Winkel, welche die Kraft Q mit den Linien einschliefst, die den Axen der x, y, z parallel sind, und bemerkt man, dafs X, Y, Z die Seitenkräfte von Q und der Tangentialkraft T nach diesen Parallelen sind, so hat man auch

$$X = T\frac{dx}{ds} + Q\cos q, \quad Y = T\frac{dy}{ds} + Q\cos q', \quad Z = T\frac{dz}{ds} + Q\cos q'',$$

und vermittelst dieser Werthe und der vorhergehenden, werden die Gleichungen (1)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{v^2(dxd^2y - dyd^2x)}{ds^3} &= Q\left(\frac{dx}{ds}\cos q' - \frac{dy}{ds}\cos q\right) - P\left(\frac{dx}{ds}\cos \Pi' - \frac{dy}{ds}\cos \Pi\right)\\
\frac{v^2(dzd^2x - dxd^2z)}{ds^3} &= Q\left(\frac{dz}{ds}\cos q - \frac{dx}{ds}\cos q''\right) - P\left(\frac{dz}{ds}\cos \Pi - \frac{dx}{ds}\cos \Pi''\right)\\
\frac{v^2(dyd^2z - dzd^2y)}{ds^3} &= Q\left(\frac{dy}{ds}\cos q'' - \frac{dz}{ds}\cos q'\right) - P\left(\frac{dy}{ds}\cos \Pi'' - \frac{dz}{ds}\cos \Pi'\right)
\end{aligned}\right\} 2)$$

Nennt man aber γ, γ', γ'' die Winkel, welche die Richtung der Centrifugalkraft, d. h. die Verlängerung MN des Krümmungshalbmessers MO, mit den Linien, die durch den Punkt M den Axen der x, y, z parallel gezogen sind, bildet, und x', y', z' die Coordinaten des Mittelpunktes der Krümmung O, so hat man

$$x - x' = \varrho \cos\gamma, \quad y - y' = \varrho\cos\gamma', \quad z - z' = \varrho\cos\gamma'',$$

und verbindet man die Gleichungen (2) mit den Formeln des §. 20, so findet man daraus ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned}
\frac{v^2}{\varrho}\cos\gamma = Q&\left[\frac{dy}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\cos q' - \frac{dy}{ds}\cos q\right) - \frac{dz}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\cos q - \frac{dx}{ds}\cos q''\right)\right]\\
-P&\left[\frac{dy}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\cos \Pi' - \frac{dy}{ds}\cos \Pi\right) - \frac{dz}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\cos \Pi - \frac{dx}{ds}\cos \Pi''\right)\right],
\end{aligned}$$

$$\frac{v^2}{\varrho}\cos\gamma' = Q\left[\frac{dz}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\cos q'' - \frac{dz}{ds}\cos q'\right) - \frac{dx}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\cos q' - \frac{dy}{ds}\cos q\right)\right]$$
$$- P\left[\frac{dz}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\cos \Pi'' - \frac{dz}{ds}\cos \Pi'\right) - \frac{dx}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\cos \Pi' - \frac{dy}{ds}\cos \Pi\right)\right]$$
$$\frac{v^2}{\varrho}\cos\gamma'' = Q\left[\frac{dx}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\cos q - \frac{dx}{ds}\cos q''\right) - \frac{dy}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\cos q'' - \frac{dz}{ds}\cos q'\right)\right]$$
$$- P\left[\frac{dx}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\cos \Pi - \frac{dx}{ds}\cos \Pi''\right) - \frac{dy}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\cos \Pi'' - \frac{dz}{ds}\cos \Pi'\right)\right]$$

Da aber die Kräfte P und Q auf der Tangente der Trajectorie senkrecht stehen, so hat man

$$\frac{dx}{ds}\cos q + \frac{dy}{ds}\cos q' + \frac{dz}{ds}\cos q'' = o$$
$$\frac{dx}{ds}\cos \Pi + \frac{dy}{ds}\cos \Pi' + \frac{dz}{ds}\cos \Pi'' = o,$$

wodurch sich die Coefficienten von Q, in den drei vorhergehenden Gleichungen, in

$$-\cos q,\quad -\cos q',\quad -\cos q'',$$

und die von $-P$ in

$$-\cos \Pi,\quad -\cos \Pi',\quad -\cos \Pi''$$

verwandeln, also hat man zuletzt

$$\frac{v^2}{\varrho}\cos\gamma + Q\cos q = P\cos\Pi$$
$$\frac{v^2}{\varrho}\cos\gamma' + Q\cos q' = P\cos\Pi'$$
$$\frac{v^2}{\varrho}\cos\gamma'' + Q\cos q'' = P\cos\Pi''$$

woraus man sieht, wie bewiesen werden sollte, dafs die Kraft P, der Gröfse und Richtung nach, die Mittelkraft der beiden Kräfte $\frac{v^2}{\varrho}$ und Q ist.

172.

Wenn der Körper blos gezwungen ist, sich auf einer gegebenen Oberfläche zu bewegen, so mufs die Mittelkraft der bewegenden Kräfte mQ und $\frac{mv^2}{\varrho}$, welche schon auf der Trajectorie senkrecht steht, auch auf dieser Oberfläche senkrecht stehen. Nennt man daher mN diese Mittelkraft, und

bezeichnet man durch ω und ψ die spitzen oder stumpfen Winkel, welche ihre beiden Seitenkräfte mit einem bestimmten Theile der Linie, die auf der Oberfläche senkrecht steht, im Punkte, wo der Körper sich befindet, einschliefst, so hat man

$$N = \pm \left(Q \cos \omega + \frac{v^2}{\varrho} \cos \psi\right).$$

Die Kraft N wirkt nach diesem Theile der Normalen oder nach seiner Verlängerung, je nachdem die in Klammern eingeschlossene Gröfse positiv oder negativ ist, und damit N immer eine positive Gröfse sey, nimmt man im ersten Falle das obere und im zweiten das untere Zeichen. Diese beschleunigende Kraft N mufs daher derjenigen, welche in den Gleichungen (3) des §. 151 vorkommt, gleich und entgegengesetzt seyn, und da diese sich nur darin von den Gleichungen (5) des §. 152 unterscheiden, dafs sie N, λ, μ, ν statt $-P, \Pi, \Pi', \Pi''$ enthalten, so kann man aus denselben, nach der vorhergehenden Analyse, die Seitenkräfte der Kraft N ableiten, welche denjenigen, die man für die Kraft P gefunden hat, gleich und entgegengesetzt sind.

Bezeichnet man in demselben Falle, wo eine Oberfläche gegeben ist, durch ω' und ψ' die Winkel, welche die Kräfte mQ und $\frac{mv^2}{\varrho}$ mit einer Axe bilden, die durch den Punkt gezogen ist, wo sich der Körper befindet, diese Oberfläche berührt, und auf der Trajectorie senkrecht steht, so dafs man

$$\cos^2\omega + \cos^2\omega' = 1, \quad \cos^2\psi + \cos^2\psi' = 1$$

hat, so mufs die Summe der Seitenkräfte dieser zwei Kräfte, die nach dieser berührenden Axe gerichtet sind, gleich Null seyn, weil ihre Mittelkraft auf demselben Punkte der Oberfläche senkrecht steht, man hat daher

$$Q \cos \omega' + \frac{v^2}{\varrho} \cos \psi' = o,$$

welche Gleichung dazu dienen kann, die Neigung ψ' der Krümmungsebene der Trajectorie gegen die berührende Ebene der gegebenen Oberfläche zu bestimmen.

Wenn der Körper keiner gegebenen Kraft unterworfen ist, oder, allgemeiner ausgedrückt, wenn er nur einer Kraft unterworfen ist, welche die Trajectorie berührt, so hat man

$Q = o$, hieraus folgt also $\cos \psi' = o$ und $\psi' = 90$, so dafs die Krümmungsebene dieser krummen Linie immer auf der gegebenen Oberfläche senkrecht steht. Da diese Eigenschaft im Allgemeinen, die der kürzesten Linie zwischen zwei gegebenen Punkten auf dieser Oberfläche ist, so beschreibt der Körper eine solche Linie, wie dies schon früher gesagt worden ist (§. 161); jetzt aber sehen wir aufserdem, dafs eine Kraft, welche nach der Tangente der Trajectorie gerichtet ist, wie eine Reibung gegen die gegebene Oberfläche oder der Widerstand eines Mittels, den Körper nicht von der kürzesten Linie zwischen dem Punkte, von welchem er ausgeht, und dem, in welchem er ankommt, ablenkt.

173.

Ist endlich der Körper ganz frei, so mufs die auf der Trajectorie senkrecht stehende Seitenkraft der bewegenden Kraft mR, die ihn treibt, mit der Centrifugalkraft $\frac{mv^2}{\varrho}$ im Gleichgewichte seyn, weil in diesem Falle keine krumme Linie oder Oberfläche vorhanden ist, die die senkrechte Mittelkraft dieser beiden Kräfte aufheben könnte. Es mufs daher die Krümmungsebene der Trajectorie diejenige seyn, welche durch die Tangente und die gegebene Richtung der Kraft mR geht; nennt man ϑ den Winkel, den diese Richtung, in einem beliebigen Punkte, mit dem Krümmungshalbmesser MO einschliefst, so mufs aufserdem dieser Winkel spitz seyn, wenn die senkrechte Seitenkraft der Kraft mR im entgegengesetzten Sinne der Centrifugalkraft wirken soll, die nach MN gerichtet ist. Dies vorausgesetzt, mufs man

$$R \cos \vartheta = \frac{v^2}{\varrho} \qquad (a)$$

haben.

Ist die beschleunigende Kraft R, welche den Körper treibt, eine Centralkraft, die nach einem bekannten Punkte gerichtet ist, und hat man durch Beobachtung die krumme Linie kennen gelernt, die er um diesen festen Punkt beschreibt, so kann man daraus die Gleichung dieser krummen Linie, den Krümmungshalbmesser ϱ und den Winkel ϑ, den dieser mit der Richtung der Kraft R einschliefst, ableiten; auch kann man

aus dieser Gleichung und der Eigenschaft, daſs die Flächen den Zeiten proportional sind (§. 155), den Werth der Geschwindigkeit v in einem beliebigen Punkte der Trajectorie ableiten. Die Gleichung (a) bestimmt daher den Werth von R, oder das Gesetz der Centralkraft, vermöge welcher der Körper die gegebene krumme Linie beschreibt. Auf diese Weise hat Newton das Gesetz der Kraft entdeckt, die nach dem Mittelpunkte der Sonne gerichtet ist, und vermöge welcher jeder Planet eine Ellipse beschreibt, von welcher dieser Punkt ein Brennpunkt ist. In der Folge wird man aber sehen, daſs diese Bestimmung, indem man von denselben Angaben ausgeht, durch eine einfachere Rechnung gefunden werden kann.

174.

Huyghens, dem man das Maſs der Centrifugalkraft verdankt, hat dieses aus der Betrachtung der Kreisbewegung abgeleitet, und wiewohl diese Methode weniger direct ist, als die vorhergehende, so glaube ich, daſs es dennoch nützlich ist, sie hier mit wenigen Worten aus einander zu setzen.

Sey M (Fig. 44) ein materieller Punkt, der durch einen unausdehnbaren Faden CM mit einem festen Punkte C verbunden ist; man nehme an, es hätte ihm ein Stoſs eine Geschwindigkeit a mitgetheilt, nach einer Richtung, die auf der Länge des Fadens senkrecht ist, und um die Frage zu vereinfachen, nehme man an, daſs keine gegebene Kraft auf den Körper wirke. Dieser materielle Punkt beschreibt einen Kreis AMB, dessen Mittelpunkt und Halbmesser der feste Punkt und die Länge des Fadens ist. Während dieser Bewegung erleidet der Faden, der den Körper zurückhält, nach der Richtung seiner Länge, eine gewisse Spannung, die nichts Anderes als die Centrifugalkraft ist. Bringt man eine Kraft an den Körper an, die dieser Spannung gleich und beständig nach dem festen Mittelpunkte gerichtet ist, so kann man den Faden ganz auſser Acht lassen, und den Körper als einen völlig freien ansehen. Es wird daher der Kreis, vermöge dieser Kraft, deren Gröſse unbekannt ist, in Verbindung mit der Geschwindigkeit a, beschrieben.

Hieraus folgt zuerst, daſs die Kreisausschnitte, welche durch den Halbmesser beschrieben werden, den Zeiten pro-

portional sind (§. 155), was zur nothwendigen Folge hat, dafs dies auch bei den durchlaufenen Kreisbogen der Fall ist. Die Kreisbewegung ist daher gleichförmig, und wenn man durch s den Bogen bezeichnet, der in der Zeit t beschrieben wird, so hat man $s = at$.

Sey m die Masse des Körpers, $m\alpha$ die Centralkraft, und daher α die beschleunigende Kraft, die bestimmt werden soll. Wie auch diese Kraft beschaffen sey, so kann man sie als eine, die, der Gröfse und Richtung nach, während eines unendlich kleinen Zeitraums constant ist, betrachten; während daher der Körper den unendlich kleinen Kreisbogen MM' beschreibt, wird die Kraft α als eine constante betrachtet, die dem Halbmesser CM, der zum Anfangspunkte dieses Bogens gezogen ist, parallel ist. Hieraus schliefst man, dafs, wenn der Körper nicht durch die Geschwindigkeit a getrieben würde, er vermöge der Centralkraft, in einer unendlich kleinen Zeit, den Sinus versus MN, oder die Projection des Bogens MM', den er wirklich beschreibt, auf CM, beschreiben würde. Jede beschleunigende Kraft wird aber durch das Doppelte des unendlich kleinen Raumes gemessen, den ein Körper vermöge ihrer in einer unendlich kleinen Zeit durchlauft, dividiert durch das Quadrat dieser Zeit (§. 118); nennt man daher ε den Sinus versus MN, und τ die Zeit, welche der Körper braucht, um den Bogen MM' zu beschreiben, so hat man

$$\alpha = \frac{2\varepsilon}{\tau^2},$$

bezeichnet man aber diesen Bogen durch σ, und den Halbmesser CM durch r, so hat man

$$\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2r},$$

indem man den Bogen statt der Sehne nimmt, und da $\sigma = a\tau$ ist, so hat man

$$\alpha = \frac{a^2}{r}.$$

Dieser Werth von α ist daher der der Centrifugalkraft auf die Einheit der Masse bezogen, in einem Kreise, der mit gleichförmiger Bewegung beschrieben wird. Hieraus schliefst man unmittelbar, dafs diese Kraft, in einer beliebigen krummen Linie, das Quadrat der Geschwindigkeit, dividiert durch

den Krümmungshalbmesser, zum Maſse hat. Denn da die Trajectorie zwei auf einander folgende Elemente mit ihrem Krümmungskreise gemeinschaftlich hat, so kann man annehmen, daſs der Körper sich während einer unendlich kleinen Zeit um den Mittelpunkt der Krümmung in einem Kreise bewegt, und daher die Centrifugalkraft hat, die dieser Bewegung zukommt. Multipliciert man diese beschleunigende Kraft durch m, so hat man denselben Werth wie für die Kraft, die in §. 169 durch f bezeichnet worden ist.

175.

Um die Centrifugalkraft im Kreise mit der Schwerkraft zu vergleichen, nehme man an, die Geschwindigkeit a gehöre zu der Höhe h, so daſs man $a^2 = 2gh$ hat (§. 130), indem man durch g die Schwere bezeichnet, hieraus folgt

$$\frac{\alpha}{g} = \frac{2h}{r},$$

woraus hervorgeht, daſs die Centrifugalkraft sich zur Schwerkraft verhält, wie das Doppelte der Höhe, die zu der Geschwindigkeit des Körpers gehört, zu dem Halbmesser.

Wenn die Dimensionen des Körpers im Verhältnisse zu seinem Abstande vom Punkte C sehr klein sind, so kann man den Werth von α als beinahe in seiner ganzen Ausdehnung constant ansehen, und das Verhältniſs $\frac{\alpha}{g}$ für das der Centrifugalkraft, die von der Kreisbewegung herrührt, zum Gewichte des Körpers, auf welchen sie wirkt, nehmen.

Wenn die Bewegung nicht in einer horizontalen Ebene statt hat, so sind die Geschwindigkeit des Körpers, die Centrifugalkraft und die Spannung des Fadens, der an den Punkt C befestigt ist, veränderlich. Man nehme an, der Körper bewege sich in einer verticalen Ebene, bezeichne durch $2gh$ das Quadrat seiner Geschwindigkeit, wenn er sich in der horizontalen Ebene befindet, die durch den Punkt C geht, und nenne, für einen gewissen Augenblick, z den Abstand von dieser Ebene, der als positiv angesehen wird, wenn sich der Körper unter derselben, und als negativ, wenn er sich über derselben befindet. Für diesen Augenblick ist $2g(h+z)$

das Quadrat seiner Geschwindigkeit (§. 159) und $\frac{2mg(h+z)}{r}$ die Centrifugalkraft. Um die ganze Spannung des Fadens zu haben, muſs man zu dieser Kraft die Seitenkraft des Gewichtes des Körpers hinzu addieren, das nach der Verlängerung seines Halbmessers gerichtet ist, welche Seitenkraft, wie man leicht sieht, gleich $\frac{mgz}{r}$ ist.

Nennt man daher ϑ die ganze Spannung des Fadens in einem beliebigen Augenblicke, so hat man

$$\vartheta = \frac{mg(2h+3z)}{r}.$$

Diese Kraft bezeichnet auch den Druck, welchen der Punkt C in jedem Augenblicke nach der Richtung des Halbmessers erleidet, der nach dem Körper gezogen ist. Sie erreicht ihr Maximum, wenn der Körper im tiefsten Punkte des Kreises ist, wo man $z = r$ hat, und ihr Minimum, wenn sie im höchsten Punkte ist, wo man $z = -r$ hat. Ist h kleiner wie $\frac{3r}{2}$, so wird die Spannung negativ, und geht während eines Theils der Bewegung in eine Zusammenziehung über, alsdann muſs der Faden unausdehnbar seyn, damit die Kreisbewegung statt habe. Man vernachlässigt, bei dieser Berechnung, das Gewicht und die Centrifugalkraft des Fadens, was voraussetzt, daſs seine Masse im Verhältnisse zu der des Körpers sehr klein ist. In der Folge wird man sehen, wie man darauf Rücksicht nehmen müſste, wenn es nöthig seyn sollte.

176.

Ich komme jetzt auf die gleichförmige Kreisbewegung zurück, und bezeichne durch T die Zeit, welche der Körper braucht, um den ganzen Kreis zu durchlaufen. Man hat

$$a = \frac{2\pi r}{T},$$

und daher

$$\alpha = \frac{4\pi^2 r}{T^2},$$

woraus hervorgeht, daſs die Centrifugalkraft im directen Verhältnisse des Halbmessers des Kreises, und im umgekehrten

Verhältnisse des Quadrates der Zeit einer ganzen Umdrehung steht.

Wenn ein fester Körper sich um eine feste Axe dreht, so beschreiben alle seine Punkte, in derselben Zeit, Kreise, deren Ebenen senkrecht auf der Axe sind, deren Mittelpunkte in dieser Axe liegen und deren Halbmesser die senkrechten Linien sind, die von jedem Punkte auf diese Axe gefällt sind. Die Centrifugalkräfte dieser verschiedenen Punkte verhalten sich daher zu einander, wie diese senkrechten Linien. So z. B. ist die Centrifugalkraft der Körper, die sich an der Oberfläche der Erde befinden, und sich mit ihr um die Axe der Pole drehen, den Halbmessern der Parallelkreise, die sie beschreiben, proportional, und aufserdem ist diese Kraft, an jedem Punkte der Erde, nach der Verlängerung des Halbmessers des Parallelkreises gerichtet, welcher nach diesem Punkte gezogen ist.

177.

Die Kraft, welche die Körper zur Erde treibt, und die wir das Gewicht nennen, kommt vorzüglich von der Anziehung her, die das Erdsphäroid auf den Körper ausübt. Welches aber auch die Ursache sey, soviel ist gewifs, dafs die Centrifugalkraft dieses Streben der schweren Körper zu vermindern sucht, so dafs mit Ausnahme des Pols, wo die Centrifugalkraft Null ist, das Gewicht überall geringer ist, als wenn die Erde keine Umdrehungsbewegung hätte. Am Aequator sind die Centrifugalkraft und das Gewicht einander entgegen gesetzt gerichtet, das Gewicht ist also dort dem Ueberschufs der Anziehung der Erde über die Centrifugalkraft gleich. Daher hat man

$$g = G - \frac{4\pi^2 r}{T^2},$$

wo g dieses Gewicht, G die Anziehung der Erde, oder das Gewicht, welches statt haben würde, wenn sich die Erde nicht bewegte, r den Halbmesser des Aequators und T die Zeit der Umdrehung der Erde bedeutet.

Da das zweite Glied in dieser Formel sehr klein im Verhältnifse zum ersten ist, so hat man beinahe

$$g = G\left(1 - \frac{4\pi^2 r}{g\,T^2}\right).$$

Um den Bruch $\frac{4\pi^2 r}{g T^2}$ in Zahlen zu verwandeln, kann man den Halbmesser des Meridians statt des Halbmessers r des Aequators, von welchem er nur wenig verschieden ist, nehmen, alsdann hat man

$$2\pi r = 40000000 \text{ Meter.}$$

Nimmt man die Secunde als Einheit und vernachlässigt bei dieser Rechnung die kleine Aenderung der Schwere an der Oberfläche der Erde, so hat man auch (§. 115)

$$g = 9{,}80896 \text{ Meter.}$$

Aufserdem hat man (§. 111)

$$T = 86164,$$

und hieraus findet man ungefähr

$$\frac{4\pi^2 r}{g T^2} = \frac{1}{289}.$$

Am Aequator wird daher das Gewicht um $\frac{1}{289}$ durch die Umdrehung der Erde um ihre Axe vermindert. Würde diese Bewegung schneller, so würde die Zeit T kleiner werden und die Centrifugalkraft weniger von der Schwerkraft verschieden seyn. Bemerkt man, dafs 289 das Quadrat von 17 ist, so sieht man, dafs es hinreichend wäre, dafs die Umdrehung in dem 17ten Theile eines Tages vollendet würde, damit die Centrifugalkraft am Aequator der Schwerkraft gleich wäre; das Gewicht wäre alsdann dort Null und die Körper würden dort, sich selbst überlassen, im Gleichgewichte bleiben. Bei dieser Berechnung haben wir blos auf die Centrifugalkraft Rücksicht genommen, die von der Umdrehungsbewegung der schweren Körper um die Axe der Erde herrührt. In der That sieht man, dafs die Bewegung um die Sonne, die allen diesen Körpern, der Erde und ihrer Axe gemeinschaftlich ist, auf ihr Bestreben, sich von dieser geraden Linie zu entfernen, keinen Einflufs haben kann. Denkt man sich z. B., dafs ein Faden, der dem Aequator parallel ist, an diese Axe befestigt und zugleich mit einem Körper verbunden sey, der auf der Oberfläche liegt, so kann sich offenbar seine Spannung nicht durch die Wirkung einer Bewegung ändern, die zu gleicher

Zeit die Axe, den Faden uud den Körper forttreibt, ohne ihren wechselseitigen Abstand zu ändern.

178.

Die Centrifugalkraft vermindert das Gewicht an allen Punkten der Oberfläche der Erde, aber um weniger als am Aequator, theils weil die Centrifugalkraft abnimmt, wenn man vom Aequator nach dem Pole geht, theils weil der Winkel, den sie mit der Verticalen einschliefst, zunimmt. Nennt man immer r den Halbmesser des Aequators und bezeichnet durch μ die Breite eines beliebigen Ortes auf der Erde und durch u den Halbmesser des entsprechenden Parallelkreises, so hat man

$$u = r \cos \mu,$$

wenn man auf die Abplattung der Erde keine Rücksicht nimmt, der Winkel μ ist der, welchen die Verlängerung von u oder die Richtung der Centrifugalkraft mit der Verticalen einschliefst; die verticale Seitenkraft der Centrifugalkraft erhält man daher, wenn man ihre Intensität $\frac{4\pi^2 u}{T^2}$ mit $\cos \mu$ multipliciert, wodurch man

$$\frac{4\pi^2 r \cos^2 \mu}{T^2}$$

für die Verminderung des Gewichtes, die von der Umdrehung der Erde herrührt, erhält, und nach dem Vorhergehenden ist der Werth dieser Gröfse

$$\frac{\cos^2 \mu}{289}.$$

Dieses wäre die ganze Verminderung, welche das Gewicht erleiden würde, wenn die Erde eine gleichartige Kugel wäre, sie würde dem Quadrate des Cosinus der Breite proportional seyn, und die ganze Verminderung, vom Pole, wo man $\mu = 90^0$, bis zum Aequator, wo man $\mu = o$ hat, würde $\frac{1}{289}$ betragen. Die Erde ist aber ein an den Polen abgeplattetes Sphäroid, die Anziehung, die sie auf die Körper ausübt, welche sich an ihrer Oberfläche befinden, nimmt deswegen, wenn man vom Pole nach dem Aequator geht, ab. Diese Verminderung ist auch, in jedem Punkte der Oberfläche, dem

Quadrate des Cosinus der Breite proportional, sie verbindet sich mit derjenigen, welche durch die Centrifugalkraft hervorgebracht wird, und hierdurch nimmt der Coefficient $\frac{1}{289}$ zu, und wird ungefähr $\frac{1}{200}$. Dieser Bruch $\frac{1}{200}$ drückt also, wie schon früher bemerkt worden ist (§. 117), den ganzen Zuwachs des Gewichtes des Körpers aus, der vom Aequator nach dem Pole gebracht wird.

Fünftes Kapitel.

Beispiele der Bewegung eines Punktes auf einer gegebenen krummen Linie oder Oberfläche.

I. Schwingungen des einfachen Pendels.

179.

Ein Pendel ist im Allgemeinen ein fester schwerer Körper, der um eine feste horizontale Axe Schwingungen macht. Um aber die Dauer der Schwingungen verschiedener Pendel und die entsprechenden Intensitäten der Schwere leichter vergleichen zu können, haben die Mathematiker ein ideales Pendel erdacht, welches man einfaches Pendel nennt, und das in einem materiellen schweren Punkte besteht, der vermittelst eines unausdehnbaren und unbiegsamen Fadens, der weder Gewicht noch Dichtigkeit hat, und dessen Länge die dieses Pendels ist, an einem festen Punkte aufgehängt ist.

In einem anderen Kapitel wird man sehen, dafs es immer ein einfaches Pendel giebt, dessen Schwingungen, sowohl der Dauer als der Weite nach, mit denen eines beliebigen Pendels zusammen fallen, und wir werden zeigen, wie die Länge des ersten nach der Gestalt und den Dimensionen des zweiten bestimmt werden kann. Auch wird sich ergeben, dafs, wenn diese Uebereinstimmung unter den Bewegungen beider Pendel im leeren Raume statt hat, er auch noch in einem widerstehenden Mittel bestehen wird, wie auch die Function der Geschwindigkeit beschaffen sey, die den Widerstand ausdrückt. So ist es hinreichend, die Bewegung des einfachen Pendels sowohl im leeren Raume, als auch in einem widerstehenden Mittel, zu betrachten, und dies soll in diesem ersten Abschnitte geschehen.

180.

Sey C (Fig. 45) der Anfangspunkt, CB die Verticale, welche durch diesen festen Punkt geht, und CA die anfängliche Lage des Punktes. Man nehme an, dafs der materielle

Punkt, der sich am Ende dieses Pendels befindet, vom Punkte A mit einer Geschwindigkeit k ausgehe, die senkrecht auf CA steht und in der Ebene, die durch die geraden Linien CA und CB bestimmt wird, enthalten ist. Es ist offenbar, daſs der Punkt nicht aus dieser verticalen Ebene heraustreten und in derselben Kreisbogen beschreiben wird, deren Mittelpunkt C und deren Halbmesser CA ist.

Am Ende einer beliebigen Zeit t, sey M die Lage des Körpers, von den Punkten M und A fälle man auf die Verticale CB die senkrechten Linien MP und AD und setze

$$CP = z, \quad CD = c.$$

Bezeichnet man durch g die Schwere, und durch v die Geschwindigkeit des Körpers im Punkte M, so hat man, im Falle eines leeren Raumes (§. 159),

$$v^2 = k^2 + 2g(z - c),$$

und nennt man s den Bogen AM, den der Körper beschreibt, so daſs $\frac{ds}{dt} = v$ ist, so findet man

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{k^2 + 2g(z - c)}}.$$

Man bezeichne durch ϑ den Winkel MCB, der positiv seyn wird, wenn sich der Winkel auf der linken Seite von CB befindet, wie die gerade Linie CA, und negativ, wenn das Pendel auf der rechten Seite der Verticalen ist. Sey auch α der Winkel ACB oder der anfängliche Winkel von ϑ. Man hat alsdann

$$s = a(\alpha - \vartheta), \quad v = \frac{ds}{dt} = -a\frac{d\vartheta}{dt},$$

indem man durch a die Länge CM oder CA bezeichnet. Zu gleicher Zeit hat man

$$z = a \cos \vartheta, \quad c = a \cos \alpha,$$

und vermittelst dieser Werthe wird der Werth von dt

$$dt = \frac{-a\,d\vartheta}{\sqrt{k^2 + 2ga(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}. \qquad (1)$$

Dies ist die Formel, die genau oder näherungsweise integrirt werden muſs.

181.

Es giebt nur einen Fall, in welchem die Integration unter endlicher Form möglich ist, wenn man nemlich

$$k^2 = 2ga(1 + \cos\alpha)$$

hat, was dann der Fall ist, wenn der Körper mit der Geschwindigkeit, die er erlangt hätte, wenn er von einer Höhe, die gleich ED ist, gefallen wäre, von dem Punkte A ausgeht, wo E den höchsten Punkt des Kreises, den er beschreibt, bezeichnet. Setzt man $\vartheta = 2\psi$, und bemerkt, dafs

$$1 + \cos 2\psi = 2\cos^2\psi$$

ist, so hat man alsdann

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{d\psi}{\cos\psi}.$$

Ich integriere, bestimme die willkührliche Constante, so dafs $\psi = \frac{1}{2}\alpha$ ist, wenn $t = o$ ist, und setze $\frac{1}{2}\vartheta$ an die Stelle von ψ, so erhält man

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \log. \frac{(1 - \sin\frac{1}{2}\vartheta)(1 + \sin\frac{1}{2}\alpha)}{(1 + \sin\frac{1}{2}\vartheta)(1 - \sin\frac{1}{2}\alpha)}.$$

Fiele der Punkt A mit dem Punkte E zusammen, so hätte man $\alpha = \pi$, wodurch der Werth von t unendlich grofs würde, was auch der Werth des Winkels ϑ wäre. Dies bedeutet, dafs der materielle Punkt den Punkt E nicht verläfst, und wirklich wäre auch, in diesem Falle, seine Anfangsgeschwindigkeit Null und die Tangente am Punkte E horizontal; daher müfste der Körper dort im Gleichgewichte bleiben.

Der Punkt B entspricht dem Werthe $\vartheta = o$, daher hat man in jedem anderen Falle

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \log \frac{1 + \sin\frac{1}{2}\alpha}{1 - \sin\frac{1}{2}\alpha}$$

als Werthe der Zeit, welche der Körper braucht, um den Bogen AB zu durchlaufen. Mit der Geschwindigkeit, die er in diesem Punkte erlangt hat, erhebt er sich auf dem Halbkreise $BA'E$, aber, nach dem, was in §. 159 gezeigt worden ist, brauchte er eine unendlich grofse Zeit, um den Punkt E zu erreichen, was auch wirklich der Fall ist; denn setzt man $\vartheta = -\pi$, so hat man $t = \infty$.

Was auch der Werth der Anfangsgeschwindigkeit k und des Winkels α sey, immer kann die Formel (1) durch die

die elliptischen Functionen integriert werden, so dafs die Zeit der Schwingungen oder der Umdrehungen des Pendels immer vermittelst der für diese Functionen berechneten numerischen Tafeln gefunden werden kann; in der Praxis braucht man jedoch nur die Dauer der sehr kleinen Schwingungen zu wissen, auf deren Betrachtung ich mich daher beschränken werde.

182.

Damit das Pendel nur kleine Schwingungen auf beiden Seiten der Verticalen CB mache, mufs der Winkel α und die Geschwindigkeit k sehr unbeträchtlich seyn. Man kann auch diese Geschwindigkeit völlig gleich Null machen, wenn man den Körper von einem Punkte ausgehen läfst, der ein wenig höher liegt als A, d. h. wenn man den Winkel α hinlänglich vergröfsert. Man wird daher der Allgemeinheit der Frage nicht schaden, wenn man $k = o$ setzt, wodurch die Gleichung (1) in

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{2\cos\vartheta - 2\cos\alpha}} \qquad (2)$$

übergeht.

Nach den bekannten Formeln hat man

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

Da die Winkel α und ϑ, nach der Voraussetzung, sehr klein sind, so vernachlässige ich ihre vierten Potenzen, hieraus folgt einfach

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}}.$$

Integriert man, und bemerkt, dafs $\vartheta = \alpha$ ist, wenn $t = o$ ist, so findet man hieraus

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \text{arc.}\left(\cos = \frac{\vartheta}{\alpha}\right),$$

und hieraus ergiebt sich

$$\vartheta = \alpha \cos t\sqrt{\frac{g}{a}}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -\alpha\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \sin t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Diese Formeln zeigen, in Uebereinstimmung mit dem, was man schon (§. 159) gesehen hat, daſs das Pendel eine unbestimmte Anzahl von gleichen und gleichzeitigen Schwingungen auf beiden Seiten der Verticalen CB machen wird. Es kommt, mit der Geschwindigkeit Null, nach dem Punkte A, wo man $\vartheta = \alpha$ hat, zurück, so oft $t\sqrt{\frac{g}{a}}$ ein Vielfaches von 2π ist, und zu dem Punkte A', der in derselben Höhe wie A liegt und wo man $\vartheta = -\alpha$ hat, so oft ϑ ein ungerades Vielfaches von π ist. Nennt man T die Zeit, welche es braucht, um von einem dieser äuſsersten Punkte nach dem anderen zu gehen, d. h. die Zeit einer ganzen Schwingung, so hat man

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Die Dauer jeder zweier halben Schwingungen, einer absteigenden und einer aufsteigenden, ist dieselbe, und gleich $\frac{1}{2} T$.

Im Allgemeinen wird das Pendel, in zwei Augenblicken, die durch eine Zeit, welche $= T$ ist, getrennt sind, auf beiden Seiten der Verticalen CB, Lagen einnehmen, die gleich weit von dieser Linie entfernt sind, und gleiche aber entgegengesetzte Geschwindigkeiten haben. Denn setzt man $t + T$ an die Stelle von t, in die Werthe von ϑ und $\frac{d\vartheta}{dt}$, so sieht man, daſs sie nur ihre Zeichen ändern.

Das Pendel fällt mit der Verticalen zusammen, wenn man $\vartheta = o$ hat, oder wenn t einem ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2} T$ gleich ist. Hieraus folgt

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \pm \alpha \sqrt{\frac{g}{a}},$$

und daher

$$v = \pm \alpha \sqrt{ga}$$

für die Geschwindigkeit des Pendels im Punkte B. Nennt man b die Höhe DB seines Ausgangspunktes über B, so hat man

$$b = a\,(1 - \cos \alpha) = \tfrac{1}{2}\, a\, \alpha^2,$$

weil man die vierte Potenz von α vernachlässigt. Sieht man von dem Zeichen ab, so ist die Geschwindigkeit, welche das Pendel im tiefsten Punkte erreicht,

$$v = \sqrt{2gb},$$

was, wie dies seyn mufs, die Geschwindigkeit ist, welche zu der Höhe b gehört.

183.

Der Werth von T' ist, wie man sieht, unabhängig vom Winkel α, er besteht noch und ist völlig genau, wenn diese Weite α unendlich klein ist. Würde man daher das Pendel unendlich wenig von der Verticalen entfernen, so würde es, um dahin zurück zu kommen, eine endliche Zeit, die gleich $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ ist, brauchen. Bei dieser Bewegung beschriebe das Pendel einen unendlich kleinen Raum in einer endlichen Zeit, was daher rührt, dafs die Intensität seiner beschleunigenden Kraft unendlich klein ist. Diese Kraft ist nemlich die nach der Tangente der Trajectorie zerlegte Schwerkraft; in der Ausdehnung eines unendlich kleinen Bogens, der bis zum tiefsten Punkte dieser krummen Linie geht, macht aber die Tangente mit der Verticalen einen Winkel, der nur um eine unendlich kleine Gröfse von einem rechten verschieden ist. Der Cosinus dieses Winkels, mit welchem man die Schwerkraft multiplicieren mufs, um die Seitenkraft zu erhalten, ist daher unendlich klein, und also ist auch diese Seitenkraft unendlich klein.

Man kann dieses Resultat auf die Schwingungen eines schweren materiellen Punktes ausdehnen, der sich auf einer gegebenen krummen Linie bewegt, deren Krümmungsebene am tiefsten Punkte B vertical ist. Denn die krumme Linie fällt in einer unendlich kleinen Ausdehnung mit ihrem Krümmungskreise zusammen, und in einer nur sehr kleinen Ausdehnung ist sie wenig von demselben verschieden. Hieraus folgt, dafs, wenn C der Mittelpunkt dieses Kreises ist, die Dauer der sehr kleinen Schwingungen, welche auf dieser krummen Linie zu beiden Seiten des Punktes B ausgeführt werden, dieselbe ist, wie für ein einfaches Pendel, dessen Aufhängepunkt C und dessen Länge der Krümmungshalbmesser CB ist, der diesem Punkte B entspricht. Die sehr kleinen Schwingungen haben also dieselben von ihrer Weite unabhängigen Schwingungen, auf allen verticalen krummen Linien, die in ihrem tiefsten Punkte dieselbe Krümmung haben. Wenn

die Krümmungsebene in diesem Punkte nicht vertical ist, so mufs man in dem Werthe von T die Schwerkraft g durch ihre in dieser Ebene liegende Seitenkraft ersetzen, welche gleich $g \sin i$ ist, wenn man i die Neigung der gegebenen Ebene gegen eine horizontale Ebene nennt.

184.

Wenn der Winkel α eine endliche und nur sehr kleine Gröfse hat, so ist der vorhergehende Werth von T nur ein Annäherungswerth. Denn behält man die vierten Potenzen von α und ϑ in den Werthen von $\cos \alpha$ und $\cos \vartheta$ bei, und substituiert sie in die Formel (2), so hat man

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}\ \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2-\vartheta^2}\,.\,\sqrt{1-\frac{1}{12}(\alpha^2+\vartheta^2)}}.$$

Bei diesem Näherungsgrade mufs man

$$\left[1-\tfrac{1}{12}(\alpha+\vartheta^2)\right]^{-\frac{1}{2}} = 1+\tfrac{1}{24}(\alpha^2+\vartheta^2)$$

nehmen, man hat daher

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2-\vartheta^2}}+\frac{(\alpha^2+\vartheta^2)\,d\vartheta}{24\sqrt{\alpha^2-\vartheta^2}}\right),$$

welche Formel nach den bekannten Regeln integriert werden kann. Integriert man von $\vartheta = \alpha$ bis zu $\vartheta = -\alpha$, um die Dauer T einer ganzen Schwingung zu haben, so findet man

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right),$$

woraus hervorgeht, dafs diese Dauer durch die Gröfse der Schwingungsweite ein wenig vergröfsert wird.

Hieraus folgt, dafs, wenn man n die Anzahl der unendlich kleinen Schwingungen nennt, welche ein Pendel in einer gegebenen Zeit macht, und n' die Anzahl der Schwingungen desselben Pendels in derselben Zeit, für den Fall, dafs ihre Weite α nur sehr klein ist, so hat man

$$n = n'\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right),$$

denn die Zahl n' mufs in demselben Verhältnisse abnehmen, wie die Dauer jeder Schwingung, durch die Gröfse dieser Weite, vergröfsert wird.

185.

Wiewohl man, bei den verschiedenen Anwendungen des Pendels, Sorge trägt, es so einzurichten, daſs die Weite der Schwingungen sehr klein ist, wo alsdann die so eben angegebene Correction hinsichtlich der Gröſse von α hinreichend ist, so ist es dennoch gut, die convergierende Reihe zu kennen, durch welche man die Dauer einer Schwingung ausdrücken kann, wie auch ihre Weite beschaffen sey.

Zu diesem Endzwecke seyen x und β die Sinus versus der Winkel ϑ und α, so daſs man

$$1 - \cos\vartheta = x, \quad 1 - \cos\alpha = \beta$$

hat. Zu gleicher Zeit ist

$$d\vartheta = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}};$$

daher wird die Formel (2)

$$dt = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\beta x - x^2}.\sqrt{1 - \tfrac{1}{2}x}},$$

und um daraus die Dauer $\frac{1}{2}T$ einer halben Schwingung abzuleiten, muſs man von $x = \beta$, welches $\vartheta = \alpha$ entspricht, bis $x = o$, welches $\vartheta = o$ entspricht, integrieren.

Entwickelt man aber nach der Formel des Binomium, so hat man

$$\left(1 - \tfrac{1}{2}x\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1.}{2.}\frac{x}{2} + \frac{1.3.}{2.4.}\frac{x^2}{4} + \frac{1.3.5.}{2.4.6.}\frac{x^3}{8}\ldots;$$

eine Reihe, deren allgemeines Glied

$$\frac{1.3.5\ldots.2n-1}{2.4.6\ldots.2n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

ist, und die immer convergent ist, weil x immer kleiner als 2 ist. Kehrt man daher die Ordnung der Integration um, was erlaubt ist, wenn man zu gleicher Zeit das Zeichen von dt umkehrt, setzt man nachher, wenn n irgend eine ganze Zahl oder Null bedeutet,

$$\int_o^\beta \frac{x^n dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} = A_n,$$

und verdoppelt den Werth von $\frac{1}{2}T$, so folgt hieraus

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(A_0 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}A_1 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{4}A_2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{8}A_3 + \ldots\right)$$

Die Werthe der bestimmten Integrale $A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots$ sind auf die Weise unter einander verbunden, dafs, wenn einer derselben bekannt ist, man hieraus leicht allmälich alle übrigen ableiten kann.

Man hat nemlich identisch

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} = \int \frac{(x - \frac{1}{2}\beta) x^{n-1} dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} + \frac{\beta}{2} \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{\beta x - x^2}}$$

$$\int \frac{(x - \frac{1}{2}\beta) x^{n-1} dx}{\sqrt{\beta x - x^2}}$$

$$= - x^{n-1} \sqrt{\beta x - x^2} + (n-1) \int x^{n-2} \sqrt{\beta x - x^2}\, dx$$

$$\int x^{n-2} \sqrt{\beta x - x^2}\, dx = \beta \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} - \int \frac{x^n dx}{\sqrt{\beta x - x^2}}$$

woraus man findet

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} = - x^{n-1} \sqrt{\beta x - x^2} - (n-1) \int \frac{x^n dx}{\sqrt{\beta x - x^2}}$$

$$+ \frac{(2n-1)\beta}{2} \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{\beta x - x^2}},$$

und daher

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} = - \frac{x^{n-1}}{n} \sqrt{\beta x - x^2} + \frac{(2n-1)\beta}{2n} \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{\beta x - x^2}}$$

An den beiden Gränzen $x = o$ und $x = \beta$ hat man $\sqrt{\beta x - x^2} = o$; geht man zu den bestimmten Integralen über, so hat man daher, vermöge dieser letzten Gleichung,

$$A_n = \frac{(2n-1)\beta}{2n} A_{n-1}$$

Setzt man in dieser Formel allmälich $n = 1, = 2, = 3, \ldots$, so findet man daraus

$$A_1 = \tfrac{1}{2} \beta A_0$$

$$A_2 = \tfrac{3}{4} \beta A_1 = \frac{1.3}{2.4} \beta^2 A_0$$

$$A_3 = \tfrac{5}{6} \beta A_2 = \frac{1.3.5}{2.4.6} \beta^3 A_0$$

u. s. w.; folglich hat man allgemein

$$A_n = \frac{1.3.5.\ldots 2n-1}{2.4.6.\ldots 2n} \beta^n A_0,$$

und was den Werth von A_0 betrifft, so hat man

$$A_0 = \int_0^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} = \pi.$$

Substituiert man die Werthe von A_0, A_1, A_2 ... in den Werth von T, so findet man daraus

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2 \frac{\beta}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{\beta}{2}\right)^3 + \ldots\right]$$

für die Reihe, die bestimmt werden sollte, welcher Ausdruck wirklich convergent ist, da $\frac{1}{2}\beta$ immer kleiner als die Einheit ist.

Vernachlässigt man die vierte Potenz von α, so hat man $\beta = \frac{1}{2}\alpha^2$, alsdann mufs man die Reihe auf ihre zwei ersten Glieder reducieren und der Werth von T fällt mit dem des vorhergehenden Paragraphen zusammen.

186.

Man betrachte jetzt die Bewegung des einfachen Pendels in einem widerstehenden Mittel. Behält man alle vorhergehenden Bezeichnungen bei, so ist die nach der Tangente MT gerichtete Seitenkraft der Schwere, $g \sin \vartheta$, weil der Winkel, den diese gerade Linie mit der Verticalen MN bildet, die Ergänzung des Winkels MCB oder ϑ ist. Man bezeichne durch V die beschleunigende Kraft, die von dem Widerstande herrührt, welche dieser Seitenkraft $g \sin \vartheta$ entgegengesetzt gerichtet ist, und nenne s den Bogen AM, so ist die Gleichung der Bewegung (§. 152)

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g \sin \vartheta - V. \qquad (3)$$

Man kann verschiedene Hypothesen über den Werth von V, wenn er als Function der Geschwindigkeit des Körpers dargestellt werden soll, machen; die einfachste ist die, dafs man ihn dieser Geschwindigkeit proportional setzt, so dafs man

$$V = \frac{g}{k} \frac{ds}{dt}$$

hat, wenn man durch k eine constante gegebene Geschwindigkeit bezeichnet. Auch hat man

$$s = a\,(\alpha - \vartheta), \quad \sin\vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{1.\,2.\,3} + \ldots\,;$$

ist daher ϑ, wie vorher, ein sehr kleiner Winkel, und vernachlässigt man seine dritte Potenz, so wird die Gleichung (3)

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{k}\,\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{g}{a}\,\vartheta = o.$$

Sein vollständiges Integral ist

$$\vartheta = \left(c\cos t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}} + c'\sin t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}}\right)e^{-\frac{gt}{2k}}$$

wenn man durch c und c' die beiden willkührlichen Constanten, durch e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, und zur Abkürzung

$$\sqrt{1 - \frac{ga}{4k^2}} = \gamma$$

setzt. Ich bestimme c und c' durch die Bedingungen, daſs $\vartheta = \alpha$ und $\frac{d\vartheta}{dt} = o$ ist, wenn $t = o$ ist, woraus sich

$$c = \alpha, \quad c' = \frac{\alpha\sqrt{ga}}{2\gamma k}$$

ergiebt. Folglich hat man

$$\vartheta = \alpha\left(\cos t g\sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{\sqrt{ga}}{2\gamma k}\sin t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}}\right)e^{-\frac{gt}{2k}}$$

und wenn man differentiirt,

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\frac{g}{a}}\left(\sin t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}}\right)e^{-\frac{gt}{2k}}$$

für die Formeln, welche, in einem beliebigen Augenblicke, die Lage des Pendels und seine Winkelgeschwindigkeit angeben.

Am Ende jeder Schwingung hat man $\frac{d\vartheta}{dt} = o$, was immer statt hat, so oft $t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}}$ ein Vielfaches von π ist. Hieraus folgt, daſs die Schwingungen, wie im leeren Raume, gleichzeitig sind, und daſs man

$$T = \frac{\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{a}{g}}$$

für die Dauer einer ganzen Schwingung hat, so daſs sie, durch den Widerstand des Mittels, in dem Verhältnisse der Einheit zu dem Bruche γ vergröſsert wird.

Was die Weiten der Schwingungen betrifft, so werden sie immer, wegen der Exponentialgröfse $e^{-\frac{gt}{2k}}$, kleiner. Nennt man α_n die Weite der $n$ten Schwingung, d. h. unter der Voraussetzung, dafs $\vartheta = (-1)^n \alpha_n$ ist, wenn $t = nT$ ist, so folgt hieraus

$$\alpha_n = \alpha e^{-\frac{n\pi\sqrt{ga}}{2\gamma k}}$$

woraus hervorgeht, dafs die auf einander folgenden Weiten eine abnehmende geometrische Reihe bilden, deren Exponent $e^{-\frac{\pi\sqrt{ga}}{2\gamma k}}$ ist.

Diese schwingende Bewegung setzt aber immer voraus, dafs γ eine reelle Gröfse sey, und dies ist auch immer bei den Pendelversuchen der Fall, da das Pendel nie eine sehr beträchtliche Länge hat und seine Dichtigkeit immer im Verhältnisse zu der der Luft, in welcher es sich bewegt, sehr beträchtlich ist; da die Geschwindigkeit k dem Verhältnisse der ersten Dichtigkeit zur zweiten proportional ist, so ist sie im Verhältnisse zu $\frac{1}{2}\sqrt{ga}$ sehr grofs, und daher ist γ eine reelle Gröfse, welche wenig von der Einheit verschieden ist. Ist dagegen $2k < \sqrt{ga}$, so ist γ imaginär, und von der Form $\beta\sqrt{-1}$, wenn man durch β eine reelle Gröfse bezeichnet; nach den bekannten Formeln würden die Sinus und Cosinus, die in dem Ausdrucke von ϑ vorkommen, in Exponentialgröfsen übergehen, und nachdem man diese Verwandlung vorgenommen hat, würde man sehen, dafs der Winkel ϑ nur nach einem unendlich grofsen Zeitraume Null werden kann, so dafs sich das Pendel immer mehr der Verticalen CB nähern würde, ohne über diese Linie hinaus gehen oder sie nur erreichen zu können.

187.

So wie die Weiten der Schwingungen abnehmen, so nähern sie sich, wie die Erfahrung lehrt, immer mehr dem Zustande, wo sie in geometrischer Progression abnehmen; sie entfernen sich z. B. nur wenig davon, wenn der Winkel α ein Drittel eines Grades oder darunter ist. Die Erfahrung

zeigt aufserdem, dafs diese Abnahme sehr langsam ist; so wurde bei einem Versuche Borda's, wo die Abnahme fast in geometrischer Progression geschah, die Weite erst nach 1800 Schwingungen auf ungefähr zwei Drittel reduciert. Wendet man den Ausdruck für α_n auf dieses Beispiel an, so hat man daher

$$e^{-\frac{1800\,\pi\sqrt{ga}}{2\gamma k}} = \tfrac{2}{3},$$

und daher

$$\frac{1800\,\pi\sqrt{ga}}{2k} = \gamma \log \tfrac{3}{2} = \gamma\,(0{,}40546),$$

man hat aber

$$\frac{ga}{4k^2} = 1 - \gamma^2,$$

also

$$(1800)^2\,\pi^2\,(1-\gamma^2) = \gamma^2\,(0{,}40546)^2,$$

und hieraus findet man

$$\gamma = 1{,}000000000257\ldots$$

oder beinahe $\gamma = 1$, was also erlaubt, den Widerstand der Luft bei Berechnung des Werthes von T zu vernachlässigen.

Man kann daher annehmen, dafs der Widerstand der Luft, wenn die Schwingungen sehr klein sind, der Geschwindigkeit proportional ist, wie wir es angenommen haben und dafs dieser Widerstand keinen merklichen Einflufs auf die Dauer der Schwingungen hat. Wenn aber die Weiten ein wenig beträchtlich sind, so zeigt die Beobachtung, dafs sie nicht mehr in geometrischer Progression abnehmen, so dafs man alsdann eine andere Hypothese über das Gesetz des Widerstandes machen mufs.

188.

Man nehme an, diese Kraft sey dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional und setze

$$V = \frac{g}{k^2}\,\frac{ds^2}{dt^2},$$

wo k eine beständige gegebene Geschwindigkeit ist, die immer sehr grofs seyn wird, so dafs, wenn man

$$\frac{2ga}{k^2} = \mu$$

setzt, μ ein sehr kleiner Bruch seyn wird. Da $ds = -a d\vartheta$, so wird die Gleichung (3)

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{a}\sin\vartheta = \tfrac{1}{2}\mu\,\frac{d\vartheta^2}{dt^2} \qquad (4)$$

multipliciert man mit $2d\vartheta$, integriert, und setzt

$$\int \frac{d\vartheta^2}{dt^2}\,d\vartheta = y, \quad \frac{d\vartheta^2}{dt^2} = \frac{dy}{d\vartheta},$$

so hat man

$$\frac{dy}{d\vartheta} - \frac{2g}{a}\cos\vartheta - \mu y = o.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung der ersten Ordnung, deren vollständiges Integral

$$y = ce^{\mu\vartheta} + \frac{2g(\sin\vartheta - \mu\cos\vartheta)}{(1+\mu^2)a}$$

ist, wo c die willkührliche Constante und e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Ich differentiiere in Beziehung auf ϑ, und setze $\frac{d\vartheta^2}{dt^2}$ an die Stelle von $\frac{dy}{d\vartheta}$, so ergiebt sich

$$\frac{d\vartheta^2}{dt^2} = \mu ce^{\mu\vartheta} + \frac{2g(\cos\vartheta + \mu\sin\vartheta)}{(1+\mu^2)a},$$

was ein erstes Differential der Gleichung (4) in geschlossener Form ist.

Um c zu bestimmen, nehme ich an, es sey, wie früher $\frac{d\vartheta}{dt} = o$, wenn $\vartheta = \alpha$ ist, hieraus folgt

$$\mu c = -\frac{2g(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{(1+\mu^2)a}\,e^{-\mu\alpha}$$

Man hat daher, für einen beliebigen Augenblick,

$$\frac{d\vartheta^2}{dt^2} = \frac{2g}{(1+\mu^2)a}\left[\cos\vartheta + \mu\sin\vartheta - (\cos\alpha + \mu\sin\alpha)e^{-\mu(\alpha-\vartheta)}\right]. \qquad (5)$$

Am tiefsten Punkte, wo $\vartheta = o$ ist, hat man daher

$$\frac{a^2d\vartheta^2}{dt^2} = \frac{2ga}{1+\mu^2}\left[1 - (\cos\alpha + \mu\sin\alpha)e^{-\mu\alpha}\right]$$

für das Quadrat der erlangten Geschwindigkeit welche offenbar kleiner, als im leeren Raume ist.

Vermöge dieser Geschwindigkeit, wird das Pendel auf dem Bogen BA' bis zu einem Punkte A_1 aufsteigen, der

tiefer als A' liegt, und für welchen man $\frac{d\vartheta}{dt} = o$ hat. Bezeichnet man durch $-\alpha_1$ den entsprechenden Werth von ϑ, so folgt hieraus

$$(\cos\alpha_1 - \mu\sin\alpha_1)\, e^{\mu\alpha_1} = (\cos\alpha + \mu\sin\alpha)\, e^{-\mu\alpha}$$

und entwickelt man die Exponentialgröfse nach Potenzen von μ, und vernachlässigt das Quadrat dieses sehr kleinen Bruches, so hat man

$$\cos\alpha_1 - \mu(\sin\alpha_1 - \alpha_1\cos\alpha_1) = \cos\alpha + \mu(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha).$$

Der Werth von α_1, den man aus dieser Gleichung findet, wird nur sehr wenig von α verschieden seyn, ich setze daher $\alpha_1 = \alpha - \delta$, und vernachlässige das Quadrat von δ und das Produkt $\mu\delta$, so ergiebt sich

$$\delta\sin\alpha = 2\mu(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha),$$

so dafs man

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{2\mu}{\sin\alpha}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$$

als Werth von ϑ, abgesehen von dem Zeichen, am Ende der ersten Schwingung hat.

Dieses Resultat setzt nur voraus, dafs die Schwingungen sehr klein sind, wenn sie aber so klein sind, dafs man die vierte Potenz von α in diesem Werthe von α_1 vernachlässigen kann, so reduciert es sich auf

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{2\mu\alpha^2}{3}.$$

Ist das Pendel im Punkte A_1 angekommen, so geht es wieder zurück, und setzt so seine Schwingungen auf beiden Seiten des Punktes B fort, bis die Weiten seiner Schwingungen fast Null geworden sind. Nennt man α_2 die Weite der zweiten aufsteigenden halben Schwingung, so kann man sie offenbar aus α_1 ableiten, wie man dieses aus α abgeleitet hat, so dafs man

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{2\mu\alpha_1^2}{3}$$

hat. Und ebenso wenn α_3, α_4 u. s. w. die auf einander folgenden Weiten der anderen aufsteigenden halben Schwingungen sind, so hat man

$$\alpha_3 = \alpha_2 - \frac{2\mu\alpha_2^2}{3}, \quad \alpha_4 = \alpha_3 - \frac{2\mu\alpha_3^2}{3} \text{ u. s. w.}$$

woraus hervorgeht, daſs nun die Weiten nicht mehr, wie in dem Falle, wenn der Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist, in einer geometrischen Progression abnehmen.

189.

Um die Zeit zu bestimmen, die einem Winkel ϑ entspricht, muſs man den Werth von dt integrieren, den man aus der Gleichung (5) findet, was immer nach der Methode der Quadraturen möglich seyn wird, wenn die numerischen Werthe von α, μ, ϑ gegeben sind. Im Falle, wenn das Pendel nur kleine Schwingungen macht, kann man aber den Werth von ϑ als Function von t und umgekehrt, in einer convergierenden Reihe ausgedrückt, erhalten.

Ich nehme immer an, daſs die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers gleich Null ist, alsdann wird der Werth von ϑ in einem gewissen Augenblicke eine Function von t und α seyn, die, in dem Falle, wenn $\alpha = o$ ist, Null werden muſs; ich bezeichne ihn daher durch

$$\vartheta = \alpha\vartheta_1 + \alpha^2\vartheta_2 + \alpha^3\vartheta_3 + \ldots$$

wo ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ... Coefficienten sind, die nicht von α abhängen. Substituiert man diese Werthe in die Gleichung (4), entwickelt die beiden Theile der Gleichung nach den Potenzen von α, und setzt alsdann die Coefficienten gleicher Potenzen einander gleich, so kann man eine Reihe von Differentialgleichungen zweiter Ordnung bilden, die dazu dienen werden, die unbekannten Gröſsen ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 ... zu bestimmen. Auſserdem ist es nothwendig, damit man $\vartheta = \alpha$ und $\frac{d\vartheta}{dt} = o$ habe, wenn $t = o$ ist, und α irgend einen beliebigen Werth hat, daſs die anfänglichen Werthe von ϑ_2, ϑ_3 ... $\frac{d\vartheta_2}{dt}$, $\frac{d\vartheta_3}{dt}$ ... alle Null, und die von ϑ_1 und $\frac{d\vartheta_1}{dt}$ bezüglich gleich der Einheit und gleich Null seyen. Nach diesen Bedingungen muſs man die willkührlichen Constanten bestimmen, welche in den vollständigen Integralen dieser Reihe von Gleichungen enthalten seyn werden. Auf diese Weise kann man so viele Glieder der vorhergehenden Reihe, als man will, berechnen. Ich

beschränke mich auf die Annäherung bis zum Quadrate von α, und vernachlässige die dritte und höheren Potenzen dieser Gröſse.

Alsdann hat man einfach

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \alpha\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} + \alpha^2\frac{d^2\vartheta_2}{dt^2}$$

$$\sin\vartheta = \alpha\vartheta_1 + \alpha^2\vartheta_2$$

$$\frac{d\vartheta^2}{dt^2} = \alpha^2\frac{d\vartheta_1^2}{dt^2}$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung (4) substituiert und die Coefficienten von α und α^2 in ihren zwei Theilen einander gleich setzt, so erhält man

$$\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} + \frac{g}{a}\vartheta_1 = o$$

$$\frac{d^2\vartheta_2}{dt^2} + \frac{g}{a}\vartheta_2 = \tfrac{1}{2}\mu\frac{d\vartheta_1^2}{dt^2}.$$

Integriert man die erste dieser zwei Gleichungen, und bestimmt die beiden willkührlichen Constanten, so daſs man $\vartheta_1 = o$ und $\frac{d\vartheta_1}{dt} = o$ hat, wenn $t = o$ ist, so haben wir

$$\vartheta_1 = \cos t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{d\vartheta_1^2}{dt^2} = \frac{g}{a}\sin^2 t\sqrt{\frac{g}{a}} = \tfrac{1}{2}\frac{g}{a}\left(1 - \cos 2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right),$$

also wird die zweite Gleichung

$$\frac{d^2\vartheta_2}{dt^2} + \frac{g}{a}\vartheta_2 = \frac{g\mu}{4a}\left(1 - \cos 2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)$$

und man hat

$$\vartheta_2 = -\frac{\mu}{3}\cos t\sqrt{\frac{g}{a}} + \tfrac{1}{4}\mu + \tfrac{1}{12}\mu\cos 2t\sqrt{\frac{g}{a}}$$

als Werth ihres Integrals, welches der Bedingung unterworfen ist, daſs $\vartheta_2 = o$ und $\frac{d\vartheta^2}{dt} = o$ ist, wenn $t = o$ ist.

Vermittelst dieser Ausdrücke für ϑ_1 und ϑ_2 wird der Werth von ϑ

$$\vartheta = \left(\alpha - \frac{\alpha^2\mu}{3}\right)\cos t\sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{\alpha^2\mu}{4} + \frac{\alpha^2\mu}{12}\cos 2t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

und da $v = -a \frac{d\vartheta}{dt}$, so hat man zu gleicher Zeit

$$v = \left(\alpha - \frac{\alpha^2 \mu}{3}\right) \sqrt{ga} \sin t \sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{\alpha^2 \mu \sqrt{ga}}{6} \sin 2t \sqrt{\frac{g}{a}}$$

und diese Formeln geben die Lage und Geschwindigkeit des Körpers für einen gewissen Augenblick an.

190.

Schreibt man, in dem letzteren Ausdrucke, statt $\sin 2t \sqrt{\frac{g}{a}}$ den Werth $2 \sin t \sqrt{\frac{g}{a}} \cos t \sqrt{\frac{g}{a}}$, so geht die Gleichung $v = o$, welche am Ende jeder Schwingung statt hat, in folgende über:

$$\left(1 - \frac{\alpha\mu}{3} + \frac{\alpha\mu}{3} \cos t \sqrt{\frac{g}{a}}\right) \sin t \sqrt{\frac{g}{a}} = o.$$

Da der Winkel α sehr klein ist, so kann der erste Factor nicht Null seyn, der zweite ist Null, so oft als $t \sqrt{\frac{g}{a}}$ ein Vielfaches von π ist. Hieraus folgt, dafs der Zeitraum, welcher zwischen zwei auf einander folgenden Geschwindigkeiten, die gleich Null sind, verfliefst, oder die Dauer T einer ganzen Schwingung

$$T = \pi \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

ist, so dafs der Widerstand der Luft, der dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, auf die Dauer derselben gar keinen Einflufs hat.

Jedoch vergröfsert er die Zeit, welche das Pendel braucht, um den Punkt B zu erreichen. Bezeichnet man diese nemlich durch t' und setzt $\vartheta = o$, so hat man

$$\left(1 - \frac{\alpha\mu}{3}\right) \cos t' \sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{\alpha\mu}{4} + \frac{\alpha\mu}{12} \cos 2t' \sqrt{\frac{g}{a}} = o.$$

Der kleinste Werth von $t' \sqrt{\frac{g}{a}}$, der dieser Gleichung Genüge leistet, ist nur wenig von $\frac{1}{2}\pi$ verschieden, sey also

$$t' \sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{1}{2}\pi + \delta.$$

Vernachlässigt man das Quadrat von δ und das Produkt $\alpha\delta$, so hat man

$$\delta = \tfrac{1}{6}\alpha\mu,$$

und daher

$$t' = \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{a}{g}}\left(1 + \frac{\alpha\mu}{3\pi}\right).$$

Der Widerstand der Luft vergröfsert daher die Dauer der ersten niedersteigenden halben Schwingung in dem Verhältnisse von $1 + \frac{\alpha}{3\pi}$ zur Einheit, und da er auf die Dauer der ganzen Schwingung keinen Einflufs hat, so folgt hieraus, dafs er die Dauer der aufsteigenden halben Schwingung in demselben Verhältnisse vergröfsert.

Substituiert man diesen Werth von t' in den Werth von v, und vernachlässigt die dritte Potenz von α, so hat man

$$v = \left(1 - \frac{\alpha\mu}{3}\right) a\sqrt{ga},$$

und hieraus schliefst man, dafs die Geschwindigkeit, welche das Pendel im tiefsten Punkte erreicht, durch den Widerstand der Luft in dem Verhältnisse von $1 - \frac{\alpha\mu}{3}$ zur Einheit vermindert wird.

Bezeichnet man durch $-\alpha_1$ den Werth von ϑ, der am Ende der ersten ganzen Schwingung statt findet, und dem Werthe $t\sqrt{\frac{g}{a}} = \pi$ entspricht, so hat man

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{2\mu\alpha^2}{3}$$

wie vorher.

Diese verschiedenen Resultate sind von der Gröfse des Coefficienten μ des Widerstandes unabhängig, und setzen blos voraus, dafs der Winkel α sehr klein ist; sie gelten sowohl für den Fall, wenn sich das Pendel in einer luftförmigen, als auch, wenn es sich in einer tropfbaren Flüssigkeit bewegt, sobald nur der Coefficient μ für jede Flüssigkeit besonders bestimmt ist. Ist α sehr klein, so ist es überflüssig, die Annahme, dafs der Widerstand der dritten oder einer höheren Potenz der Geschwindigkeit proportional ist, besonders zu untersuchen, denn es könnten hieraus, in den Werthen von

ϑ und ϕ nur Glieder entspringen, die von höheren Potenzen von α als die zweite abhingen, und die man in den vorhergehenden Rechnungen als unbedeutende angesehen hat. Verbindet man das hier Gefundene mit dem, was in §. 187 gesagt worden ist, so schliefst man daraus, dafs der Widerstand der Luft auf die Dauer der sehr kleinen Schwingungen des Pendels, für welche man die Correction rücksichtlich der Gröfse der Weite (§. 184) vernachlässigt, keinen Einflufs hat. Nimmt man diese Correction in Rechnung, so hat der Widerstand einen kleinen Einflufs, weil er die Weiten, während der Dauer der Bewegung, ändert.

191.

Hieraus folgt aber nicht, dafs die Dauer der Schwingungen eines schweren Körpers, wie klein man sie auch annehme, dieselbe in der Luft, wie im leeren Raume sey. Denn diese Flüssigkeit vermehrt durch den Druck, den sie auf den Körper ausübt, diese Dauer, indem sie die Schwere vermindert. Man weifs nemlich durch die Erfahrung, und wir werden es in der Hydrostatik beweisen, dafs ein ruhender Körper, der in eine Flüssigkeit getaucht ist, in demselben einen Theil seines Gewichtes verliert, der dem Gewichte der Flüssigkeit, dessen Raum er einnimmt, gleich ist. Ist daher P das Gewicht dieses Körpers im leeren Raume, P' sein Gewicht in der Luft und Π das Gewicht eines Volumens Luft, das dem des Körpers gleich ist, so hat man

$$P' = P - \Pi.$$

Nennt man ϱ das Verhältnifs der Dichtigkeit der Luft zu der des Körpers, g die Schwere im leeren Raume, g' das, was diese Kraft in der Luft wird, und m die Masse des Körpers, so hat man auch

$$\Pi = P\varrho, \quad P = mg, \quad P' = mg',$$

daher ist

$$g' = g\,(1 - \varrho).$$

Bezeichnet man aber durch T und T' die Dauer der kleinen Schwingungen desselben Pendels, die zwei beschleunigenden Kräften g und g' entsprechen, so hat man

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}, \quad T' = \pi \sqrt{\frac{a}{g'}}$$

und daher

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1-\varrho}}.$$

Sey auch a' die Länge des Pendels, das von der Schwere g' getrieben wird, und seine Schwingungen in derselben Zeit vollführt, wie das Pendel, das von der Schwere g getrieben wird, und dessen Länge a ist, so muſs man

$$\sqrt{\frac{a}{g}} = \sqrt{\frac{a'}{g'}}$$

haben, woraus sich

$$a' = a\,(1-\varrho)$$

ergiebt. Man findet also, daſs schon blos durch den Gewichtsverlust im Zustande der Ruhe, die Dauer der Schwingungen in der Luft in dem Verhältniſs der Einheit zu $\sqrt{1-\varrho}$ für dasselbe Pendel vergröſsert, und die Länge des einfachen Pendels in dem Verhältnisse von $1-\varrho$ zur Einheit für dieselbe Dauer vermindert wird.

Auſserdem hat Bessel durch Versuche gezeigt, daſs der Gewichtsverlust, den ein Körper in der Luft erleidet, nicht derselbe ist, wenn er in Ruhe ist, als wenn er sich in einer schwingenden Bewegung befindet. Im zweiten Falle ist er gröſser und es folgt hieraus, daſs man in den vorhergehenden Formeln ϱ mit einem Factor f multiplicieren muſs, der gröſser als die Einheit ist, und von der Gestalt des Körpers abhängt. Ich bin zu demselben Resultate in einer Abhandlung "über die gleichzeitigen Bewegungen eines Pendels und der umgebenden Luft" *) gelangt, und nach meiner Analyse hat man $f = \frac{3}{2}$, wenn das Pendel, wie das Borda'sche, aus einer Kugel besteht, die am Ende eines sehr dünnen Fadens aufgehängt ist, dessen Länge im Verhältnisse zum Durchmesser dieser Kugel sehr beträchtlich ist, so daſs man alsdann die Correction rücksichtlich der Dichtigkeit der Luft, welche man, vor Bessels Bemerkung, an die Dauer der kleinen Schwingungen und die Länge des einfachen Pendels anbrachte, um die Hälfte vermehren muſs. In allen Fällen ist der Coefficient f immer unabhängig von der Dichtigkeit des Pendels, so wie auch von der Natur und Dichtigkeit der Flüssigkeit, in welcher es

*) Mémoires de l'Académie des Sciences, Tome XI.

schwingt, so dafs man ihn immer durch die Erfahrung bestimmen kann, wenn man die Dauer der Schwingungen zweier Pendel von verschiedener Dichtigkeit, die dieselbe Gestalt haben, in derselben Flüssigkeit, oder desselben Pendels, in zwei verschiedenen Flüssigkeiten, wie z. B. in Wasser und Luft, vergleicht *).

192.

Sey nun n die Anzahl der unendlich kleinen Schwingungen, die irgend ein Pendel im leeren Raume während der Zeit τ macht. Um diese Zahl, nach der Regel des §. 184, aus der der sehr kleinen Schwingungen abzuleiten, welche durch die Beobachtung gegeben ist, und um die Aenderung der Weiten während dieser Zeit τ zu berücksichtigen, nimmt man gewöhnlich für den Winkel α das Mittel der äufsersten Weiten, die ebenfalls durch die Beobachtung gegeben sind.

---

*) Es hat sich später gefunden, dafs schon Du Buat diese neue Correction gekannt und in der zweiten Ausgabe seiner Principes d'Hydraulique, welche im Jahre 1786 erschien, ausführlich behandelt, und die darüber angestellten Versuche mitgetheilt hat. Er bestimmt den Coefficienten f zu 1,586. Es ist merkwürdig, dafs seine Untersuchungen, welche damals so viel Aufsehen erregten, dafs die Pariser Akademie sie zweimal, in den Jahren 1786 und 1791, zum Gegenstande einer Preisaufgabe machte, später ganz vergessen wurden, so dafs keiner der vielen Gelehrten, die vor Bessel Pendelversuche anstellten, sie jemals berücksichtigt hat. Daher bleibt diesem grofsen Astronomen das Verdienst, diese Correction in neuerer Zeit wieder selbstständig aufgefunden zu haben, abgesehen davon, dafs seine Versuche die Du Buat's an Genauigkeit weit übertreffen, und dafs er sich nicht, wie man aus Poisson's Worten schliefsen könnte, auf die Versuche beschränkt, sondern auch die mathematische Theorie der Correction ausführlich entwickelt hat. Uebrigens hat Baily später gezeigt, dafs in einzelnen Fällen nicht blos die Luft, welche durch den am Faden hängenden Körper in Bewegung gesetzt wird, sondern auch der Theil der Luft, welchen dieser Faden selbst in Bewegung setzt, berücksichtigt werden mufs. Seine Untersuchungen hierüber findet man, nebst vielen anderen wichtigen Bemerkungen über das Pendel, in den Phil. Transact. for the year 1832 P. 2 pag. 399 seqq., Bessels Untersuchungen in den Abhandlungen der Berl. Akad. für das Jahr 1826. Auch sind sie besonders, unter dem Titel "Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels von Bessel" erschienen.

Anmerk. des Uebers.

Dies angenommen, ist die Dauer einer unendlich kleinen Schwingung dieses Pendels

$$T = \frac{\tau}{n},$$

und der Irrthum, den man beim Maafse der Zeit τ begehen kann, hat um so weniger Einflufs auf diesen Werth von T, als die Zahl n beträchtlicher ist. Nach der Gestalt und den Dimensionen des schwingenden Körpers, bestimmt man alsdann, nach der Formel, die in einem späteren Kapitel vorkommt, die Länge des einfachen Pendels, dessen Bewegung dieselbe ist wie die des Körpers. Man reduciert diese Länge, wie so eben erklärt worden ist, auf die, welche das Pendel im leeren Raume haben würde, und bezeichnet man durch a die so reducierte Länge, und durch g die Schwere im leeren Raume, so hat man

$$\frac{\tau}{n} = \pi \sqrt{\frac{a}{g}},$$

und hieraus findet man

$$g = \frac{\pi^2 n^2 a}{\tau^2}. \qquad (a)$$

Vermittelst dieser Formel hat man, mit sehr grofser Genauigkeit, in jedem Punkte der Erde das Maafs der Schwere oder die Geschwindigkeit g bestimmt, welche die schweren Körper erlangen, wenn sie während der Zeiteinheit vertical im leeren Raume fallen. Nach dem Versuche, den Borda, auf der Pariser Sternwarte, mit einem Pendel von ungefähr zwei Meter Länge angestellt hat, hat man

$$a = o^m, 993855,$$

indem man die Secunde als Einheit nimmt, und man findet daraus

$$g = 9^m, 80896$$

an diesem Orte der Erde, d. h. in einer Breite von $48^0\, 50'\, 14''$.

Bessel hat Körper von sehr verschiedener Art, wie z. B. Metalle, Elfenbein, Marmor, Meteorsteine u. s. w., schwingen lassen; aber immer fast ganz gleiche Werthe von g gefunden, da die gröfsten Unterschiede auf beiden Seiten des Mittels kaum $\frac{1}{100000}$ dieses Werthes betrugen, und daher von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern herrühren können. Es kann

daher über die vollkommene Gleichheit der Anziehung, welche die Erde auf alle Körper ausübt, welcher Art sie sonst seyen, wenn sie nur an derselben Stelle der Erdoberfläche sich befinden, kein Zweifel bleiben. Denn diese Gleichheit folgt aus der der Werthe von g, weil diese Kraft der Ueberschufs der Anziehung der Erde über die verticale Seitenkraft der Centrifugalkraft ist, welche bei allen Körpern dieselbe ist.

193.

Von der Betrachtung ausgehend, dafs die Oberfläche der Erde die Verlängerung der Meeresfläche, die sich im Gleichgewichte befindet, ist, wird in der Mécanique céleste bewiesen, dafs, an dieser Oberfläche, die Variation die Länge des einfachen Pendels, welches immer eine Schwingung in der Zeiteinheit vollführt, dem Cosinus des Doppelten der Breite proportional ist, so dafs, wenn man durch λ diese Länge für einen Ort, dessen Breite ψ ist, bezeichnet, man

$$\lambda = l\,(1 - \omega \cos 2\psi) \qquad (b)$$

hat, wo l und ω durch die Beobachtung bestimmte Constanten sind. Auch beweist man, dafs der Coefficient ω mit der Abplattung der Erde durch die Gleichung

$$2\omega + \delta = \tfrac{5}{2} r$$

verbunden ist, in welcher man diese Abplattung δ nennt, so dafs der Halbmesser des Aequators und der des Pols sich zu einander wie $1 + \delta$ und die Einheit verhalten, und r das Verhältnifs der Centrifugalkraft zur Schwere ist, die am Aequator statt hat, und deren Werth (§. 177)

$$r = \frac{1}{289}$$

ist. Die Formel (b) wird wirklich durch die Erfahrung bestätigt, wenn man von den örtlichen Umständen, die, wie man in der Folge sehen wird, auf die Anziehung der Erde und die Länge des Pendels Einflufs haben können, absieht. Alle bisher in verschiedenen Breiten angestellten Versuche geben

$$\omega = 0{,}002588,$$

was voraussetzt, dafs δ beinahe gleich r ist. Die Constante l ist der Werth von λ, der dem Werthe $\psi = 45^0$ entspricht, sie ist wenig von derjenigen verschieden, welche zur Breite von Paris gehört, und nach dieser hat man

$$0^m,993855 = l[1 + 0,002588 \sin(7^\circ 40' 28'')]$$

woraus man

$$l = 0\ \ ,993512$$

findet.

Setzt man $n = 1$ und $\tau = 1$ in der Formel (a), setzt man alsdann allmälich l und λ an die Stelle von a, und bezeichnet durch p und Π die entsprechenden Werthe von g, so hat man

$$p = \pi^2 l, \quad \Pi = \pi^2 \lambda,$$

man hat daher

$$p = 9^m,80557$$

und, in einer beliebigen Breite,

$$\Pi = p\ (1 - 0,002588 \cos 2\psi).$$

Bemerkt man, dafs

$$\cos 2\psi = 2 \cos^2 \psi - 1$$

ist, so sieht man, dafs die Verminderung der Schwere, wenn man vom Pole nach dem Aequator hin geht, dem Quadrate des Cosinus der Breite proportional ist, was mit dem in §. 178 Gesagten zusammen stimmt.

Bringt man dasselbe Pendel nach verschiedenen Orten der Erde, so sieht man, nach der Gleichung (a), dafs die Anzahl n seiner Schwingungen, in derselben Zeit τ, sich der Quadratwurzel der Schwere proportional ändern werden. So z. B. wird eine Pendeluhr, die in Paris nach der täglichen Umdrehung der Erde reguliert ist, zu langsam gehen, wenn man sie nach dem Aequator bringt. Nennt man n und n' die Anzahl der Schwingungen, die ihr Pendel an diesen zwei Orten der Erde in einem Sterntage macht, so hat man

$$n = 86164, \quad n' = n \sqrt{\frac{1 - 0,002588}{1 + 0,002588 \sin(7^\circ 40' 28'')}}$$

und daher

$$n' = 86037,$$

so dafs die Uhr in 24 Stunden um ungefähr 127 Secunden zurückbleibt. Die Beobachtung dieses Zurückbleibens hat zuerst die Aenderung der Schwere an der Oberfläche der Erde dargethan.

II. Bewegung auf der Cykloide.

194.

Sey ABC (Fig. 46) die Trajectorie eines schweren materiellen Punktes, dessen Ebene vertical ist. Man nehme an, dieser Körper gehe von einem Punkte D, ohne Anfangsgeschwindigkeit aus, und sey am Ende der Zeit t in M; von den Punkten D und M fälle man die senkrechten Linien DE und MP auf die Verticale, die durch den Punkt B geht, welcher der tiefste der krummen Linie ist. Setzt man $EP = z$, bezeichnet man durch v die Geschwindigkeit, die er im Punkte M erlangt hat, und die Schwere durch g, so hat man (§. 159)

$$v = \sqrt{2gz},$$

wenn man annimmt, dafs die Schwere die einzige Kraft sey, die auf den Körper wirkt. Sey auch s der Bogen BM; da er abnimmt, wenn die Zeit zunimmt, so hat man

$$v = -\frac{ds}{dt},$$

und setzt man

$$EB = h, \quad PB = x = h - z,$$

so folgt hieraus

$$\sqrt{2g}\,dt = -\frac{ds}{\sqrt{h-x}}, \qquad (1)$$

wie auch die gegebene krumme Linie beschaffen sey.

Da diese krumme Linie, nach der Voraussetzung, eine Cykloide ist, so hat man (§. 73)

$$s^2 = 4ax,$$

wenn man durch a den Durchmesser BF ihres erzeugenden Kreises bezeichnet. Man hat daher

$$\sqrt{\frac{2g}{a}}\,dt = -\frac{dx}{\sqrt{hx - x^2}},$$

und, wenn man integriert,

$$t\sqrt{\frac{2g}{a}} = \text{arc}\left(\cos = \frac{2x - h}{h}\right),$$

es wird hier keine willkührliche Constante zugesetzt, damit man im Anfange der Bewegung $t = o$ habe, d. h. wenn $x = h$ ist.

Nennt man t' die Zeit, die der Körper braucht, um den Punkt B zu erreichen, der $x = o$ entspricht, so hat man

$$t' \sqrt{\frac{2g}{a}} = \text{arc}(\cos = -1) = \pi,$$

und daher

$$t' = \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}.$$

Diese Zeit ist, wie man sieht, unabhängig von der Höhe h des Punktes D, von welchem der Körper ausgeht, über dem tiefsten Punkte B, so dafs diese Eigenschaft, welche näherungsweise bei allen krummen Linien, für eine sehr kleine Höhe h statt hat, bei der Cykloide streng richtig ist, wie auch diese Höhe beschaffen seyn mag, wenn sie nur kleiner als a oder BF ist. Hieraus folgt, dafs alle Körper, die zu gleicher Zeit von verschiedenen Punkten der Cykloide ausgehen, in derselben Zeit in ihrem tiefsten Punkte ankommen.

Man hat $\pi \sqrt{\frac{2a}{g}}$ als Ausdruck der Zeitdauer einer ganzen Schwingung nach beiden Seiten des Punktes B; man sieht aber, dafs diese Zeit die der sehr kleinen Schwingungen des Pendels ist, dessen Länge $2a$ der Krümmungshalbmesser der Cykloide in diesem Punkte ist (§. 72), was mit dem Resultate des §. 183, rücksichtlich der Dauer der kleinen Schwingungen auf einer beliebigen krummen Linie, zusammenstimmt, welche Dauer, im Falle der Cykloide, dieselbe ist, wie die der Schwingungen von beliebiger Weite.

195.

Die Zeit, welche der Körper braucht, um den Bogen DB der Cykloide zu durchlaufen, ist auch dann noch von der Länge dieses Bogens unabhängig, wenn die Bewegung in einem widerstehenden Mittel statt hat, und der Widerstand der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist.

Denn man bezeichne diese Kraft durch $\frac{gv}{k}$, wie in §. 186; die Seitenkraft der Schwere, nach der Richtung der Tangente MT, ist $g\frac{dx}{ds}$, wenn man bemerkt, dafs $\frac{dx}{ds}$ der Cosinus des Winkels TMN ist, welchen diese gerade Linie mit der

Verticalen MN einschliefst. Die Kraft, welche auf den Punkt M wirkt, und den Bogen BM oder s zu vermindern strebt, ist daher der Unterschied $g\frac{dx}{ds} - g\frac{v}{k}$; folglich hat man, als Gleichung der Bewegung,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\left(\frac{dx}{ds} - \frac{v}{k}\right),$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{k}\frac{ds}{dt} + \frac{g}{2a}s = o,$$

da

$$v = -\frac{ds}{dt}, \quad \frac{dx}{ds} = \frac{s}{2a}$$

ist.

Ich nehme an, dafs die Geschwindigkeit v, im Anfange der Bewegung, oder wenn $t = o$ ist, Null sey, und dafs man $s = \alpha$ habe; bestimmt man die beiden willkührlichen Constanten nach diesen Bedingungen, und setzt, zur Abkürzung,

$$\sqrt{1 - \frac{ga}{2k^2}} = \gamma,$$

so ist das Integral der vorhergehenden Gleichung (§. 186)

$$s = \alpha\left(\cos t\gamma\sqrt{\frac{g}{2a}} + \frac{\sqrt{2ga}}{2\gamma k}\sin t\gamma\sqrt{\frac{g}{2a}}\right)e^{-\frac{gt}{2k}}$$

Nennt man daher t' die Zeit, die dem Punkte B entspricht, wo $s = o$ ist, so hat man

$$\cos t'\gamma\sqrt{\frac{g}{2a}} + \frac{\sqrt{2ga}}{2\gamma k}\sin t'\gamma\sqrt{\frac{g}{2a}} = o,$$

aus welcher Gleichung man einen Werth von t' ableiten kann, der nicht von α abhängt, was eben gefunden werden sollte.

Wenn der Widerstand sehr gering oder die Geschwindigkeit k sehr grofs ist, so hat man ungefähr $\gamma = 1$, und die vorhergehende Gleichung giebt

$$t'\sqrt{\frac{g}{2a}} = \tfrac{1}{2}\pi + \frac{\sqrt{2ga}}{2k},$$

woraus hervorgeht, dafs die Zeit, durch diesen Widerstand, ein wenig vergröfsert wird.

196.

Man verlängere die Linie BF bis nach O um eine Gröfse, die gleich BF ist, dieser Punkt O wird der Mittelpunkt der Krümmung der Cykloide am Punkte B seyn, und wenn man die beiden halben Cykloiden OA und OC zieht, für welche die Linien OB und AC Berührungslinien sind, während OF der Durchmesser ihres erzeugenden Kreises ist, so ist OA die Evolvente von AB, und OC die von BC (§. 72), folglich wird ein Faden, der die beständige Länge OB oder $2a$ hat, am Punkte O befestigt ist, und sich allmälich auf den beiden krummen Linien OA und OC aufwickelt, mit seinem anderen Ende die Cykloide ABC beschreiben.

Dies giebt ein Mittel an die Hand, ein cykloidisches Pendel zu construieren. Zu diesem Zwecke nehme man an, dafs die krummen Linien OA und OC, in erhabener Arbeit (en relief) gezogen seyen, und dafs OB ein unausdehnbarer vollkommen biegsamer Faden sey, der an den festen Punkt O angeknüpft ist. Man befestige einen schweren Körper an das andere Ende B, und entferne alsdann diesen Faden von der verticalen Lage, so dafs er sich ganz oder theilweise auf eine der krummen Linien OA und OC aufwickele und sein nicht aufgewickelter Theil eine gerade Linie sey, die diese krumme Linie berührt. Ueberläfst man alsdann den Körper sich selbst, so wird das untere Ende des Fadens die krumme Linie ABC beschreiben und nach §. 194 wird die Dauer der Schwingungen dieses Pendels, im leeren Raume, vollkommen und beständig von der Weite derselben unabhängig seyn. Dieses Mittel würde aber bei der wirklichen Ausführung durchaus keine Genauigkeit zulassen, und aufserdem würde die Gleichzeitigkeit der Schwingungen in der Luft nicht statt haben, da der Widerstand dieser Flüssigkeit alsdann nicht mehr der Geschwindigkeit proportional ist.

197.

Eine **Tautochrone** nennt man jede krumme Linie, auf welcher ein schwerer materieller Punkt immer in derselben Zeit im tiefsten Punkte ankommt, wo auch der Punkt dieser krummen Linie liege, von welchem er ausgegangen ist. So ist die Cykloide im leeren Raume eine Tautochrone, und

aufserdem wird man sogleich sehen, dafs sie alsdann die einzige krumme Linie dieser Art ist.

Nennt man t' die Zeit, welche der Körper braucht, um, ohne Anfangsgeschwindigkeit, vom Punkte D nach dem tiefsten Punkte B, auf einer beliebigen krummen Linie ADB zu gehen, so ist der Werth von $t'\sqrt{2g}$ durch das Integral der Formel (1) gegeben, welches von $x=h$ bis $x=o$, oder, was dasselbe ist, von $x=o$ bis $x=h$, wenn man das Zeichen der Formel ändert, genommen werden mufs. Alsdann hat man

$$t'\sqrt{2g}=\int_o^h \frac{ds}{\sqrt{h-x}},$$

und um die Tautochrone zu finden, mufs man s als Function von x bestimmen, so dafs dieser Werth von $t\sqrt{2g}$ unabhängig von h ist.

Ich nehme nun an, dafs diese unbekannte Function nach den steigenden Potenzen von x entwickelt sey, so dafs man

$$s = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} \ldots.$$

hat, wo $A, B, C \ldots \alpha, \beta, \gamma \ldots$ unbestimmte Exponenten und Coefficienten sind. Da die Abscisse x und der Bogen s ihren Anfangspunkt im Punkte B haben, so mufs zu gleicher Zeit $x=o$ und $s=o$ seyn; es müssen daher sämmtliche Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ positiv und keiner Null seyn. Auch sieht man a priori, dafs der kleinste derselben kleiner als die Einheit seyn mufs, denn da der Punkt B, nach der Voraussetzung, der tiefste Punkt der verlangten krummen Linie ist, so ist die Tangente dort horizontal, oder steht auf der Axe der x senkrecht, dies erfordert aber, dafs man $\frac{ds}{dx}=\infty$ habe, wenn $x=o$ ist.

Nimmt man das Differential dieser Reihe, und substituiert es an die Stelle von ds in der vorhergehenden Formel, so erhält man

$$t'\sqrt{2g} = A\alpha\int_o^h \frac{x^{\alpha-1}dx}{\sqrt{h-x}} + B\beta\int_o^h \frac{x^{\beta-1}dx}{\sqrt{h-x}}$$

$$+ C\gamma\int_o^h \frac{x^{\gamma-1}dx}{\sqrt{h-x}} + \ldots.$$

Ich setze $x = hx'$ und $dx = hdx'$, die Gränzen der Integrale in Beziehung auf diese neue Veränderliche x' werden Null und die Einheit seyn; man hat z. B.

$$\int_0^h \frac{x^{\alpha-1}dx}{\sqrt{h-x}} = h^{\alpha-\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{x'^{\alpha-1}dx}{\sqrt{1-x'}}$$

und wenn man, zur Abkürzung,

$$\int_0^1 \frac{x'^{\alpha-1}dx'}{\sqrt{1-x'}} = A', \quad \int_0^1 \frac{x'^{\beta-1}dx'}{\sqrt{1-x'}} = B', \ldots$$

setzt, so folgt hieraus

$$t'\sqrt{2g} = \alpha AA' h^{\alpha-\frac{1}{2}} + \beta BB' h^{\beta-\frac{1}{2}} + \gamma CC' h^{\gamma-\frac{1}{2}} \ldots\ldots$$

Es ist wichtig zu bemerken, daſs keines der Integrale A', B', C'... Null seyn kann, denn die Werthe der Differentiale, deren Summen diese Integrale sind (§. 13), ändern ihr Zeichen, zwischen den Gränzen der Integrationen, nicht; diese Werthe sind alle positiv und daher auch die der Integrale.

Es ist nun einleuchtend, daſs der Werth von t' nicht anders von h unabhängig seyn kann, als wenn alle Glieder der vorhergehenden Reihe Null sind, ausgenommen dasjenige, in welchem der Exponent von h gleich Null ist, oder welches einem der Exponenten α, β, γ ..., der gleich $\frac{1}{2}$ ist, entspricht. Man nehme an, daſs dieses Glied das erste sey, oder daſs man $\alpha = \frac{1}{2}$ habe. Damit das zweite Glied verschwinde, müſs das Produkt $\beta BB'$ Null seyn, dies erfordert, daſs B Null sey, da β und B' nicht Null sind. Ebenso sieht man, daſs auch die übrigen Coefficienten C, D u. s. w. gleich Null sind, so daſs die Gleichung der Tautochrone auf folgende zurück kommt:

$$s = Ax^{\frac{1}{2}} \text{ oder } s^2 = A^2 x,$$

welche einer Cykloide angehört, deren Basis horizontal ist und deren Spitze im Punkte B liegt, welchen der Körper immer in derselben Zeit erreicht.

Bezeichnet man durch a den Durchmesser des erzeugenden Kreises, so hat man $A^2 = 4a$, und daher

$$t'\sqrt{2g} = A'\sqrt{a}.$$

Da $\alpha = \frac{1}{2}$ ist, so hat man auſserdem

$$A' = \int_0^1 \frac{dx'}{\sqrt{x' - x'^2}} = \pi,$$

also hat man

$$t' = \pi \sqrt{\frac{a}{2g}},$$

wie in §. 194.

198.

Die Cykloide findet man auch, wenn man die **Brachistochrone** oder die Linie des schnellsten Falles im leeren Raume sucht, d. h. die krumme Linie AMB (Fig. 47), welche ein schwerer materieller Punkt durchlaufen muſs, um in der kürzesten Zeit, ohne Anfangsgeschwindigkeit, vom gegebenen Punkte A nach dem gegebenen Punkte B zu kommen.

Um diese krumme Linie zu bestimmen, seyen x, y, z die drei rechtwinkligen Coordinaten des Punktes M, in welchem sich der Körper am Ende der Zeit t befindet, sey auch s der Bogen AM, den er durchlaufen hat. Nimmt man an, daſs die Axe x vertical und im Sinne der Schwerkraft gerichtet sey, und bezeichnet man durch α den Werth von x im Punkte A, so ist die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$, welche der Körper im Punkte M erlangt hat, diejenige, welche zur Höhe $x - \alpha$ gehört. Bezeichnet man die Schwere durch g, so hat man daher

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(x-\alpha)},$$

und wenn man, zur Abkürzung,

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} = u$$

setzt, so daſs $ds = udx$ ist, so folgt hieraus

$$\sqrt{2g}\,dt = \frac{udx}{\sqrt{x-a}}.$$

Nennt man daher β den Werth von x im Punkte B, und t' die Zeit, welche der Körper braucht, um vom Punkte A nach dem Punkte B zu gehen, so hat man

$$t'\sqrt{2g} = \int_\alpha^\beta \frac{udx}{\sqrt{x-\alpha}}.$$

Man mufs daher die krumme Linie bestimmen, für welche dieses Integral ein Minimum ist; zur gröfseren Allgemeinheit will ich aber das Integral

$$U = \int_{\alpha}^{\beta} Xudx$$

betrachten, wo X eine gegebene Function von x ist, was uns, in der Folge, dazu dienen wird, eine andere Aufgabe zu lösen. In der vorliegenden ist $X = (x - \alpha)^{-\frac{1}{2}}$.

199.

Man bezeichne durch i eine beständige und unendlich kleine Gröfse, und durch δy und δz zwei willkührliche Functionen von x, die blos der Bedingung unterworfen sind, dafs sie Null werden, wenn $x = \alpha$ und wenn $x = \beta$ ist und für die dazwischen liegenden Werthe von x nicht unendlich grofs werden. Sey U' und u' das, was U und u wird, wenn man $y + i\delta y$ und $z + i\delta z$ an die Stelle von y und z setzt, so dafs man

$$U' = \int_{\alpha}^{\beta} Xu'dx$$

hat, welches Integral einer anderen krummen Linie $AM'B$ entspricht, die, wie die verlangte krumme Linie AMB, durch die Punkte A und B geht, und sich nur unendlich wenig von dieser entfernt. Auch haben wir

$$U' - U = \int_{\alpha}^{\beta} X(u' - u)dx,$$

und nach der Beschaffenheit der krummen Linie AMB mufs dieser Unterschied $U' - U$ positiv seyn, was auch die Werthe von δy und δz sind, und welches Zeichen man auch i giebt. Entwickelt man aber den Ausdruck $u' - u$ nach Potenzen von i, und bezeichnet durch $i\delta u$ das erste Glied der Entwickelung, so ist das erste Glied des Werthes von $U' - U$ gleich $i\int_{\alpha}^{\beta} X\delta udx$, und hieraus folgt, dafs

$$\int_{\alpha}^{\beta} X\delta udx = o \qquad (a)$$

ist, weil sonst $U' - U$ zu gleicher Zeit mit i das Zeichen ändern würde.

Diese Bedingung ist dem Minimum und dem Maximum von U gemeinschaftlich. Wenn sie erfüllt ist, so ist der Unterschied $U' - U$ im Allgemeinen ein unendlich Kleines vom zweiten Range, er hat daher dasselbe Zeichen, wie der Coefficient von i^2 in seiner Entwickelung, und es wird daher ein Maximum oder Minimum statt finden, je nachdem dieser Coefficient negativ oder positiv ist. Da es aber einleuchtend ist, dafs die Zeit t' keines Maximums fähig ist, so ist dieser Coefficient bei der Aufgabe der Brachistochrone sicher positiv und es ist hinreichend, der Bedingung Genüge zu leisten, die durch die Gleichung (a) ausgedrückt wird.

Die Gröfse $i\delta u$ ist nichts Anderes, als das Differential von u, welches in Beziehung auf y und z genommen ist, und in welchem die Zuwächse durch $i\delta y$ und $i\delta z$ dargestellt sind. Läfst man den Factor i weg, der in $i\delta u$ und seinem entwickelten Werthe vorkommt, so hat man

$$\delta u = \frac{1}{u}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{1}{u}\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d\delta z}{dx},$$

so dafs die Gleichung (a) in

$$\int_\alpha^\beta \frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx}\,x + \int_\alpha^\beta \frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx}\,dx = o$$

übergeht.

Integriert man nun theilweise und bemerkt, dafs die Gröfsen δy und δz, nach der Voraussetzung, an den beiden Gränzen $x = \alpha$ und $x = \beta$ Null sind, so hat man

$$\int_\alpha^\beta \frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx}dx = -\int_\alpha^\beta \frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\delta y\,dx$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx}dx = -\int_\alpha^\beta \frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\right)}{dx}\delta z\,dx,$$

wodurch die vorhergehende Gleichung in folgende übergeht:

$$\int_\alpha^\beta \left[\frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\delta y + \frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\right)}{dx}\delta z\right]dx = o.$$

Da aber δy und δz willkührliche Functionen von x sind, so kann dieses Integral nicht Null seyn, wenn es nicht die unter dem Integrationszeichen enthaltene Gröfse selbst ist, folglich hat man

$$\frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\delta y + \frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\right)}{dx}\delta z = o. \qquad (b)$$

200.

Wenn die verlangte krumme Linie AMB und die beliebige krumme Linie $AM'B$ auf einer gegebenen Oberfläche gezogen seyn sollen, deren Gleichung $L = o$ ist, so müssen die als Functionen von x gegebenen Werthe von y und z, die bestimmt werden sollen, und diese um $i\delta y$ und $i\delta z$ vergrößerten Werthe, dieser Gleichung Genüge leisten; hieraus findet man

$$\frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z = o,$$

und man kann hierdurch eine der zwei Größen δy und δz aus der Gleichung (b) eliminieren, die andere verschwindet zu gleicher Zeit und man hat

$$\frac{dL}{dz}\,\frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\right)}{dx} - \frac{dL}{dy}\,\frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\right)}{dx} = o.$$

Diese letztere Gleichung und $L = o$ werden, in diesem Falle, die zwei Gleichungen der verlangten krummen Linie seyn, und können, z. B., dazu dienen, die krumme Linie des schnellsten Falles, auf einer gegebenen Oberfläche, zu bestimmen.

Soll dagegen das Minimum von U unter allen krummen Linien statt finden, die zwischen den Punkten A und B enthalten und nicht der Bedingung unterworfen sind, daſs sie sich auf irgend einer besonderen Oberfläche befinden sollen, so sind die Gröſsen δy und δz willkührlich und unabhängig von einander. Ihre Coefficienten in der Gleichung b müssen also einzeln Null seyn, und diese theilt sich daher in zwei andere, nemlich:

$$\frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = o \qquad \frac{d\left(\frac{X}{u}\frac{dz}{dx}\right)}{dx} = o.$$

dies ist der Fall, auf dessen Betrachtung ich mich beschränke.

Integriert man, und bezeichnet durch a und a' die beiden willkührlichen Constanten, so hat man

$$\frac{X}{u}\frac{dy}{dx} = a, \quad \frac{X}{u}\frac{dz}{dx} = a' \qquad (c)$$

und daher

$$a'\frac{dy}{dx} - a\frac{dz}{dx} = o.$$

Integriert man noch einmal, und bezeichnet durch γ eine dritte willkührliche Constante, so erhält man

$$a'y - az = \gamma,$$

woraus hervorgeht, dafs die verlangte krumme Linie eine ebene und in einer Ebene enthalten ist, die auf der der y und z senkrecht steht. Zur gröfseren Einfachheit nehme ich an, die Ebene dieser krummen Linie sey die der x und y, alsdann hat man

$$u = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

und man braucht blos die erste Gleichung (c) zu betrachten, welche

$$Xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

wird, woraus man

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{X^2 - a^2}} \qquad (d)$$

findet.

Es mufs daher nur noch diese Formel integriert werden, was von der Form der Function X abhängt, und alsdann mufs man a und die neue willkührliche Constante, welche durch diese Integration eingeführt wird, durch die Bedingung bestimmen, dafs die verlangte krumme Linie durch die beiden gegebenen Punkte A und B geht.

201.

Ehe wir weiter gehen, nenne man c eine beliebige Constante, und nehme an, dafs man $X + c$ an die Stelle von X in die vorhergehenden Formeln setzt. Das Integral U wird

$$U = \int_\alpha^\beta X\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,dx + c\int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,dx,$$

und der Werth von y, der es zum Minimum macht, wird durch die Gleichung

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(X+c)^2 - a^2}} \qquad (e)$$

gegeben seyn.

Da aber diese Summe zweier Integrale, welche U darstellt, unter allen krummen Linien, welche zwischen den Punkten A und B enthalten sind, ein Minimum ist, so ist es offenbar, dafs das erste Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} X \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx$$

ein Minimum seyn wird, wenn man, unter allen diesen krummen Linien, nur diejenigen betrachtet, die demselben Werthe des zweiten Integrals entsprechen.

Diese sehr einfache Bemerkung gestattet unmittelbar, auf die Aufgaben des relativen Maximum oder Minimum die Auflösungen der Aufgaben des absoluten Maximum oder Minimum auszudehnen, wir werden in der Folge eine Anwendung davon sehen.

Da hier das zweite Integral, welches in U enthalten ist, die Länge der gesuchten krummen Linie darstellt, so folgt hieraus, dafs die Gleichung (e) dazu dienen kann, unter allen isoperimetrischen krummen Linien, d. h. solchen, die gleiche Länge haben, diejenige zu bestimmen, welche dem Maximum oder Minimum des ersten Integrals entspricht. Nennt man l die gegebene Länge, welche allen krummen Linien gemeinschaftlich ist, so hat man

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx = l,$$

welcher Bedingung man, vermittelst der unbestimmten Constante c, die man in die Formel (e) eingeführt hat, Genüge leistet.

202.

Man wende jetzt die Formel (d) auf die Linie des schnellsten Falles an.

Da

$$X = \frac{1}{\sqrt{x - a}},$$

so hat man alsdann

$$dy = \frac{(x-\alpha)\,dx}{\sqrt{a(x-\alpha)-(x-\alpha)^2}},$$

indem man $\frac{1}{\sqrt{a}}$ für a setzt. Diese Differentialgleichung ist die einer Cykloide (§. 72), deren Basis horizontal ist und durch den Ausgangspunkt A des Körpers geht, und deren erzeugender Kreis a zum Durchmesser hat, was gefunden werden sollte.

Integriert man, so hat man

$$y-\alpha' = \tfrac{1}{2}a.\text{arc}\left(\cos = \frac{a-2x+2\alpha}{a}\right) - \sqrt{a(x-\alpha)-(x-\alpha)^2},$$

wo α' die willkührliche Constante ist, die den Werth von y darstellt, der $x=\alpha$ entspricht. Bezeichnet man durch β' diejenige, welche $x=\beta$ entspricht, so hat man

$$\beta'-\alpha' = \tfrac{1}{2}a.\text{arc}\left(\cos = \frac{a-2\beta+2\alpha}{a}\right) - \sqrt{a(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2}.$$

Die Coordinaten α und α', β und β', der Punkte A und B, sind gegeben, diese letztere Gleichung bestimmt die Constante a, und der vorstehende Werth von y enthält also nichts Unbekanntes mehr.

Vermittelst des Werthes von dy hat man

$$u = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-x+\alpha}},$$

also hat man (§. 198)

$$t'\sqrt{2g} = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{a}\,dx}{\sqrt{a(x-\alpha)-(x-\alpha)^2}},$$

und folglich ist

$$t' = \sqrt{\frac{a}{2g}}.\text{arc}\left(\cos = \frac{a-2\beta+2\alpha}{a}\right)$$

die kürzeste Zeit, welche der Körper brauchen kann, um von dem Punkte A nach dem Punkte B zu kommen.

Liegen die beiden Punkte in einer verticalen Linie, so hat man $\beta'=\alpha'$; dieser Bedingung kann man Genüge leisten, wenn man $a=\infty$ setzt, denn man hat

$$\text{arc}\left(\cos = \frac{a-2\beta+2\alpha}{a}\right) = \text{arc}\left(\sin = \frac{2\sqrt{a(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2}}{a}\right),$$

und wenn $a=\infty$ ist, so kann dieser Bogen durch seinen

Sinus ersetzt werden, wodurch der vorhergehende Werth von $\beta' - \alpha'$ Null wird. Zu gleicher Zeit reduciert sich der Werth von y auf α', so dafs sich der Körper nicht von der verticalen Richtung entfernt. Der Werth von t' wird auch

$$t' = \sqrt{\frac{a}{2g}} \cdot \frac{2\sqrt{a(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)^2}}{a} = \sqrt{\frac{2(\beta-\alpha)}{g}},$$

was wirklich die Zeit ist, die er braucht, um die Höhe $\beta - \alpha$ des Punktes A über dem Punkte B zu durchlaufen.

Die Bestimmung der Linie des kürzesten Falles ist blos ein Gegenstand der wissenschaftlichen Neugierde, und ich habe mich daher beschränkt, nur den einfachsten Fall zu betrachten, wo die Bewegung im leeren Raume geschieht und die äufseren Punkte gegeben sind. Sind aber diese Punkte A und B nicht fest und gegeben, sondern blos der Bedingung unterworfen, dafs sie sich auf gegebenen krummen Linien DAE und FBG oder auf gegebenen Oberflächen befinden sollen, so ist die Brachistochrone, im leeren Raume, noch immer eine Cykloide, und man kann die Coordinaten dieser zwei Punkte in allen Fällen, nach den Regeln der Variationsrechnung, bestimmen. In einem widerstehenden Mittel aber ist diese Linie eine andere krumme Linie, deren Differentialgleichung man, nach den Regeln dieser Rechnung, erhalten kann und welche von dem Gesetze des Widerstandes, in Beziehung auf die Geschwindigkeit des Körpers, abhängt. Wegen alles dessen, was die Variationsrechnung betrifft, verweise ich auf meine Abhandlung über diesen Gegenstand, die man im zwölften Bande der Abhandlungen der Pariser Akademie der Wissenschaften findet.

III. Bewegung auf einer gegebenen Oberfläche.

203.

Um ein Beispiel von der Bewegung eines materiellen Punktes auf einer gegebenen Oberfläche zu geben, nehme ich wieder das in §. 179 betrachtete einfache Pendel vor, setze aber voraus, dafs man ihm, nachdem es von der Verticalen CB (Fig. 45) entfernt und nach CA gebracht worden ist, eine Geschwindigkeit mittheilt, deren Richtung nicht in die verti-

cale Ebene ACB fällt. Das Pendel tritt alsdann aus dieser Ebene heraus, und der materielle Punkt am unteren Ende desselben wird sich auf der Oberfläche einer Kugel bewegen, die vom Punkte C aus, als Mittelpunkte, mit einem Halbmesser beschrieben ist, der der Länge a dieses Pendels gleich ist. Der Stofs, der auf diesen Körper im Anfange der Bewegung ausgeübt wird, zerlegt sich in zwei Kräfte, von welchen eine nach AC, oder nach seiner Verlängerung, gerichtet ist und durch den Widerstand des festen Punktes C aufgehoben wird, die andere senkrecht auf AC steht und die Anfangsgeschwindigkeit des Pendels hervorbringen wird, die ich durch k bezeichne. Ich nehme an, dafs die Bewegung im leeren Raume statt hat, so dafs die Schwere die einzige gegebene beschleunigende Kraft ist, welche auf den Körper wirkt.

Dies vorausgesetzt, sey, am Ende der Zeit t, CM die Lage des Pendels. Man bezeichne durch x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes M. Sey auch m die Masse des Körpers und mN die unbekannte Spannung des Fadens CM, die nach seiner Verlängerung gerichtet ist. Nimmt man den Punkt C zum Anfangspunkte der Coordinaten x, y, z, so sind die Seitenkräfte der beschleunigenden Kraft N nach ihren Verlängerungen

$$\frac{x}{a}N, \quad \frac{y}{a}N, \quad \frac{z}{a}N.$$

Bringt man aber an den Körper eine Kraft an, die N gleich und entgegengesetzt ist, so kann man ihn nachher als völlig frei ansehen, und von dem Faden CM gänzlich abstrahieren. Nimmt man daher an, dafs die Axe der positiven z vertical und im Sinne der Schwere gerichtet ist, so werden die drei Gleichungen der Schwere

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{a}N &= o \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{a}N &= o \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{a}N - g &= o \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

seyn, die mit den Gleichungen (3) des §. 151 zusammen stimmen. Man kann sie durch die Elimination der Unbekannten

N auf zwei zurück führen, und wenn man die Gleichung der Kugel damit verbindet, nemlich

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

so hat man die drei Gleichungen, welche dazu dienen, die Gröfsen x, y, z als Functionen von t zu bestimmen.

204.

Ich addiere die Gleichungen (1), nachdem sie durch x, y, z multipliciert worden sind, so erhalte ich

$$\frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} + Na - gz = o.$$

Differentiiert man die Gleichung der Kugel einmal, so hat man

$$xdx + ydy + zdz = o, \qquad (2)$$

differentiiert man noch einmal, so ergiebt sich

$$xd^2x + yd^2y + zd^2z = - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Bezeichnet man daher durch v die Geschwindigkeit des Körpers am Ende der Zeit t, so dafs man

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2$$

hat, so erhält man

$$N = \frac{v^2}{a} + \frac{gz}{a},$$

und die Spannung mN mufs die Summe der Centrifugalkraft $\frac{mv^2}{a}$ und der Seitenkraft $\frac{mgz}{a}$ des Gewichtes des Körpers nach der Verlängerung des Halbmessers CM seyn.

Ich addiere auch die Gleichungen (1), nachdem sie mit dx, dy, dz multipliciert worden sind, die Unbekannte N verschwindet in Folge der Gleichung (2) und man hat

$$\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} = gdz.$$

Integriert man, und bezeichnet durch b die willkührliche Constante, so hat man also

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2gz + b. \qquad (3)$$

Der anfängliche Werth des ersten Theils der Gleichung ist k^2, bezeichnet man daher durch γ den von z, so hat man

$$k^2 - 2k\gamma = b,$$

und, für einen gewissen Augenblick,

$$v^2 = k^2 + 2g(z - \gamma),$$

was wir schon wufsten.

Endlich multipliciere ich die zweite Gleichung (1) mit x und ziehe die erste, nachdem sie mit y multipliciert worden ist, davon ab, so ergiebt sich

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = o.$$

Integriert man daher, und bezeichnet durch c die willkührliche Constante, so hat man

$$xdy - ydx = cdt. \quad (4)$$

Auf diese Weise hängt die Auflösung der Aufgabe nur von den drei Differentialgleichungen (2), (3) und (4) ab, die von der ersten Ordnung sind, und deren erste schon die Gleichung der Kugel zum Integral hat. Man kann die Veränderlichen trennen und die Frage durch folgende Rechnungen auf die Quadraturen zurück führen.

205.

Die Gleichung (2) giebt

$$xdx + ydy = -zdz,$$

erhebt man die beiden Theile und die der Gleichung (4) auf das Quadrat und addiert die entstehenden Gleichungen zusammen, so erhält man

$$(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) = z^2dz^2 + c^2dt^2.$$

Ich setze $a^2 - z^2$ an die Stelle von $x^2 + y^2$, und eliminiere $dx^2 + dy^2$ vermittelst der Gleichung (3), hieraus folgt

$$(a^2 - z^2)[(2gz + b)dt^2 - dz^2] = z^2dz^2 + c^2dt^2,$$

woraus sich

$$dt = \frac{adz}{\sqrt{(a^2 - z^2)(2gz + b) - c^2}} \quad (5)$$

ergiebt.

Man bezeichne durch r den Radius Vector der Projection des materiellen Punktes auf die horizontale Ebene der x und y, und durch ψ den Winkel, den dieser Radius mit der Axe der x einschliefst, so hat man

$$x = r\cos\psi, \quad y = r\sin\psi, \quad xdy - ydx = r^2d\psi;$$

da $r^2 = a^2 - z^2$ ist, so wird die Gleichung (4)

$$(a^2 - z^2)\, d\psi = c\,dt,$$

und wenn man für dt seinen vorhergehenden Werth setzt, so findet man

$$d\psi = \frac{c\,a\,dz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(a^2 - z^2)(2gz + b) - c^2}} \qquad (6)$$

Die Integrale dieser Ausdrücke von dt und $d\psi$ geben die Werthe von t und ψ, in Functionen von z ausgedrückt. Sie können immer auf elliptische Functionen zurück geführt, und nur dann unter endlicher Form erhalten werden, wenn die unter dem Wurzelzeichen enthaltene Gröfse, die in Beziehung auf z vom dritten Grade ist, sich in zwei Factoren zerlegen läſst. Der Werth von ψ und die Gleichung der Kugel bestimmen die Trajectorie des Körpers, und der Werth von t als Function von z, oder der von z als Function von t, geben alsdann die Lage des Körpers auf dieser krummen Linie für jeden Augenblick.

Die Constante b ist vermöge der gegebenen Werthe von k und γ bekannt. Man bestimmt die willkührlichen Constanten, die durch die Integrationen von dt und $d\psi$ eingeführt werden, vermöge der Bedingungen, dafs $t = o$ und $\psi = o$ ist, wenn $z = \gamma$ ist, von welchen die zweite Bedingung voraussetzt, dafs man die Axe der x in die verticale Ebene ACB verlegt, von welcher das Pendel ausgeht. Es mufs daher nur noch die Constante c bestimmt werden. Da aber die Geschwindigkeit v des Körpers auf dem Halbmesser CM der Kugel senkrecht ist, auf welcher er sich bewegt, so wird, wenn man sie in zwei zerlegt, von welchen eine auf der verticalen Ebene MCB senkrecht steht, und die andere in dieser Ebene enthalten ist, die erste Seitengeschwindigkeit die Geschwindigkeit der horizontalen Projection des Körpers seyn, die auf seinem Radius Vector r senkrecht steht; bezeichnet man sie durch u, so hat man daher (§. 156)

$$u = r\frac{d\psi}{dt},$$

oder, in Folge der Gleichung (4),

$$u = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$$

Nennt man also ε den Winkel, den die Anfangsgeschwindigkeit k mit der Linie macht, die auf der Ebene ACB senkrecht steht, so dafs man im Anfange der Bewegung $u = k \cos \varepsilon$ hat, so folgt hieraus

$$c = k \sqrt{a^2 - \gamma^2} \cos \varepsilon.$$

Wenn die Geschwindigkeit k Null ist, so hat man $c = o$, $b = -2g\gamma$, und daher

$$dt = \frac{a\,dz}{\sqrt{2g}\,\sqrt{(a^2 - z^2)(z - \gamma)}},$$

was mit dem Werthe von dt des §. 185 zusammenfällt, indem man bemerkt, dafs $a - z$ und $a - \gamma$ das sind, was man in diesem Werthe ax und $a\beta$ genannt hat.

206.

Man betrachte nun den Fall insbesondere, wenn das Pendel nur sehr wenig von der Verticalen CB entfernt worden ist und eine sehr kleine Anfangsgeschwindigkeit erhalten hat. Man nehme an, diese Geschwindigkeit sey horizontal und daher senkrecht auf der Ebene ACB, so dafs $\varepsilon = o$ ist. Man bezeichne durch β einen sehr kleinen Bruch und setze

$$k = \beta \sqrt{ga}.$$

Seyen auch α und ϑ die Winkel ACB und MCB, vernachlässigt man ihre vierten Potenzen, so hat man

$$\gamma = a - \tfrac{1}{2} a \alpha^2, \qquad z = a - \tfrac{1}{2} a \vartheta^2$$

$$b = -2ga + ga(\alpha^2 + \beta^2), \quad c^2 = g a^3 \alpha^2 \beta^2$$

und die Formeln (5) und (6) werden

$$\left.\begin{aligned} dt &= -\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{(\alpha^2 - \vartheta^2)(\vartheta^2 - \beta^2)}} \\ d\psi &= -\frac{\alpha\beta\,d\vartheta}{\vartheta\sqrt{(\alpha^2 - \vartheta^2)(\vartheta^2 - \beta^2)}} \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Der Winkel ψ giebt die Lage der verticalen Ebene MCB an, in welcher das Pendel sich in jedem Augenblicke befindet, er kann unbegränzt wachsen. Der Winkel ϑ bestimmt ebenfalls, in jedem Augenblicke, die Lage des Pendels in dieser veränderlichen Ebene. Man kann ihn als eine positive Gröfse betrachten, und die Lagen des Pendels, die auf beiden Seiten

gleich weit von der Verticalen CB abstehen, entsprechen demselben Winkel ϑ und Werthen von ψ, die um 180° von einander verschieden sind.

Aus dem Werthe von $\frac{d\vartheta}{dt}$, der aus der ersten Gleichung (a) abgeleitet ist, sieht man, dafs der Winkel ϑ immer zwischen α und β enthalten ist. Hat man $\beta = \alpha$, so hat man immer $\vartheta = \alpha$; dividiert man eine der Gleichungen (a) durch die andere, so hat man in allen Fällen

$$d\psi = \sqrt{\frac{g}{a}} . \frac{\alpha\beta}{\vartheta^2} dt, \qquad (b)$$

ist $\vartheta = \alpha = \beta$, so hat man daher

$$\psi = t \sqrt{\frac{g}{a}},$$

folglich beschreibt das Pendel alsdann gleichförmig einen geraden Kegel mit kreisrunder Grundfläche, und die Zeit einer ganzen Umdrehung ist $2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$, das heifst dieselbe, wie die einer doppelten Schwingung in der verticalen Ebene ACB. Zwei Pendel, die dieselbe Länge a haben, und zu gleicher Zeit von derselben geraden Linie CA ausgehen, das eine ohne Anfangsgeschwindigkeit, und das andere mit einer Geschwindigkeit, die auf der Ebene ACB senkrecht steht und gleich $\alpha \sqrt{ga}$ ist, kommen zu gleicher Zeit nach dieser geraden Linie CA zurück.

207.

Man kann den Werth von dt unter der Form

$$dt = -2 \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{\vartheta d\vartheta}{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)^2 - (2\vartheta^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2}}$$

darstellen

Ich setze zur Vereinfachung

$$2\vartheta^2 - \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2) x, \quad 4\vartheta d\vartheta = (\alpha^2 - \beta^2) dx,$$

die Wurzelgröfse wird $\pm (\alpha^2 - \beta^2) \sqrt{1 - x^2}$, und es folgt hieraus

$$dt = \mp \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Da $\vartheta = \alpha$ und $x = 1$ ist, wenn $t = o$ ist, so findet man hieraus

$$t = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{g}} \text{ arc} (\cos = x),$$

und umgekehrt

$$x = \cos 2\, t \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Man hat daher in einem gewissen Augenblicke

$$\vartheta^2 = \tfrac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) + \tfrac{1}{2} (\alpha^2 - \beta^2) \cos 2\, t \sqrt{\frac{g}{a}},$$

woraus hervorgeht, daſs das Pendel in der veränderlichen Ebene MCB gleichzeitige Schwingungen machen wird, deren Gränzpunkte den Werthen $\vartheta = \alpha$ und $\vartheta = \beta$ entsprechen, und deren Dauer $\tfrac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ oder die Hälfte einer Schwingung in der festen Ebene ACB seyn wird.

Ich substituiere diesen Werth von ϑ^2 in die Gleichung (b), indem ich bemerke, daſs

$$\cos 2\, t \sqrt{\frac{g}{a}} = \cos^2 t \sqrt{\frac{g}{a}} - \sin^2 t \sqrt{\frac{g}{a}}$$

ist, hieraus folgt

$$d\psi = \sqrt{\frac{g}{a}} \frac{\alpha \beta d t}{\alpha^2 \cos^2 t \sqrt{\frac{g}{a}} + \beta^2 \sin^2 t \sqrt{\frac{g}{a}}}$$

und da $\psi = o$ ist, wenn $t = o$ ist, so schlieſst man hieraus, daſs

$$\alpha \text{ tang } \psi = \beta \text{ tang } t \sqrt{\frac{g}{a}}$$

ist. Hiernach wird die Bewegung der Ebene MCB nicht mehr gleichförmig seyn, wie in dem Falle, wenn $\alpha = \beta$ ist, man sieht aber, daſs diese Ebene allmälich die vier Viertel einer ganzen Umdrehung in Zeiten vollenden wird, die unter sich und der Zeit $\tfrac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$, während welcher das Pendel eine Schwingung in dieser veränderlichen Ebene macht, gleich sind.

Aus dieser letzten Gleichung findet man

$$\cos^2 \psi = \frac{\alpha^2 \cos^2 t \sqrt{\frac{g}{a}}}{\alpha^2 \cos^2 t \sqrt{\frac{g}{a}} + \beta^2 \sin^2 t \sqrt{\frac{g}{a}}}$$

$$\sin^2\psi = \frac{\beta^2 \sin^2 t \sqrt{\frac{g}{a}}}{\alpha^2 \cos^2 t \sqrt{\frac{g}{a}} + \beta^2 \sin^2 t \sqrt{\frac{g}{a}}},$$

Auch hat man

$$x^2 = (a^2 - z^2) \cos^2 \psi = a^2 \vartheta^2 \cos^2 \psi$$

$$y^2 = (a^2 - z^2) \sin^2 \psi = a^2 \vartheta^2 \sin^2 \psi$$

nach dem genährten Werthe von z; also haben wir, da

$$\vartheta^2 = \alpha^2 \cos^2 t \sqrt{\frac{g}{a}} + \beta^2 \sin^2 t \sqrt{\frac{g}{a}}$$

ist,

$$x^2 = a^2 \alpha^2 \cos^2 \psi, \quad y^2 = a^2 \beta^2 \sin^2 \psi,$$

und daher

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = a^2,$$

woraus hervorgeht, dafs die Trajectorie der Projection des Körpers auf die horizontale Ebene, die durch den Punkt C geht, eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt in diesem Punkte und deren eine Axe in der Ebene ACB liegt, von welcher das Pendel mit einer Geschwindigkeit ausgeht, die auf dieser Ebene senkrecht steht.

Sechstes Kapitel.

Beispiele der Bewegung eines völlig freien Körpers.

I. Bewegung der Wurfgeschosse.

208.

In diesem Abschnitte werden wir uns besonders mit den Wurfgeschossen der Artillerie beschäftigen, die mit großen Geschwindigkeiten fortgetrieben werden, und der Schwere, so wie dem Widerstande der Luft, unterworfen sind.

Man nehme zuerst keine Rücksicht auf diesen Widerstand, und betrachte einen schweren materiellen Punkt, der vom Punkte O (Fig. 48) mit einer Geschwindigkeit a, die nach der geraden Linie OA gerichtet ist, ausgeht. Offenbar wird der Körper nicht aus der verticalen Ebene heraustreten, die durch diese gerade Linie geht. Sey OMD seine Trajectorie in dieser Ebene, welche OA berührt. In derselben Ebene ziehe man zwei Axen Ox und Oy, die erste horizontal, die zweite vertical und der Schwere entgegengesetzt gerichtet. Man nehme diese Axen für die der Coordinaten; am Ende einer beliebigen Zeit t sey M die Lage des Körpers, x seine Abscisse OP, und y seine Ordinate PM. Man bezeichne durch g die Schwere. Endlich nenne man α den spitzen Winkel AOx, welchen die Anfangsgeschwindigkeit a mit der Axe Ox einschliefst, so dafs ihre Seitengeschwindigkeiten $a \cos \alpha$ nach dieser Axe und $a \sin \alpha$ nach der Axe Oy gerichtet sind. Der Winkel α würde negativ seyn, wenn die Linie OA unter Ox läge.

Nach dem, was man in §. 148 gesehen hat, sind die Bewegungen der Projectionen des Körpers auf den beiden Axen Ox und Oy von einander unabhängig; die Bewegung der horizontalen Projection ist daher gleichförmig und rührt von der Geschwindigkeit $a \cos \alpha$ her, und die der verticalen Projection rührt von der Anfangsgeschwindigkeit $a \sin \alpha$ und der

beständigen Kraft g her, die in entgegengesetztem Sinne dieser Geschwindigkeit wirkt. Daher hat man

$$x = t\,a \cos\alpha, \quad y = t\,a \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

und wenn man t eliminiert, und annimmt, dafs die Geschwindigkeit a zur Höhe h gehört, so dafs $a = \sqrt{2gh}$ ist, so folgt hieraus

$$y = x \tang\alpha - \frac{x^2}{4h\cos^2\alpha}$$

für die Gleichung der Trajectorie.

Diese krumme Linie ist daher eine Parabel, deren grofse Axe vertical ist, ihre Spitze, die durch die Gleichung $\frac{dy}{dx} = o$ bestimmt wird, entspricht den Werthen

$$x = 2h \sin\alpha \cos\alpha, \quad y = h \sin^2\alpha,$$

und sie trifft die Axe Ox in einem zweiten Punkte B, der so beschaffen ist, dafs, wenn man den Abstand OB mit b bezeichnet,

$$b = 4h \sin\alpha \cos\alpha = 2h \sin 2\alpha$$

ist. Dieser Abstand b ist das, was man die Wurfweite nennt. Im leeren Raume entspricht ihr Maximum, wie man sieht, dem Werthe $\alpha = 45^0$ und ist $= 2h$, das heifst gleich dem Doppelten der Höhe, die zur Anfangsgeschwindigkeit gehört.

Nennt man v die Geschwindigkeit des Körpers am Ende der Zeit t, und substituiert man die Differentiale der vorhergehenden Werthe von x und y in die Gleichung

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2},$$

so folgt hieraus

$$v^2 = a^2 - 2agt \sin\alpha + g^2 t^2.$$

Die Zeit, welche der Körper braucht, um im Punkte B anzukommen, wenn er die krumme Linie OCB beschreibt, ist dieselbe, als wenn er die gerade Linie OB mit der Geschwindigkeit $a \cos\alpha$ beschriebe, sie ist daher

$$t = \frac{b}{a\cos\alpha} = \frac{4h\sin\alpha}{a},$$

und da $h = \frac{a^2}{2g}$ ist, so folgt hieraus $gt = 2a \sin\alpha$, was $v^2 = a^2$ giebt. Die Geschwindigkeit ist daher im Punkte B

dieselbe, wie im Punkte O, sie ist nach der Tangente BE gerichtet, und der Fallwinkel EBx ist derselbe, wie der Wurfwinkel AOx.

Wenn der geworfene Gegenstand nicht ein materieller Punkt, sondern ein fester Körper, von beliebiger Gestalt und beliebigen Dimensionen, ist, so müssen die Gleichungen der parabolischen Bewegung, wie sich in der Folge zeigen wird, auf seinen Schwerpunkt bezogen werden.

209.

Ist die Geschwindigkeit a gegeben, und man will den Winkel α erfahren, unter welchem der Körper geworfen werden muſs, um einen bestimmten Punkt zu erreichen, dessen Coordinaten $x = \beta$ und $y = \gamma$ sind, so setze man diese Werthe in die Gleichung der Trajectorie, und man erhält

$$\gamma = \beta \tang \alpha - \frac{\beta^2}{4h \cos^2 \alpha}$$

um α zu bestimmen. Setzt man

$$\tang \alpha = z, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + z^2},$$

so wird diese Gleichung

$$4h\gamma + \beta^2 - 4h\beta z + \beta^2 z^2 = o,$$

woraus man

$$z = \frac{2h}{\beta} \pm \frac{1}{\beta} \sqrt{4h^2 - 4h\gamma - \beta^2}$$

findet.

Dieser doppelte Werth von z oder der Tangente von α zeigt uns, daſs man ein gegebenes Ziel erreichen kann, indem man unter zwei verschiedenen Richtungen schieſst, so lange nemlich $4h^2$ gröſser als $4h\gamma + \beta^2$ ist, daſs diese zwei Richtungen sich auf eine reducieren, wenn diese beiden Gröſsen gleich sind, und daſs man das Ziel unter keiner Richtung erreichen kann, sobald $4h^2$ kleiner als $4h\gamma + \beta^2$ ist.

Zeichnet man daher in der verticalen Ebene, die durch die anfängliche Richtung des Körpers geht, die Parabel, deren Gleichung

$$4h\gamma + \beta^2 = 4h^2$$

ist, so theilt diese krumme Linie die Ebene in zwei Theile, so daſs alle Punkte des äuſseren Theils nie erreicht werden

können, dafs dagegen die des inneren Theils auf zwei verschiedene Weisen und die der Trennungslinie nur auf eine Weise erreicht werden können.

210.

Die Theorie der Bewegung der Wurfgeschosse wäre also sehr einfach, wenn man den Widerstand, den die Luft ihrer Bewegung entgegensetzt, vernachlässigen könnte. Aber in dem Falle, mit welchem wir uns jetzt beschäftigen, wo die Geschwindigkeiten sehr grofs seyn sollen, ist diese Kraft viel zu beträchtlich, als dafs man sie unberücksichtigt lassen könnte. Sie ändert die Gestalt der Trajectorie und die Gesetze der Bewegung auf dieser krummen Linie gänzlich, wie dies nun gezeigt werden soll.

Wie auch die Gestalt und die Dimensionen des geworfenen Körpers beschaffen seyn mögen, immer wird sein Schwerpunkt, wie in einem folgenden Kapitel gezeigt werden soll, dieselbe Bewegung haben, wie ein schwerer materieller Punkt, dessen Masse der des Körpers gleich ist, der eine, der Gröfse und Richtung nach gegebene, Anfangsgeschwindigkeit hat, und an welchen man aufserdem, parallel mit sich selbst, die Kräfte anbringt, welche von dem Widerstand und der Reibung der Luft herrühren, die an der Oberfläche des festen Körpers wirken. Auch wird man sehen, dafs die bewegende Kraft, welche von diesen, an den Schwerpunkt angebrachten, Widerständen herrührt, zuweilen diesen Punkt aus der verticalen Ebene heraus bringen kann, die durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit gezogen ist. Hier aber nehmen wir an, dafs dieser Fall nicht statt hat, und dafs die bewegende Kraft, von welcher die Rede ist, immer die Trajectorie des Schwerpunktes berührt. Dies angenommen, behalte man, um die Gleichungen der Bewegung zu bilden, alle vorhergehenden Bezeichnungen bei, und nehme an, dafs sie sich jetzt auf die Figur 49 beziehen, wo die Trajectorie OMD keine Parabel mehr ist. Aufserdem sey s der Bogen OM, den der Körper am Ende der Zeit t beschrieben hat, und R die bewegende Kraft, welche vom Widerstande der Luft herrührt, der nach dem Theile MT der Tangente des Punktes M gerichtet ist. Die Cosinus der Winkel, welche diese Linie MT

mit den Axen macht, die durch den Punkt M, nach den Richtungen der positiven x und y gezogen sind, werden $-\frac{dx}{ds}$ und $-\frac{dy}{ds}$ seyn; nennt man m die Masse des geworfenen Körpers, und g die Schwere, so hat man daher

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{R}{m} \cdot \frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{R}{m}\frac{dy}{ds}$$

als die Gleichungen der Bewegung seines Schwerpunktes.

Ich nehme an, der geworfene Körper sey eine Kugel, die entweder aus einer gleichartigen Masse oder aus concentrischen Schichten besteht, von welchen jede gleichartig ist. Nennt man D ihre mittlere Dichtigkeit und r ihren Halbmesser, so hat man

$$m = \frac{4\pi D r^3}{3}.$$

Ich nehme auch, nach den allgemein angenommenen Hypothesen, an, daſs die Kraft R dem Quadrate der Geschwindigkeit des Schwerpunktes, der Oberfläche des geworfenen Körpers und der Dichtigkeit der Luft proportional ist; hieraus folgt

$$\frac{R}{m} = \frac{n\varrho}{Dr}\frac{ds^2}{dt^2},$$

wo ϱ diese Dichtigkeit und n ein numerischer Factor ist, der durch die Erfahrung bestimmt seyn muſs. Dieser Ausdruck leistet der Bedingung Genüge, daſs die Gröſsen homogen seyn müssen, denn $\frac{R}{m}$ und das Verhältniſs von $\frac{ds^2}{dt^2}$ zu r sind zwei Gröſsen von derselben Art, wie die Schwere g, und die Factoren n und $\frac{\varrho}{D}$ sind abstracte Zahlen. Zur gröſseren Bequemlichkeit setze ich

$$\frac{n\varrho}{Dr} = c,$$

so daſs $\frac{1}{c}$ eine Linie ist, deren Länge gegeben ist und die ich als eine beständige Gröſse betrachte, indem ich die Veränderung der Dichtigkeit in der Luftmasse, durch welche der Körper geht, unberücksichtigt lasse.

211.

Setzt man statt $\frac{R}{m}$ seinen Werth $c\,\frac{ds^2}{dt^2}$, so werden die zwei Gleichungen der Bewegung

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{ds}{dt}\,\frac{dx}{dt} &= o \\ \frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{ds}{dt}\,\frac{dy}{dt} + g &= o \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Das Integral der ersten ist

$$\frac{dx}{dt} = a \cos \alpha\; e^{-cs}$$

indem man bemerkt, daſs man $\frac{dx}{dt} = a \cos \alpha$, am Punkte O, wo $s = o$ ist, hat, und durch e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Da sich die Form der zweiten Gleichung von der der ersten nur durch ihr letztes Glied unterscheidet, so setze ich, um zu integrieren,

$$\frac{dy}{dt} = p\,\frac{dx}{dt},$$

wo p eine neue unbekannte Gröſse ist. Substituiert man diesen Werth von $\frac{dy}{dt}$ in die zweite Gleichung (1) und berücksichtigt die erste, so erhält man

$$\frac{dx}{dt}\,\frac{dp}{dt} = -g.$$

Ich dividiere diesen Werth durch das Quadrat von $\frac{dx}{dt}$, oder seines vorhergehenden Werthes, hieraus folgt

$$\frac{dp}{dt} : \frac{dx}{dt} = -\frac{g\,e^{2cs}}{a^2 \cos^2 \alpha}.$$

Betrachtet man y und p als Functionen von x, so hat man

$$p = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx},\quad \frac{dp}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dx}.$$

Setzt man daher noch immer $a^2 = 2gh$, so wird die vorhergehende Gleichung

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{2h \cos^2 \alpha}\, e^{2cs} \qquad (2)$$

und dies ist die Differentialgleichung der Trajectorie.

Man hat identisch

$$\sqrt{1+p^2}\,dx = ds,$$

multipliciert man daher die ersten und zweiten Theile der zwei letzten Gleichungen mit einander, so hat man daher

$$\sqrt{1+p^2}\,dp = -\frac{ds}{2h\cos^2\alpha}e^{2cs}$$

und hieraus folgt, wenn man integriert und durch γ die willkührliche Constante bezeichnet,

$$p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) = \gamma - \frac{1}{2ch\cos^2\alpha}e^{2cs}. \quad (3)$$

Um γ zu bestimmen, setze man, zu gleicher Zeit, $s=o$ und $p = \text{tang}\,\alpha$. Dies giebt

$$\gamma = \frac{1}{2ch\cos^2\alpha} + \text{tang}\,\alpha\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha} + \log(\text{tang}\,\alpha + \sqrt{1+\text{tang}^2\alpha})$$

zur Abkürzung werde ich aber γ statt dieses Werthes beibehalten.

Nach den vorhergehenden Gleichungen hat man

$$dx = -2h\cos^2\alpha\, e^{-2cs}\,dp,\quad dy = p\,dx,\quad g\,dt^2 = -dx\,dp,$$

eliminiert man die Exponentialgröſse vermittelst der Gleichung (3), so hat man daher

$$c\,dx = \frac{dp}{p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) - \gamma},$$

$$c\,dy = \frac{p\,dp}{p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) - \gamma}$$

$$\sqrt{cg}\,dt = \frac{-dp}{[\gamma - p\sqrt{1+p^2} - \log(p+\sqrt{1+p^2})]^{\frac{1}{2}}},$$

welche Formeln nicht unter endlicher Gestalt integriert werden können; in der letzten betrachtet man die Wurzelgröſse wie eine positive Gröſse, weil der Winkel, dessen Tangente p ist, abnimmt, wenn die Zeit zunimmt.

212.

Nennt man diesen Winkel ω, d. h. die Neigung MTx der Tangente der Trajectorie gegen die horizontale Axe Ox, so hat man

$$p = \text{tang}\,\omega,\quad dp = \frac{d\omega}{\cos^2\omega}.$$

Die Werthe von x, y, t, welche aus den Gleichungen (4) abgeleitet sind, werden die Form $\int \Omega d\omega$ haben, wenn das Integral so genommen wird, dafs es im Punkte O, wo man $\omega = \alpha$ hat, verschwindet, und Ω eine gegebene Function von ω bezeichnet. Man kann diese drei Werthe, für jeden Punkt M, nach der Methode der Quadraturen (§. 15) berechnen. Auf diese Weise kann man die Trajectorie durch einzelne Punkte construieren, und kennt die Zeit t, welche der Körper braucht, um jeden Bogen OM zu beschreiben, dessen Länge s durch die Gleichung (3) gegeben ist. Was die Geschwindigkeit des Körpers im Punkte M betrifft, so hat man.

$$v^2 = (1 + p^2) \frac{dx^2}{dt^2} = g^2 (1 + p^2) \frac{dt^2}{dp^2},$$

und daher

$$cv^2 = \frac{g(1+p^2)}{\gamma - p\sqrt{1+p^2} - \log(p + \sqrt{1+p^2})}. \quad (5)$$

Dehnt man diese Integrale bis zu $\omega = o$ aus, so bestimmt man die Abscisse und Ordinate des höchsten Punktes C der Trajectorie. Giebt man alsdann ω negative Werthe, so bestimmt man die Punkte des absteigenden Zweiges CBD der Trajectorie. Ist man bis zu einem Werthe $-\alpha'$ von ω gekommen, für welchen die Ordinate y der Trajectorie Null ist, so giebt der entsprechende Werth von x die Wurfweite OB an, welche nicht mehr das Doppelte der Abscisse des Punktes C seyn wird, wie im leeren Raume, und deren Maximum, in Beziehung auf α, einem Winkel entsprechen wird, der kleiner als 45° ist und von der Gröfse der Anfangsgeschwindigkeit abhängt. Der Winkel α' oder EBx und die Geschwindigkeit im Punkte B werden ebenfalls von α und a verschieden seyn.

Auf diese Weise sind alle Umstände der Bewegung bekannt, und die Aufgabe ist vollständig gelöst, abgesehen von den grofsen Rechnungen, die man in jedem Falle ausführen mufs, wenn die Werthe der drei beständigen, in den vorhergehenden Formeln enthaltenen Gröfsen h, α, c, gegeben sind.

213.

Die Bewegung des Körpers auf dem niedersteigenden Zweige der Trajectorie nähert sich immer mehr und mehr der gleichförmigen und verticalen Bewegung.

Seyen nemlich x_1, y_1, t_1, die Werthe von x, y, t, die dem höchsten Punkte C entsprechen; man verlege den Anfangspunkt der Coordinaten in diesen Punkt und setze

$$x = x_1 + x', \quad y = y_1 - y', \quad t = t_1 + t',$$

so dafs x' und y' die Abscisse und Ordinate eines beliebigen Punktes M' (Fig. 50) des niedersteigenden Zweiges seyen, die auf die horizontale Axe Cx' und die Axe Cy', welche im Sinne der Schwere gerichtet ist, bezogen sind, und t die Zeit bezeichnet, welche zur Durchlaufung des Bogens CM' angewandt wird. Auch sey p' die Tangente des Winkels $M'T'x'$, welchen die Linie, die die krumme Linie im Punkte M' berührt, mit der Axe Cx' macht. Alsdann hat man

$$p' = \frac{dy'}{dx'} = -p,$$

und da

$$\log(\sqrt{1+p'^2} - p') = -\log(p' + \sqrt{1+p'^2})$$

ist, so wird die erste Gleichung (4)

$$cdx' = \frac{dp'}{P'},$$

indem man zur Abkürzung

$$\gamma + p'\sqrt{1+p'^2} + \log(p' + \sqrt{1+p'^2}) = P'$$

setzt. Der spitze Winkel $M'T'x'$ kann sich immer mehr einem rechten nähern, und die Veränderliche p' wird daher unbegränzt wachsen; dies wird aber in Beziehung auf x' nicht der Fall seyn. Für sehr grofse Werthe von p' kann man p' an die Stelle von $\sqrt{1+p'^2}$ setzen, und indem man $\gamma + \log 2$ gegen p'^2 vernachlässigt, so hat man

$$P' = p'^2 + \tfrac{1}{2}\log p'^2,$$

oder einfach $P' = p'^2$, indem man bemerkt, dafs der Logarithme einer sehr bedeutenden Gröfse p'^2 und um so mehr $\frac{1}{2}\log p'^2$ sehr klein im Verhältnifs zu dieser Gröfse ist.

Man hat daher für diese Werthe von p'

$$dx' = \frac{dp'}{cp'^2}.$$

Integriert man, und bezeichnet man durch C eine beständige Gröfse, so folgt hieraus

$$x' = C - \frac{1}{cp'},$$

woraus hervorgeht, daſs die Werthe von x' nicht unbegränzt mit denen von p' wachsen. Dies vorausgesetzt, sey

$$q = \frac{1}{c}\int_0^\infty \frac{dp'}{P'},$$

q wird eine Linie von endlicher Gröſse seyn, die man nach der Methode der Quadraturen berechnen kann, und wenn man auf Cx' eine Länge CA nimmt, die dieser Linie gleich ist, so wird die verticale Linie AB, die durch diesen Punkt gezogen ist, eine Asymptote des Theils CD der Trajectorie seyn, so daſs die Bewegung des Körpers, auf dem niedersteigenden Zweige, sich unbegränzt der verticalen Richtung nähert.

Man bemerke auſserdem, daſs die beiden letzten Gleichungen (4), für sehr groſse Werthe von p' in

$$cdy' = \frac{dp'}{p'}, \quad \sqrt{cg}\, dt' = \frac{dp'}{p'}$$

übergehen, woraus sich

$$\frac{dy'}{dt'} = \sqrt{\frac{g}{c}}$$

ergiebt, daher wird die letzte und verticale Bewegung des Körpers gleichförmig seyn, was zu beweisen war. Die Geschwindigkeit dieser Bewegung ist die, welche ein schwerer Körper erreicht, der im leeren Raume, von einer Höhe, die gleich $\frac{1}{2c}$ ist, fällt, und dies kann man auch aus der Formel (5) schlieſsen, indem man $-p'$ statt p setzt, und alsdann p' als eine sehr bedeutende Gröſse betrachtet.

Setzt man in der ersten Gleichung (4)

$$p = \text{tang}\,\omega, \quad dp = \frac{d\omega}{\cos^2\omega},$$

und zur Abkürzung

$$[y - \text{tang}\,\omega\sqrt{1+\text{tang}^2\omega} - \log(\text{tang}\,\omega + \sqrt{1+\text{tang}^2\omega})]\cos^2\omega = \frac{1}{\Omega},$$

so findet man hieraus

$$x_1 = \frac{1}{c}\int_0^\alpha \Omega\, d\omega$$

für die Abscisse des Punktes C. Nimmt man daher auf Ox (Fig. 49) einen Punkt F, so daſs man

$$OF = x_1 + q$$

hat, so ist die Verticale FG, die durch den Punkt F gezogen ist, die Asymptote des niedersteigenden Zweiges der Trajectorie.

214.

Sey ON die Verlängerung der Trajectorie OCD; da O der Ausgangspunkt des Körpers ist, so wird die Bewegung nicht auf diesem Theile der krummen Linie statt finden. Dessen ungeachtet kann man verlangen seine Gestalt zu kennen. Man kann aber diesen Theil, vermittelst der zwei ersten Formeln (4), durch Punkte construieren, indem man p positive Werthe giebt, die gröfser als tang α sind, und es ist leicht zu erkennen, dafs er ebenfalls eine Asymptote haben wird, die aber nicht, wie bei dem niedersteigenden Zweige, vertical ist.

Zu diesem Zwecke bemerke ich, dafs es, nach dem Werthe von γ in §. 211, immer einen spitzen Winkel β, der gröfser als α ist, giebt, so beschaffen, dafs $p = \text{tang}\,\beta$ den gemeinschaftlichen Nenner dieser Formeln auf Null reduciert, d. h. einen Winkel, welcher der Gleichung

$$\gamma - \text{tang}\,\beta\sqrt{1+\text{tang}\,\beta^2} - \log(\text{tang}\,\beta + \sqrt{1+\text{tang}^2\beta}) = o \quad (6)$$

Genüge leistet. Dies voraus gesetzt, findet man aus dem Werthe von dp, welcher aus einer oder der anderen der zwei ersten Gleichungen (4) abgeleitet ist, dafs, während die Abscisse x und die Ordinate y, abgesehen von dem Zeichen, in diesem Theile ON der krummen Linie unbegränzt wachsen, die Gröfse p zu wachsen aufhört, wenn sie nur unendlich wenig von tang β verschieden ist, so dafs p nie den Werth $p = \text{tang}\,\beta$ übersteigen oder nur genau erreichen kann. Dies beweist, dafs der Zweig ON der krummen Linie eine Asymptote hat, welche die Verlängerung der Axe Ox unter dem Winkel β schneidet. Man kann deren Abstand vom Punkte O auf folgende Weise bestimmen.

Ich ziehe durch den Punkt O eine Axe, die mit der Verlängerung von Ox einen Winkel einschliefst, welcher dem Complemente von β gleich ist und daher auf der Asymptote von ON senkrecht steht. Ich nenne u die Abscisse eines beliebigen Punktes der krummen Linie, welche auf dieser Axe, vom Punkte O aus, gerechnet wird; sind die Coordi-

naten dieses Punktes, in Beziehung auf die Axen Ox und Oy, noch immer x und y, so hat man

$$u = y \cos\beta - x \sin\beta.$$

Differentiiert man, und setzt für dx und dy ihre Werthe, die durch die zwei ersten Gleichungen (4) gegeben sind, so erhält man

$$c\,du = \frac{(\tang\beta - p)\,dp\,.\cos\beta}{[y - p\sqrt{1+p^2} - \log(p + \sqrt{1+p^2})]},$$

in welcher Formel man p gröfsere oder kleinere Werthe als $\tang\alpha$ giebt, je nachdem man einen Punkt des Theils ON oder des Theils OM der krummen Linie betrachtet. Man kann vom Nenner dieses Ausdruckes den ersten Theil der Gleichung (6) abziehen (nachdem man ihn mit $\cos\beta$ multipliciert hat) *), setzt man aufserdem

$$p = \tang\omega, \quad dp = \frac{d\omega}{\cos^2\omega},$$

und zur Abkürzung

$$\tang\beta\sqrt{1+\tang^2\beta} + \log(\tang\beta + \sqrt{1+\tang^2\beta})$$
$$- \tang\omega\sqrt{1+\tang^2\omega} - \log(\tang\omega + \sqrt{1+\tang^2\omega}) = U$$

so folgt hieraus

$$du = \frac{(\tang\beta - \tang\omega)\,d\omega}{c\,U\cos^2\omega}\cos\beta.$$

Setzt man aber

$$r = \frac{\cos\beta}{c}\int_\alpha^\beta \frac{(\tang\beta - \tang\omega)}{U\cos^2\omega}\,d\omega,$$

so ist r eine Linie von endlicher Gröfse, die man nach der Methode der Quadraturen berechnen kann, und die den Werth von u in Beziehung auf die Asymptote ON, d. h. die Länge der senkrechten Linie, die vom Punkte O auf diese gerade Linie gefällt wird, ausdrückt, was gefunden werden sollte.

Die Gleichung dieser asymptotischen geraden Linie ist

$$y\cos\beta - x\sin\beta = r,$$

so dafs, wenn man auf der Verlängerung von Ox einen Punkt H nimmt, der Art, dafs man

$$OH = \frac{r}{\sin\beta}$$

*) Die hier eingeklammerten Worte, welche im Originale stehen, müssen gestrichen werden. Anmerk. des Uebers.

hat, die Asymptote des Zweiges ON die gerade Linie HK seyn wird, die durch den Punkt H gezogen ist, und mit der Verlängerung von Ox einen Winkel KHO einschliefst, der das Supplement von β ist. Die beiden Asymptoten FG und HK, treffen sich, wenn sie über die Axe Ox hinaus verlängert werden, in einem Punkte L, so dafs die krumme Linie ganz in dem Winkel KLG enthalten seyn wird, dessen Ergänzung der durch die Gleichung (6) bestimmte Winkel β ist.

215.

Wenn der Wurfwinkel AOx oder α sehr klein ist (Fig. 51), so erhebt sich der Körper nur zu einer kleinen Höhe über die horizontale Axe Ox, welche durch seinen Ausgangspunkt gezogen ist. In diesem Falle kann man aber, mit hinlänglicher Annäherung, die Gleichung des Theils OCB der Trajectorie, der über Ox liegt, in x und y ausgedrückt finden, und man kann diese Gleichung selbst bis zu einem Punkte D ausdehnen, dessen Abstand von dieser Axe nicht sehr beträchtlich ist.

Denn in dem ganzen Theile OCB oder auch OCD der Trajectorie, ist die Tangente der krummen Linie beinahe horizontal, und die Gröfse p sehr unbedeutend. Vernachlässigt man daher das Quadrat von p, so hat man

$$ds = dx, \quad s = x$$

und die Gleichung (2) wird

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2h\cos^2\alpha}e^{2cx}.$$

Integriert man zweimal nach einander und bestimmt die willkührlichen Constanten, so dafs man $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\alpha$ hat, und $y = o$ ist, wenn $x = o$ ist, so erhält man

$$y = x\operatorname{tang}\alpha - \frac{1}{8c^2h^2\cos^2\alpha}(e^{2cx} - 2cx - 1)$$

für die genäherte Gleichung der Trajectorie, die man erhalten wollte. Entwickelt man die Exponentialgröfse, die sie enthält, reduciert man, und setzt alsdann $c = o$, so wird sie die genau richtige Gleichung dieser krummen Linie im leeren Raume.

Nach der Gleichung $gdt^2 = -dxdp$ des §. 212 und dem vorhergehenden Werthe von $\frac{dp}{dx}$, hat man

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2gh}\cos\alpha} e^{cx} dx$$

und daher

$$t = \frac{1}{c\sqrt{2gh} \cdot \cos\alpha} (e^{cx} - 1)$$

wodurch man den Werth der Zeit t erfährt, welche der Körper braucht, um einen beliebigen Theil OM der krummen Linie OCD zu durchlaufen.

216.

Man nehme an, der Körper falle in dem Punkte D auf den Boden nieder; man bezeichne durch λ den Abstand dieses Punktes von der horizontalen Ebene, die durch den Punkt O gelegt ist, oder die Linie DQ, die senkrecht auf der Axe Ox steht. Sey auch l der Abstand OQ, und τ die Zeit die er braucht, um vom Punkte O nach dem Punkte D zu gehen, so hat man, zu gleicher Zeit,

$$x = l, \quad y = -\lambda, \quad t = \tau,$$

und wenn man, zu gröfserer Einfachheit, in den vorhergehenden Formeln, $\cos^2\alpha$ durch die Einheit ersetzt, so folgt hieraus

$$\left.\begin{array}{r} 8c^2 h(\lambda + l \operatorname{tang} \alpha) = e^{2cl} - 2cl - 1 \\ \tau c\sqrt{2gh} = e^{cl} - 1 \end{array}\right\} \quad (a)$$

Wenn daher die beiden beständigen Gröfsen h und c gegeben sind, und man den Winkel α und die Höhe λ des Punktes O über dem Boden gemessen hat, so geben diese Gleichungen die horizontale Wurfweite l und die Dauer τ des Laufes des Körpers an. Kennt man umgekehrt α, λ, l, τ durch directe Messungen, so können diese Gleichungen dazu dienen, um den Coefficienten c des Widerstandes und die Höhe h, die zur Anfangsgeschwindigkeit gehört, zu bestimmen. Eliminiert man h, so hat man

$$4(\lambda + l \operatorname{tang} \alpha)(e^{cl} - 1)^2 = g\tau^2 (e^{2cl} - 2cl - 1),$$

aus welcher Gleichung man den Werth von c findet; die eine der zwei vorhergehenden Gleichungen giebt alsdann unmittelbar den Werth von h.

Es herrscht noch Ungewifsheit über die Gröfsen der Wurfweiten und der Anfangsgeschwindigkeiten. Nach Lombard

ist die Anfangsgeschwindigkeit bei einem 24 Pfünder, der mit dem dritten Theile des Gewichtes der Kugel geladen ist, 463 Meter in der Secunde, und für einen 12 Pfünder, der ebenfalls mit dem dritten Theile des Gewichtes der Kugel geladen ist, ist diese Geschwindigkeit 494 Meter. Nach demselben Schriftsteller sind die entsprechenden Wurfweiten, in Beziehung auf $\lambda = o$, im ersten Falle 700 Meter, wenn man $\alpha = 1^0\,15'\,6''$, und im zweiten Falle 660 Meter, wenn man $\alpha = 1^0\,5'\,36''$ setzt.

Statt der Zeit τ kann man, zur Bestimmung von h und c, eine zweite Wurfweite derselben Kanone, die einer anderen Höhe über dem Erdboden entspricht, anwenden. Nimmt man daher an, dafs das Gewicht des Körpers, das der Ladung und der Winkel α dieselben geblieben sind, so bleiben die Gröfsen h und c ebenfalls dieselben, und wenn λ und l in λ' und l' übergehen, so hat man

$$8\,c^2\,h\,(\lambda' + l' \text{ tang } \alpha) = e^{2cl'} - 2\,c\,l' - 1,$$

woraus sich

$$(\lambda + l \text{ tang } \alpha)\cdot(e^{2cl'} - 2\,c\,l' - 1) =$$
$$(\lambda' + l' \text{ tang } \alpha)\,(e^{2cl} - 2\,c\,l - 1) \qquad (b)$$

ergiebt, wenn man h vermittelst der ersten Gleichung (a) eliminiert.

Die Schriftsteller sind über die Gröfse der Zahl n, die im Ausdrucke des Coefficienten c vorkommt, nemlich (§. 210)

$$c = \frac{n\varrho}{Dr},$$

nicht einig. Nach einer sehr unvollkommenen Theorie des Widerstandes der Flüssigkeiten ist diese Zahl $n = \frac{3}{8}$, alle Versuche geben sie aber kleiner, und Lombard setzt sie gleich $\frac{9}{40}$. Die Gleichung (b) bietet das der gröfsten Genauigkeit fähige Mittel dar, um c zu bestimmen, wenn man den Wurfwinkel α als bekannt und unveränderlich annimmt.

II. Bewegung der Planeten.

217.

Die Gesetze der Bewegung der Planeten um die Sonne sind unter dem Namen der Kepplerschen Gesetze bekannt,

weil sie durch diesen Astronomen entdeckt worden sind, der dieselben aus den Beobachtungen abgeleitet hat. Es giebt drei solche Gesetze, die folgender Maſsen lauten:

1) Die Planeten bewegen sich in ebenen krummen Linien, und ihre Radii Vectores beschreiben Flächen um den Mittelpunkt der Sonne, die der Zeit proportional sind.

2) Die Bahnen, d. h. die Trajectorien der Planeten, sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht.

3) Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne verhalten sich zu einander, wie die dritten Potenzen der groſsen Axen ihrer Bahnen.

Man sah nicht sogleich die ganze Wichtigkeit dieser Gesetze ein; Newton hat zuerst gezeigt, wie man sie anwenden kann, um die Kraft zu bestimmen, die jeden Planeten in seiner Bahn zurückhält, d. h. die Richtung dieser Kraft und die Aenderungen, die ihre Intensität erleidet, sowohl wenn ein Planet in verschiedene Lagen kommt, als auch bei verschiedenen Planeten. Man wird nemlich in diesem §. sehen, daſs jedes dieser drei Dinge eine nothwendige Folge der drei Gesetze der planetarischen Bewegung ist, die so eben angegeben worden sind.

Diese Gesetze beziehen sich auf die Bewegung des Schwerpunktes eines jeden Planeten; es ist gerade die Bewegung dieses Punktes, die wir betrachten werden, und wenn in der Folge von der Lage oder Geschwindigkeit eines Planeten die Rede seyn wird, so muſs man darunter die Lage oder Geschwindigkeit seines Schwerpunktes verstehen.

218.

Sey $AMBD$ (Fig. 52) die Ellipse, welche ein Planet beschreibt, AB ihre groſse Axe, C ihr Mittelpunkt, O und O' ihre beiden Brennpunkte, und zwar O derjenige, in welchem der Mittelpunkt der Sonne steht, B das Perihelium oder der Punkt der Bahn, welcher O am nächsten ist, A das Aphelium, oder der Punkt, welcher am weitesten von der Sonne entfernt ist.

Am Ende der Zeit t, die von dem Durchgange des Planeten durch das Perihelium an gerechnet wird, sey M sein Ort auf der Bahn. Man bezeichne durch r seinen Radius

Vector OM und durch ϑ den Winkel MOB, den man, in der Astronomie, die wahre Anomalie nennt. Der Ausschnitt, welcher durch diesen Radius, während der Zeit dt, beschrieben wird, ist $\frac{1}{2} r^2 d\vartheta$ (§. 156), man hat daher nach dem ersten Kepplerschen Gesetze

$$r^2 d\vartheta = c dt, \qquad (1)$$

wo c eine beständige Gröſse ist, die dem Doppelten der in der Zeiteinheit beschriebenen Fläche gleich ist, und ct das Doppelte der in einer beliebigen Zeit t, beschriebenen Fläche MOB bedeutet.

Sey auch

$$O'M = r', \quad CB = CA = a, \quad CO = CO' = ae.$$

Nach einer bekannten Eigenschaft der Ellipse hat man

$$r + r' = 2a;$$

auch hat man im Dreiecke $O'MO$

$$r'^2 = r^2 + 4 rae \cos\vartheta + 4a^2e^2,$$

und wenn man r' aus diesen zwei Gleichungen eliminiert, so erhält man

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta} \qquad (2)$$

als Gleichung der Trajectorie.

Für alle Planeten, die vor diesem Jahrhunderte bekannt waren, den Planeten Mercur ausgenommen, ist die Excentricität e ein sehr kleiner Bruch, die der Erdbahn ist

$$e = 0{,}01685318,$$

oder beinahe ein Sechzigstel. Die gröſste ist die des Mars, welche mehr als 9 Hundertel beträgt; bei diesem Planeten müſste sich daher die elliptische Bewegung am meisten von der excentrischen Kreisbewegung unterscheiden, die man vor Keppler annahm, und wirklich hat Keppler zuerst, aus den Beobachtungen, welche Tycho de Brahe über diesen Planeten angestellt hatte, den Unterschied dieser zwei Bewegungen erkannt. Entwickelt man die Werthe von r und ϑ in Reihen, die nach Potenzen von e geordnet sind, indem man die Gleichung der den Zeiten proportionalen Flächen mit der der elliptischen oder als ein excentrischer Kreis betrachteten, Trajectorie verbindet, so findet man, daſs für eine bestimmte Zeit t, die Entwickelungen, welche diesen beiden krummen Linien entsprechen, nur in den Gliedern verschieden sind, die von

[illegible]

[illegible]

[illegible] der

[illegible]

[illegible] und

[illegible] ung

[illegible]

[illegible] ihrer

[illegible] Sterne

[illegible] auf

[illegible] Sonne

[illegible]

[illegible] auf

[illegible] Sonne

[illegible]

[illegible] der

Radius Vector der Sonne 0,014158 Tage braucht, um diesen kleinen Winkel zu beschreiben, so folgt daraus

365, 242216 Tage

für die Länge des Aequinoctialjahres am Anfange dieses Jahrhunderts. Das siderische Jahr hat immer dieselbe Gröfse, die Präcession der Nachtgleichen ändert sich aber ein wenig, und daher auch das Aequinoctialjahr. Seine Länge nimmt in einem Jahrhunderte um ungefähr eine halbe Secunde ab.

220.

Der Werth der beständigen Gröfse c ist das Doppelte der Oberfläche der Ellipse, dividiert durch T; bemerkt man, dafs ihre kleine Axe $a\sqrt{1-e^2}$ und die Oberfläche $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$ ist, so hat man also

$$c = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}.$$

Vermittelst dieses Werthes und des Werthes von n, wird die Gleichung (1)

$$r^2 d\vartheta = n a^2\sqrt{1-e^2}\,dt.$$

Die Gleichung (2) giebt

$$\vartheta = \text{arc}\left(\cos = \frac{a(1-e^2)-r}{er}\right),$$

$$d\vartheta = \frac{a\sqrt{1-e^2}\,dr}{r\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}},$$

folglich hat man

$$n a dt = \frac{r dr}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}.$$

Um diese Formeln zu integrieren, setze man

$$r = a(1-e\cos u), \qquad (a)$$

so hat man

$$dr = ae\sin u, \quad ndt = (1-e\cos u)\,du;$$

da $r = a(1-e)$ im Punkte B ist, so mufs der Winkel u in diesem Punkte Null seyn, wo man auch $t=o$ hat. Integriert man, so hat man daher

$$nt = u - e\sin u. \qquad (b)$$

Setzt man für r seinen Werth in den Ausdruck von $d\vartheta$, und bemerkt, dafs $\cos u = \cos^2\frac{1}{2}u - \sin^2\frac{1}{2}u$ ist, so folgt hieraus.

$$d\vartheta = \frac{\sqrt{1-e^2}\,du}{1-e\cos^2\frac{1}{2}u + e\sin^2\frac{1}{2}u},$$

und wenn man

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u = z,\quad \frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u} = 2\,dz$$

setzt, so wird dieser Werth

$$d\vartheta = \frac{2\sqrt{1-e^2}\,dz}{1-e+(1+e)z^2}.$$

Integriert man, und bemerkt, daſs ϑ und u zu gleicher Zeit Null sind, d. h. im Punkte B, so hat man

$$\tfrac{1}{2}\vartheta = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = z\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right),$$

und hieraus findet man

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\vartheta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u, \qquad (c)$$

indem man für z seinen Werth setzt.

Diese drei Gleichungen (a), (b), (c) drücken, unter endlicher Form, die Werthe von r, nt und ϑ vermittelst der veränderlichen Hülfsgröſse u aus, die man die excentrische Anomalie nennt. Eliminiert man u aus diesen Gleichungen, so hat man die zwei Polarcoordinaten ϱ und ϑ des Planeten in Functionen der Zeit ausgedrückt, und unter der Form von Reihen, die nach den Potenzen der Excentricität geordnet sind, welche daher, bei den älteren Planeten, sehr convergierend seyn werden. Hat man diese Reihen gebildet, so kann man die Potenzen von $\cos nt$, die sich in der Entwickelung von r finden, und die von $\sin nt$, welche die Entwickelung von $\vartheta - nt$ enthält, durch die Cosinus und Sinus der Vielfachen von nt ersetzen. Denkt man sich daher, daſs man diese Entwickelungen des Radius Vector und der Mittelpunktsgleichung nach den Cosinus und Sinus der wachsenden Vielfachen von nt geordnet habe, so kann man, durch folgende Analyse, die Werthe der Coefficienten dieser beiden Reihen in Functionen der Excentricität ausgedrückt, auf directem Wege bestimmen.

221.

Ich setze

$$r = A_0 + A_1\cos nt + A_2\cos 2nt + \ldots + A_i\cos int + \ldots$$
$$\vartheta - nt = B_1\sin nt + B_2\sin 2nt + \ldots + B_i\sin int + \ldots,$$

A_0, A_1, $A_2 \ldots$, B_1, B_2 u. s. w. und allgemein A_i und B_i sind die Coefficienten, die man bestimmen will.

Sind i und i' zwei verschiedene ganze positive Zahlen, so hat man, wenn man die Integrationen ausführt,

$$\int_o^\pi \cos int \cos i'nt \, d.nt = o$$

$$\int_o^\pi \sin int \sin i'nt \, d.nt = o,$$

und wenn $i = i'$ ist, so findet man

$$\int_o^\pi \cos^2 int \, d.nt = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\int_o^\pi \sin^2 int \, d.nt = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Die letzteren Formeln passen nicht für den Fall $i = o$, denn alsdann ist das erste Integral $= \pi$ und das zweite gleich Null.

Dies vorausgesetzt, multipliciere ich die Entwickelung von r mit $\cos int \, d.nt$, und die von $\vartheta - nt$ mit $\sin int \, d.nt$, ich integriere alsdann von $nt = o$ bis $nt = \pi$. Es verschwinden alle Glieder, diejenigen ausgenommen, deren Coefficient A_i oder B_i ist, und man findet hieraus

$$A_i = \frac{2}{\pi} \int_o^\pi r \cos int \, d.nt$$

$$B_i = \frac{2}{\pi} \int_o^\pi (\vartheta - nt) \sin int \, d.nt.$$

Ist $i = o$, so hat man

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_o^\pi r d.nt,$$

d. h. man muſs in diesem Falle den allgemeinen Werth von A_i auf die Hälfte reducieren. Integriert man theilweise, und bemerkt, daſs $\vartheta - nt$ an den beiden Gränzen $nt = o$ und $nt = \pi$ Null ist, so kann der Ausdruck von B_i durch folgenden ersetzt werden:

$$B_i = \frac{2}{i\pi} \int_o^\pi \cos int \, d(\vartheta - nt).$$

Ich substituiere an die Stelle von r, nt, ϑ, ihre in Functionen von u ausgedrückten Werthe, die man aus den Gleichungen (a), (b), (c) ableitet; da

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}, \quad \frac{d.nt}{du} = 1 - e\cos u,$$

und da $u = o$ und $u = \pi$ den Werthen $nt = o$ und $nt = \pi$ entsprechen, so folgt hieraus

$$A_i = \frac{2a}{\pi}\int_o^\pi (1-e\cos u)^2 \cos(iu - ie\sin u)\,du$$

$$B_i = \frac{2}{i\pi}\int_o^\pi \left[\sqrt{1-e^2} - (1-e\cos u)^2\right]\frac{\cos(iu - ie\sin u)\,du}{1-e\cos u},$$

welche Formeln die numerischen Werthe der Coefficienten A_i und B_i angeben, sowohl durch die Methode der Quadraturen, als auch durch die Entwickelung in Reihen. Durch diese Reduction findet man nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\cos(iu - ie\sin u) = \left(1 - \frac{i^2e^2}{2}\sin^2 u + \frac{i^4e^4}{2.3.4}\sin^4 u - \ldots\right)\cos iu$$
$$+ \left(ie\sin u - \frac{i^3e^3}{2.3}\sin^3 u + \ldots\right)\sin iu,$$

und es folgen hieraus für A_i und B_i Reihen von Integralen in Beziehung auf u, deren genaue Werthe man alle entweder unmittelbar oder nach bekannten Formeln erhält, so daſs man diese Entwickelungen von A_i und B_i, so weit als man will, fortsetzen kann. Man kann auch ihre allgemeinen Glieder in Functionen von i und e ausgedrückt, erhalten, es ist aber hier nicht der Ort länger bei diesem Gegenstande zu verweilen, dessen Ausführung in die Astronomie gehört.

In Beziehung auf $i = o$ hat man

$$A_0 = \frac{a}{\pi}\int_o^\pi (1-e\cos u)^2\,du = a(1 + \tfrac{1}{2}e^2),$$

wenn man nur die Hälfte des Werthes von A_i nimmt, der $i = o$ entspricht. Dies ist der einzige der Coefficienten A_0, A_1, $A_2 \ldots$ B_1, $B_2 \ldots$, dessen Werth man genau erhalten kann.

222.

Nennt man v die Geschwindigkeit des Planeten am Ende der Zeit t, und δ den Winkel, den seine Richtung mit der Verlängerung seines Radius Vector r oder OM einschlieſst, so hat man (§. 156)

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2d\vartheta^2}{dt^2}, \quad v\sin\delta = r\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Eliminiert man dt vermittelst der Gleichung (1), so hat man

$$v^2 = c^2 \left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}, \quad v \sin\delta = \frac{c}{r}.$$

In Folge der Gleichung (2) hat man auch

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\vartheta}{a(1-e^2)}, \quad \frac{d.\frac{1}{r}}{d\vartheta} = -\frac{e\sin\vartheta}{a(1-e^2)},$$

und hieraus folgt

$$a^2(1-e^2)^2 v^2 = (1 + 2e\cos\vartheta + e^2)c^2,$$

also

$$v^2 = \frac{c^2}{a^2(1-e^2)}\left(\frac{2a}{r} - 1\right), \quad \sin\delta = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\frac{2a}{r}-1}} \quad (d)$$

woraus sich ergiebt, wie man, bei der elliptischen Bewegung, die Geschwindigkeit und Richtung des Körpers in jedem Punkte vermittelst des Radius Vector bestimmen kann. Vermöge des Werthes von c in §. 220, kann der Werth von v^2 auch auf folgende Weise geschrieben werden:

$$v^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2}\left(\frac{2a}{r} - 1\right).$$

Diese Formeln, verbunden mit denen des vorhergehenden §, bestimmen die Bewegung eines Planeten, in der Ebene seiner Bahn, vollständig. Will man aber zugleich die Bewegung verschiedener Planeten betrachten, so mufs man die Lage eines jeden auf eine andere Ebene beziehen, die gewöhnlich die Ebene der Ekliptik, oder der Erdbahn genannt wird.

223.

Sey NON' (Fig. 53) der Durchschnitt der Ebene der Bahn eines Planeten, mit einer Ebene, die durch den Mittelpunkt O der Sonne geht, OE eine gerade Linie, die in dieser zweiten Ebene gezogen ist, OM' die Projection des Radius Vector OM des Planeten auf dieselbe Ebene. Man bezeichne durch γ die Neigung der zwei Ebenen, durch α den Winkel NOE, durch ω den Winkel BON, den der Radius Vector OB, welcher nach dem Perihelium gezogen ist, mit der Linie ON macht. Diese drei Winkel α, γ, ω, müssen gegeben

seyn und sie bestimmen die Ebene der Bahn und die Lage der Ellipse in dieser Ebene. Seyen auch φ und ψ die veränderlichen Winkel MOM' und $M'OE$, welche der Radius Vector OM mit seiner Projection OM' und diese Projection mit der Linie OE einschliefst, welche Winkel, in jedem Augenblicke die Richtung des Radius OM, der nach dem Planeten gezogen ist, bestimmen.

Dies angenommen, betrachte man den dreikantigen Winkel, dessen Spitze in O liegt und dessen drei Kanten OM, OM', ON sind. Die wahre Anomalie, oder der Winkel MOB heifse noch immer ϑ, daher sind die drei Ebenenwinkel dieses dreikantigen Winkels

$$MON = MOB + BON = \vartheta + \omega$$
$$M'ON = M'OE - NOE = \psi - \alpha$$
$$MOM' = \varphi,$$

der erste steht einem rechten Winkel gegenüber und der dritte dem Winkel γ. Nach den ersten Regeln der sphärischen Trigonometrie hat man also

$$\sin\varphi = \sin\gamma \sin(\vartheta + \omega)$$
$$\operatorname{tang}(\psi - \alpha) = \cos\gamma \operatorname{tang}(\vartheta + \omega)$$

und da der Winkel ϑ als Function von t, nach dem Vorhergehenden bekannt ist, so ist es, vermittelst dieser Formeln, auch jeder der Winkel φ und ψ.

Wenn die gegebene Ebene, auf welcher man den Winkel ψ zählt, die Ekliptik ist, und die Linie OE, von welcher aus man, nach der Richtung der Bewegung der Erde, diesen Winkel zählt, diejenige ist, welche von der Sonne zum Punkte der Frühlingsäquinoctie gezogen ist, so nennt man die Winkel ψ und φ die Länge und Breite des Planeten, den man betrachtet. Die Linie NON' ist die Knotenlinie seiner Bahn, geht der Planet nach der nördlichen Seite, wenn er die Ebene der Ekliptik im Punkte N durchschneidet, so nennt man diesen Punkt den aufsteigenden Knoten, N' ist der niedersteigende. Je nachdem sich der Planet nördlich oder südlich von der Ekliptik befindet, ist seine Breite positiv oder negativ und der Winkel MON oder $\vartheta + \omega$ gröfser oder kleiner als 180^0 Der Winkel φ erstreckt sich von -90^0 bis zu 90^0 und der Winkel MON, so wie die Länge $M'OE$ von Null bis zu 360^0.

Nimmt man statt des Punktes O den Mittelpunkt der Erde, und den Aequator für die gegebene Ebene, auf welcher man den Winkel ψ zählt und als Anfang dieses Winkels die Linie OE, welche von diesem Punkte nach dem ersten Punkte des Widders geht, so sind alsdann die Winkel ψ und φ die gerade Aufsteigung und Declination des Planeten. Wendet man die vorhergehenden Formeln auf die scheinbare Bewegung der Sonne um die Erde an, so hat man $\alpha = o$, γ ist die Schiefe der Ekliptik und man muſs für $\vartheta + \omega$ die Länge der Sonne nehmen; hieraus folgt, daſs, wenn man diese Länge mit λ bezeichnet,

$$\sin\varphi = \sin\gamma \sin\lambda, \quad \tang\psi = \cos\gamma \tang\lambda,$$

und zugleich

$$\sin\varphi = \frac{\sin\gamma \tang\psi}{\sqrt{\cos^2\gamma + \tang^2\psi}}$$

ist.

Die gröſsten nördlichen und südlichen Declinationen entsprechen $\lambda = 90^0$ und $\lambda = 270^0$, und sind $\pm \gamma$. Dieser Winkel γ ist auch der, welchen die Axe der Erde mit der Linie macht, die auf der Ebene der Ekliptik senkrecht steht; es findet sich bei demselben eine kleine Ungleichheit, die man die Nutation nennt, und deren Periode ungefähr 18 Jahre ist, und das Maximum derselben beträgt nur $9'', 4$. Sein mittlerer Werth war im Anfange von 1800

$$\gamma = 23^0\, 27'\, 55''$$

und nimmt jährlich um $0'', 45692$ ab.

224.

In allem Vorhergehenden wurde die Kraft unberücksichtigt gelassen, welche auf jeden Planeten wirkt, dessen Bewegung, nach den Angaben der Erfahrung und ohne auf die Grundsätze der Mechanik zurück zu gehen, bestimmt wurde. Jetzt sollen die Gesetze dieser Kraft bestimmt werden, wie früher (§. 217) bemerkt worden ist.

Aus dem ersten Kepplerschen Gesetze folgt, daſs die Kraft, die jeden Planeten in seiner Bahn festhält, immer nach dem Mittelpunkte der Sonne gerichtet ist. Wiewohl diese nothwendige Folge des Gesetzes, daſs die Flächen den Zeiten proportional sind, schon aus den Gleichungen der Bewegung

(§. 155) abgeleitet worden ist, so wird es doch nicht überflüssig seyn, hier einen synthetischen Beweis zu geben.

Sey $M_1 M$ (Fig. 54) die Seite der Trajectorie, welche der Weltkörper während der unendlich kleinen Zeit τ beschreibt. Wirkte keine Kraft auf denselben, wenn er im Punkte M angekommen ist, so würde er, in einer anderen Zeit τ, einen Theil Mm der Verlängerung MT von $M_1 M$, der gleich $M_1 M$ ist, beschreiben. Vermöge der Kraft, welcher er unterworfen ist, wird er sich aber, in diesem zweiten Zeitraume, nach einem anderen Punkte M' hin bewegen. Sey MK die Richtung dieser Kraft im Punkte M; man kann annehmen, daſs sie, während der Zeit τ, mit sich selbst parallel bleibt, und wenn man alsdann die gerade Linie mM' zieht, so wird diese mit MK parallel seyn (§. 148). Ist aber C der feste Mittelpunkt, um welchen der Radius Vector CM Flächen beschreibt, die den Zeiten proportional sind, so werden die Dreiecke $M_1 CM$ und MCM', welche die Flächen sind, die in zwei gleichen Zeiträumen beschrieben werden, gleich groſs seyn, die Dreiecke $M_1 CM$ und MCm sind es aber auch, weil ihre Spitzen in demselben Punkte C liegen und ihre Grundlinien $M_1 M$ und Mm gleich sind und auf derselben Grundlinie liegen. Daher sind die Dreiecke MCm und MCM' gleich groſs, und da sie dieselbe Grundlinie MC haben, so muſs die gerade Linie mM', welche ihre Spitzen verbindet, dieser Grundlinie parallel seyn. Folglich fällt die Linie MK, die mM' parallel ist, mit CM zusammen. In jedem Punkte M der Trajectorie, ist daher die Richtung MK der Kraft, die des Radius Vector MC, was bewiesen werden sollte.

Ist umgekehrt die Kraft, welche auf den Körper, in einem beliebigen Punkte M wirkt, nach MC gerichtet, so wird die gerade Linie mM' diesem Radius Vector parallel seyn. Die beiden Dreiecke $M'CM$ und MCm sind gleich groſs und daher auch die beiden Dreiecke $M'CM$ und $M_1 CM$. Da die Flächen, welche der Radius Vector um den Punkt C, in zwei aufeinander folgenden und gleichen Zeiträumen beschreibt, gleich sind und dies in der ganzen Ausdehnung der Trajectorie statt hat, wenn die Kraft, welche auf den Körper wirkt, immer nach diesem Punkte gerichtet ist, so folgt daraus, daſs die in gleichen Zeiten beschriebenen Flächen

gleich und, in beliebigen Zeiten, diesen Zeiten proportional seyn werden.

225.

Sey, wie in §. 218, M die Lage des Planeten am Ende der Zeit t (Fig. 52). Man behalte alle Bezeichnungen dieses §. bei, so dafs r und ϑ der Radius Vector und der Winkel MOB sind. Man bezeichne aufserdem durch x und y die beiden rechtwinkligen Coordinaten OP und PM, die auf die Axen Ox und Oy bezogen sind, von welchen die erste durch das Perihelium B geht; alsdann hat man

$$x = r\cos\vartheta,\quad y = r\sin\vartheta,\quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Sey auch R die, der Gröfse nach unbekannte, beschleunigende Kraft, welche auf den Planeten wirkt. Diese Kraft ist, wie man so eben gesehen hat, nach dem Radius Vector gerichtet, und wirkt vom Punkte M gegen den Punkt O, weil die Trajectorie ihre Concavität nach der Sonne hin wendet. Die Cosinus der Winkel, die sie mit den Verlängerungen von x und y macht, sind daher $-\frac{x}{r}$ und $-\frac{y}{r}$. Daher sind die Gleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{x}{r},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -R\frac{y}{r}. \qquad (1)$$

Nennt man noch immer v die Geschwindigkeit im Punkte M, so hat man

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2},$$

und, wenn man differentiiert,

$$\tfrac{1}{2}d.v^2 = \frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy,$$

folglich findet man, wenn man die Gleichungen (1) zusammen addiert, nachdem man sie mit dx und dy multipliciert hat und bemerkt, dafs $xdx + ydy = rdr$ ist,

$$\tfrac{1}{2}d.v^2 = -Rdr.$$

Bei der elliptischen Bewegung hat man aber (§. 222)

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

wenn man

$$\frac{4\pi^2a^3}{T^2} = \mu$$

setzt; folglich hat man

$$R = \frac{\mu}{r^2},$$

woraus hervorgeht, dafs die Kraft, welche auf jeden Planeten wirkt, im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Abstandes vom Mittelpunkte der Sonne steht.

Die Gröfse dieser Kraft ist, in der Einheit der Entfernung, gleich μ; sey μ' das, was sie für einen anderen Planeten wird, dessen halbe grofse Axe und Umdrehungszeit durch a' und T' bezeichnet werden, so hat man auch

$$\mu' = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2}.$$

Nach dem dritten Kepplerschen Gesetze ist aber

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{a^3}{a'^3},$$

woraus

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2}, \; \mu = \mu'$$

folgt; daher ist die beschleunigende Kraft R, für zwei verschiedene Planeten, in der Einheit des Abstandes und allgemein, in demselben Abstande von der Sonne, dieselbe.

Die bewegende Kraft eines jeden Planeten ist daher von seiner besonderen Beschaffenheit unabhängig und seiner Masse proportional, so wie dies auch bei den Gewichten, an der Oberfläche der Erde der Fall ist. Sie ändert sich von einem Planeten zum anderen nach demselben Gesetze, wie von einer Lage desselben Planeten zu einer anderen, und wenn zwei Planeten in demselben Abstande von der Sonne wären und sich selbst überlassen würden, ohne Anfangsgeschwindigkeit zu haben, so würden sie mit derselben Bewegung nach der Sonne hin fallen und sie in derselben Zeit erreichen.

Durch die drei Kepplerschen Gesetze lernt man also die Kraft vollständig kennen, welche die Planeten in ihren Bahnen zurückhält. Das Gesetz der den Zeiten proportionalen Flächen zeigt uns, dafs diese Kraft beständig nach dem Mittelpunkte der Sonne gerichtet ist, das der elliptischen Bewegung, oder der Ausdruck für die Geschwindigkeit, welchen man aus diesem Gesetze und dem vorhergehenden ableitet, zeigt uns, dafs ihre Intensität, für denselben Planeten, sich

im umgekehrten Verhältnisse des Abstandes von der Sonne ändert. Endlich schliefsen wir aus dem Gesetze, dafs die Quadrate der Umlaufszeiten den dritten Potenzen der grofsen Axen proportional sind, dafs die Intensität der bewegenden Kraft, in gleichem Abstande vom Mittelpunkte der Sonne, den Massen eines jeden Planeten proportional und von seiner besonderen Beschaffenheit unabhängig ist.

226.

Newton hat die Kepplerschen Gesetze, so wie die daraus sich ergebenden Folgerungeu rücksichtlich der Kraft, die auf die Körper wirkt, auch auf die Kometen, in ihrer Bewegung um die Sonne, und auf die Satelliten, in ihrer Bewegung um die Planeten, ausgedehnt.

Die Kometen unterscheiden sich, in ihrer Bewegung, von den Planeten nur dadurch, dafs sie, wegen der Entfernung ihrer Aphelien, nur zuweilen sichtbar sind; was die Bestimmung ihrer Bahn sehr schwierig macht. Indessen giebt es jetzt drei Kometen, deren Bahnen und Umlaufszeiten man fast ebenso genau, wie die der Planeten, kennt. Bei den anderen Kometen, berechnet man die Bewegung näherungsweise, indem man für die Trajectorie, auf der kurzen Strecke, in welcher jeder Komet sichtbar ist, eine Parabel nimmt, deren Brennpunkt im Mittelpunkte der Sonne ist, und die Voraussetzung beibehält, dafs die Flächen, welche der Radius Vector um diesen Punkt beschreibt, bei jedem Kometen, den Zeiten proportional sind. Dieser Fall ist in den vorhergehenden Formeln der elliptischen Bewegung enthalten, wenn man

$$a = \infty, \quad a\,(1 - e) = b$$

setzt, wo b den Abstand des Perihelium OB bezeichnet, der eine endliche Gröfse ist.

Die Massen der Kometen sind im Verhältnifs zu denen der Planeten sehr klein und scheinen ganz anderer Art zu seyn. In Folge des dritten Kepplerschen Gesetzes verhalten sich die bewegenden Kräfte zweier Kometen, oder eines Kometen und eines Planeten, in demselben Abstande von der Sonne, wie ihre Massen, und ihre beschleunigenden Kräfte sind gleich. Ebenso ist es bei verschiedenen Trabanten desselben Planeten, nicht aber bei Trabanten verschiedener Pla-

neten, oder bei einem Trabanten und einem Planeten; denn das Gesetz der Proportionalität der Quadrate der Umlaufszeiten und der dritten Potenzen der grofsen Axen hat nur bei den Körpern statt, die sich um denselben Mittelpunkt bewegen. Wir werden, in der Folge, das Verhältnifs nachweisen, welches zwischen den bewegenden Kräften zweier Trabanten, die zu verschiedenen Planeten gehören, und zwischen denen eines Planeten und eines Trabanten statt findet.

Man bemerke noch, dafs man in der neuesten Zeit die Gesetze der elliptischen Bewegung auf die Doppelsterne ausgedehnt hat, bei welchen eine drehende Bewegung des einen Sterns um den anderen entdeckt worden ist, und dafs ihre wechselseitigen Lagen, die nach diesen Gesetzen berechnet worden sind, so gut, als es sich erwarten liefs, mit den beobachteten Lagen zusammen stimmen.

227.

Wir wollen jetzt die Aenderungen untersuchen, welche der Widerstand eines sehr feinen Aethers, der sich um die Sonne herum befindet, auf die elliptische Bewegung der Planeten hervor bringen würde. Ihre Abplattung und die Reibung der Flüssigkeit gegen ihre Oberfläche, könnten ihren Schwerpunkt aus der Ebene ihrer Bahn heraus bringen. Ich werde diese zwei Umstände unberücksichtigt lassen, und es handelt sich daher nur um die Bildung der Gleichungen der Bewegung dieses Punktes, wenn man zugleich die Centralkraft, die im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Abstandes steht, und die Tangentialkraft, die vom Widerstande des Mittels herrührt, berücksichtigt.

Ich nehme, wie bei der Bewegung der geworfenen Körper in der Luft, an, dafs dieser Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit, der Dichtigkeit des Mittels und der Oberfläche jedes Planeten proportional ist; die hieraus entspringende beschleunigende Kraft wird aufserdem im umgekehrten Verhältnisse der Masse des Körpers stehen, ich bezeichne sie durch $\varrho \frac{ds^2}{dt^2}$, indem ich durch ds das Element der Trajectorie und durch ϱ einen sehr kleinen Coefficienten bezeichne, der, für denselben Planeten, der Dichtigkeit des Mittels proportio-

nal ist. Bemerkt man, daſs die Richtung dieser Kraft der Geschwindigkeit des Körpers entgegengesetzt ist, und bezeichnet man noch immer die Hauptkraft, die nach dem Mittelpunkte der Sonne gerichtet ist, durch μ in der Einheit des Abstandes und durch $\frac{\mu}{r^2}$ in dem Abstande r, so müssen die Gleichungen (1) durch folgende ersetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3} &= -\varrho\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3} &= -\varrho\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Wendet man die Polarcoordinaten an, so kann man aus denselben, ohne Schwierigkeit, die folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(dr^2+r^2d\vartheta^2)}{dt^2}-2\mu d.\frac{1}{r} &= -\frac{2\varrho(dr^2+r^2d\vartheta^2)}{dt^2}ds \\ d.r^2d\vartheta &= -\varrho r^2d\vartheta ds \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ableiten, die eine Umbildung derselben sind.

228.

Wenn man die zweiten Theile vernachlässigt, so verwandeln sich die Gleichungen (2) in

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}=o,\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3}=o, \quad (4)$$

und die Gleichungen (3) in folgende:

$$\frac{d(dr^2+r^2d\vartheta^2)}{dt^2}-2\mu d.\frac{1}{r}=o,\quad d.r^2d\vartheta=o. \quad (5)$$

Diesen Gleichungen (5) kann man, vermittelst der Formeln (a), (b), (c) des §. 220 Genüge leisten; diese Formeln sind nicht die vollständigen Integrale derselben, weil sie nur zwei willkührliche Constanten a und e enthalten. Wenn man aber bemerkt, daſs die Gleichungen (5) die Veränderlichen ϑ und t nicht entwickelt enthalten, und daſs nur deren Differentiale $d\vartheta$ und dt in denselben vorkommen, so schlieſst man hieraus, daſs die Formeln des angeführten §. auch noch diesen Gleichungen Genüge leisten müssen, wenn man zu t und ϑ beliebige Constanten hinzufügt. Auf diese Weise werden die vollständigen Integrale der Gleichungen (5) und daher

auch die der Gleichungen (4) durch folgendes System von Formeln:

$$\left.\begin{aligned} r &= a(1 - e\cos u) \\ nt + \varepsilon - \omega &= u - e\sin u \\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\vartheta - \omega) &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

ausgedrückt, wo a, e, ε, ω die vier willkührlichen Constanten sind und n eine Constante bedeutet, die mit a durch die Gleichung

$$a^3 n^2 = \mu$$

verbunden ist, welche sich aus $\frac{2\pi}{T} = n$, $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \mu$ durch die Elimination von T ergiebt.

Der Werth Null der Veränderlichen u entspricht immer dem kleinsten Werthe von r oder dem Perihelium B (Fig. 52). Für $u = o$ hat man $\vartheta = \omega$, so dafs nun ϑ den Winkel MOE bezeichnet, welcher von der geraden Linie OE an gezählt wird, die einen Winkel $BOE = \omega$, mit OB einschliefst. Wird der Werth von ϑ in eine Reihe entwickelt, so nimmt er die Form

$$\vartheta = nt + \varepsilon + \vartheta_1$$

an, wenn man durch ϑ_1 seinen periodischen Theil, der nach Sinus der wachsenden Vielfachen von $nt + \varepsilon - \omega$ geordnet ist, bezeichnet. Dieser Winkel ϑ ist die wahre Länge des Planeten, in der Ebene seiner Bahn, am Ende einer beliebigen Zeit t; $nt + \varepsilon$ drückt seine mittlere Länge für denselben Zeitpunkt aus, ε seine mittlere Länge für die Epoche, von welcher an man die Zeit t zählt und ω die Länge seines Periheliums.

229.

Kennt man die vollständigen Integrale eines Systems von Differentialgleichungen wie die Gleichungen (4), so kann man daraus die Integrale eines anderen Systems von Differentialgleichungen, wie die Gleichungen (2) sind, welche sich von den ersteren nur durch sehr kleine Glieder unterscheiden, ableiten, und zwar vermittelst einer Methode, von welcher die Mathematiker die glücklichsten Anwendungen auf die Mechanik des Himmels gemacht haben, und die ich nun, bei Gelegenheit der Aufgabe, die uns beschäftigt, erläutern will.

Die Werthe von x und y, die den Gleichungen (4) Genüge leisten, haben die Form

$$x = f(t, a, e, \varepsilon, \omega), \quad y = F(t, a, e, \varepsilon, \omega),$$

wo f und F gegebene Functionen sind. Damit diese Werthe den Gleichungen (4) Genüge leisten, so betrachte ich $a, e, \varepsilon, \omega$ wie neue Veränderlichen, die bestimmt werden sollen. Da diese Unbekannten aber vier an der Zahl sind, und die Gleichungen (2) nur zwei, so kann man zwei willkührliche Hülfsgleichungen bilden. Ich setze daher

$$\left.\begin{array}{l} \frac{df}{da}da + \frac{df}{de}de + \frac{df}{d\varepsilon}d\varepsilon + \frac{df}{d\omega}d\omega = o \\ \frac{dF}{da}da + \frac{dF}{de}de + \frac{dF}{d\varepsilon}d\varepsilon + \frac{dF}{d\omega}d\omega = o \end{array}\right\} (b).$$

oder, mit anderen Worten, ich setze die Theile von dx und dy, welche von den Veränderungen von a, e, ε, ω herrühren, gleich Null. Auf diese Weise, sind die vollständigen Werthe $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ einfach

$$\frac{dx}{dt} = \frac{df}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dt}.$$

Differentiiert man von Neuem, so hat man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2f}{dt^2} + \frac{d^2f}{dt\,da}\frac{da}{dt} + \frac{d^2f}{dt\,de}\frac{de}{dt} + \frac{d^2f}{dt\,d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{d^2f}{dt\,d\omega}\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2F}{dt^2} + \frac{d^2F}{dt\,da}\frac{da}{dt} + \frac{d^2F}{dt\,de}\frac{de}{dt} + \frac{d^2F}{dt\,d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{d^2F}{dt\,d\omega}\frac{d\omega}{dt}$$

Es wurde aber angenommen, daſs die vorhergehenden Werthe von x und y den Gleichungen (4) Genüge leisten, wenn man a, e, ε, ω als willkührliche Constanten betrachtet, man hat daher

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = o, \quad \frac{d^2F}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = o,$$

folglich hat man, wenn man die vollständigen Werthe von $\frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$ in die Gleichungen (2) substituiert:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2f}{dt\,da}da + \frac{d^2f}{dt\,de}de + \frac{d^2f}{dt\,d\varepsilon}d\varepsilon + \frac{d^2f}{dt\,d\omega}d\omega = -\varrho\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt}dt \\ \frac{d^2F}{dt\,da}da + \frac{d^2F}{dt\,de}de + \frac{d^2F}{dt\,d\varepsilon}d\varepsilon + \frac{d^2F}{dt\,d\omega}d\omega = -\varrho\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt}dt \end{array}\right\} (c)$$

und das System dieser vier Gleichungen (b) und (c) dient dazu, die Gröſsen a, e, ε, ω, in Functionen von t ausgedrückt, zu bestimmen.

230.

Im Allgemeinen würde diese Ersetzung der zwei Gleichungen (2), die von der zweiten Ordnung sind, durch vier Differentialgleichungen der ersten Ordnung, gar keinen Vortheil bringen. Da aber die Werthe von da, de, $d\varepsilon$, $d\omega$, die man aus den Gleichungen (b) und (c) ableitet, den Coefficienten ϱ des Widerstandes, der eine sehr kleine Gröſse ist, zum Factor haben, so sind die veränderlichen Theile von a, e, ε, ω ebenfalls sehr klein, und wenn man das Quadrat von ϱ vernachlässigt, so kann man a, e, ε, ω, in den Ausdrücken für da, de, $d\varepsilon$, $d\omega$, als Constanten ansehen, wodurch die Berechnung der veränderlichen Theile von a, e, ε, ω auf die Quadraturen zurückgeführt wird. Durch die Methode der allmälichen Annäherungen, erhält man daher Werthe dieser Gröſsen, die nach den Potenzen von ϱ geordnet und so genau sind als man will. Wir wollen bei der ersten Potenz von ϱ stehen bleiben.

Die Gleichungen (a) geben, wenn man die veränderlichen Werthe von a, e, ε, ω in dieselben substituiert hat, wie bei der elliptischen Bewegung, die Werthe von r und ϑ in Functionen der Zeit ausgedrückt. Die Trajectorie ist noch immer eine Ellipse, deren Elemente sich aber immerfort ändern. Nimmt man an, daſs man in jedem Augenblicke die constante Ellipse construiert, welche den Werthen der Elemente in diesem Augenblicke entspricht, so sind die Ordinaten x und y und ihre Differentiale dx und dy, in Folge der Gleichungen (b), dieser Ellipse und der Trajectorie gemeinschaftlich, welche daher alle die constanten Ellipsen berühren wird. Aus demselben Grunde sind auch die Ausdrücke für die Geschwindigkeit des Körpers und deren Seitengeschwindigkeiten, bei der elliptischen und bei der, durch den Widerstand des Mittels geänderten Bewegung dieselben, und werden durch die Formeln (d) des §. 222 bestimmt.

231.

Man bemerke, daſs man identisch

$$nt = \int n\,dt + \int t\,dn$$

hat, wenn man daher das Integral $\int t\,dn$ in der unbekannten Grösse ε mit begreift, so kann man daher statt der zweiten Gleichung a schreiben.

$$\int n\,dt + \varepsilon - \omega = u - e \sin u \qquad (d)$$

Alsdann muss man zu gleicher Zeit, wenn man in den Gleichungen der elliptischen Bewegung die Constanten $a, e, \varepsilon, \omega$ in ihre veränderlichen Werthe umwandelt, auch nt durch das Integral $\int n\,dt$ ersetzen, welches wir gleich Null setzen, wenn $t = o$ ist. Die Grösse n, die es enthält, kann aus a, vermittelst der Formel

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$$

abgeleitet werden, die durch die Gleichung $a^3 n^2 = \mu$ des §. 228 gegeben ist. Dieses Integral $\int n\,dt$ drückt die mittlere Bewegung des Planeten aus (§. 219), wenn sie durch den Widerstand des Mittels geändert ist, und das Differential der mittleren Bewegung ist demnach, ebensowohl bei der gestörten als bei der elliptischen Bewegung, gleich $n\,dt$.

Im Perihelium ist der Winkel $\vartheta - \omega$ gleich Null oder einem Vielfachen von 360^0, und in Folge der ersten Gleichung (a) ist dies auch bei dem Winkel u der Fall; daher wird die Grösse $\int n\,dt + \varepsilon - \omega$, während des zwischen auf einander folgenden Rückkehren des Planeten zum Perihelium verfliessenden Zeitraums, um 360^0 zunehmen, wodurch man diesen Zeitraum bestimmen kann, wenn man n, e, ω in Functionen von t ausgedrückt, kennt. Die Umlaufszeit, d. h. der Zeitraum, der zwischen zwei auf einander folgenden Rückkehren des Planeten zu demselben festen Punkte verfliesst, ist diejenige, welche einem solchen Zuwachse der wahren Länge ϑ entspricht.

232.

Wir können die Gleichungen (b) und (c) durch andere gleichgeltende Gleichungen ersetzen, aus welchen man leicht die Werthe von da, de, $d\varepsilon$, $d\omega$ ableiten kann.

Zu diesem Zwecke bemerke man, dass, wenn eine beliebige Gleichung

$$\varphi\,(nt, r, \vartheta, a, e, \varepsilon, \omega) = o$$

bei der elliptischen Bewegung statt hat, sie auch noch bei

der durch den Widerstand des Mittels geänderten Bewegung statt finden wird, wenn man a, e, ε, ω als Veränderliche, die durch die Gleichungen (b) und (c) bestimmt sind, betrachtet, und $\int ndt$ an die Stelle von nt setzt. Das Differential der Function φ ist daher Null, sey, daſs man es, im ersten Falle, in Beziehung auf nt, r, ϑ, oder, im zweiten, in Beziehung auf $\int ndt$, r, ϑ, a, e, ε, ω nimmt. Da aber r und ϑ Functionen von x und y sind, so sind ihre Differentiale in beiden Fällen, vermöge der Gleichungen (b), dieselben. Läſst man daher, in dem vollständigen Integrale von φ, den Theil $\frac{d\varphi}{d.nt}\,d.nt + \frac{d\varphi}{dr}\,dr + \frac{d\varphi}{d\vartheta}\,d\vartheta$, welcher für sich Null ist, weg, so hat man

$$\frac{d\varphi}{da}\,da + \frac{d\varphi}{de}\,de + \frac{d\varphi}{d\varepsilon}\,d\varepsilon + \frac{d\varphi}{d\omega}\,d\omega = o.$$

Hat man demnach, in der Gleichung (2) des §. 218, $\vartheta - \omega$ statt ϑ gesetzt, so findet man hieraus

$$r + re\cos(\vartheta - \omega) = a(1 - e^2).$$

Differentiiert man, wie so eben gesagt wurde, so hat man daher

$$r\cos\vartheta\, d.e\cos\omega + r\sin\vartheta\, d.e\sin\omega = d.a(1 - e^2) \qquad (e)$$

Ich differentiiere ebenso die erste Gleichung (a) und die Gleichung (d); dies giebt

$$(1 - e\cos u)\,da - a\cos u\,de + ae\sin u\,du = o$$
$$d\varepsilon - d\omega + \sin u\,de - (1 - e\cos u)\,du = o$$

wenn man u wie eine Function von a, e, ε, ω betrachtet.

Ich eliminiere du aus diesen zwei Gleichungen, so ergiebt sich

$$(1 - e\cos u)^2 da + a(e - \cos u)\,de + ae\sin u\,(d\varepsilon - d\omega) = o.$$

Setzt man aber in den Formeln

$$\cos u = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}u}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}u}, \quad \sin u = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}u}{1 + \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}u}$$

an die Stelle von $\operatorname{tang}\frac{1}{2}u$ seinen Werth, der durch die dritte Gleichung (a) gegeben ist, so hat man

$$\cos u = \frac{e + \cos(\vartheta - \omega)}{1 + e\cos(\vartheta - \omega)}, \quad \sin u = \frac{\sqrt{(1 - e^2)}\,\sin(\vartheta - \omega)}{1 + e\cos(\vartheta - \omega)}$$

wodurch die vorhergehende Gleichung in

$$\frac{(1-e^2)\,da}{1+e\cos(\vartheta-\omega)} - a\cos(\vartheta-\omega)\,de + \frac{ae\sin(\vartheta-\omega)}{\sqrt{1-e^2}}(d\varepsilon - d\omega) = o \quad (f)$$

übergeht. Was wir in Beziehung auf die Gleichung $\varphi = o$ sagen, läſst sich auch auf den Fall anwenden, wenn die Function φ erste Differentiale von r und ϑ enthält. So hat man bei der elliptischen Bewegung

$$\frac{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} = -\frac{\mu}{a}$$

$$r^2 d\vartheta = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\,dt$$

wenn man $\sqrt{\mu a}$ statt $a^2 n$ in den Werth von $r^2 d\vartheta$ des §. 220 setzt. Da aber die Differentiale dr und $d\vartheta$, so wie r und ϑ, dieselben bleiben, wenn a, e, ε, ω veränderlich werden, so folgt daraus, daſs diese zwei Gleichungen auch noch bei dieser Annahme bestehen werden. Vergleicht man demnach ihre vollständige Differentiale mit den Gleichungen (3) des §. 228, so findet man

$$\left.\begin{aligned} d.\frac{1}{a} &= 2\varrho\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)ds \\ d.\sqrt{a(1-e^2)} &= -\varrho\sqrt{a(1-e^2)}\,ds \end{aligned}\right\} \quad (g)$$

Nun kann man aus den vier Gleichungen (e), (f), (g) sehr leicht die Werthe von da, de, $d\varepsilon$, $d\omega$ finden; setzt man für r seinen Werth, nemlich

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\vartheta-\omega)}$$

um sie nur als Functionen des Winkels ϑ auszudrücken, so findet man

$$\left.\begin{aligned} da &= -\frac{2\varrho a}{1-e^2}[1+2e\cos(\vartheta-\omega)+e^2]\,ds \\ de &= -2\varrho\,[e+\cos(\vartheta-\omega)]\,ds \\ ed\omega &= -2\varrho\,[\sin(\vartheta-\omega)]\,ds \\ d\varepsilon &= +\frac{2\varrho e\sin(\vartheta-\omega)\left[\sqrt{1-e^2}-e^2-e\cos(\vartheta-\omega)\right]}{[1+e\cos(\vartheta-\omega)]\,(1+\sqrt{1-e^2})} \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

der Werth von ds, den man in diese Formeln substituieren muſs, ist

$$ds = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\vartheta^2}}\,d\vartheta,$$

und wenn man in diesen Ausdruck den Werth von r substituiert, so wird er

$$ds = \frac{a(1-e^2)\sqrt{1+2e\cos(\vartheta-\omega)+e^2}}{[1+e\cos(\vartheta-\omega)]^2}\,d\vartheta.$$

Man integriert die zweiten Theile der Gleichungen (h), indem man a, e, ε, ω als Constanten betrachtet, wie früher bemerkt worden ist, und wenn der Coefficient ϱ als Function von r gegeben seyn wird, und folglich auch als Function von ϑ, so kann man daraus, nach der Methode der Quadraturen, oder durch die Auflösung in eine Reihe, die veränderlichen Werthe von a, e, ε, ω ableiten, die in die Gleichungen der elliptischen Bewegung substituiert werden müssen.

233.

Wenn die Excentricität e ein sehr kleiner Bruch ist, so werden die Formeln (h), wenn man sie auf ihren wesentlichsten Theil reduciert,

$$da = -2\varrho a^2 d\vartheta,\quad de = -2\varrho a\cos(\vartheta-\omega)\,d\vartheta$$
$$e\,d\omega = -2\varrho a\sin(\vartheta-\omega)\,d\vartheta,\quad d\varepsilon = 2\varrho a e\sin(\vartheta-\omega)\,d\vartheta,$$

und man kann in denselben den Coefficienten ϱ als eine constante Gröfse ansehen. Integriert man, und bezeichnet durch δa, δe, $\delta\omega$, $\delta\varepsilon$ die veränderlichen Theile von a, e, ε, ω, so hat man daher

$$\begin{aligned}\delta a &= -2\varrho a^2\vartheta\\ \delta e &= -2\varrho a\sin(\vartheta-\omega)\\ e\,\delta\omega &= 2\varrho a\cos(\vartheta-\omega)\\ \delta\varepsilon &= -2\varrho a e\cos(\vartheta-\omega).\end{aligned}$$

Bezeichnet man durch δn den entsprechenden Theil von n, oder von $\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$, so dafs man

$$\delta n = -\frac{3\sqrt{\mu}}{2a^2\sqrt{a}}\,\delta a$$

hat, so folgt hieraus

$$\delta n = 3\varrho a n\vartheta.$$

Man sieht also, dafs die Wirkung des Widerstandes eines sehr dünnen Mittels auf die Bewegung eines sehr wenig excentrischen Planeten darin besteht, dafs er die grofse Axe fortwährend vermindert, die Winkelgeschwindigkeit n fort-

während vermehrt und in jeder der drei Gröſsen e, $\tilde{\omega}$, ε eine Ungleichheit hervor bringt, deren Periode dieselbe ist wie die Umlaufszeit des Planeten. Nicht blos die Winkelgeschwindigkeit, sondern auch die absolute Geschwindigkeit wird immer mehr beschleunigt. Denn sie ist ungefähr an gleich, daher ist ihr Zuwachs $a\delta n + n\delta a$, welche Gröſse positiv und gleich $\varrho a^2 n\vartheta$ ist.

Vernachlässigt man die Excentricität gänzlich, so hat man

$$r = a, \quad \vartheta = \int ndt + \varepsilon;$$

bezeichnet man daher durch δr und $\delta\vartheta$ die Theile des Radius Vector und der Länge, welche vom Widerstande des Mittels herrühren, so hat man, mit demselben Grade von Annäherung,

$$\delta r = -2\varrho a^2\vartheta, \quad \delta\vartheta = \tfrac{3}{2}\varrho a\vartheta^2.$$

In Folge dieser fortwährenden Verminderung des Radius Vector, die sich bei jedem Umlauf des Planeten auf $4\pi\varrho a^2$ belauft, muſs der Planet nothwendig zuletzt die Oberfläche der Sonne erreichen.

Wenn es übrigens im Raume einen Aether giebt, welcher einen Einfluſs auf die Bewegung der Weltkörper ausübt, so kann dieser Einfluſs nur bei den Kometen merkbar werden, weil ihre Masse sehr klein ist und der Coefficient ϱ, wenn alles Uebrige gleich ist, im umgekehrten Verhältnisse der Masse des Körpers steht. Wirklich hat man bis jetzt keine Spur eines Widerstandes des Aethers in der Bewegung der Planeten und Trabanten entdeckt; dagegen scheint, nach Enke's Berechnungen, dieser Widerstand, auf eine sehr merkliche Weise, auf die Bewegung des in neuerer Zeit entdeckten Kometen einzuwirken, dessen Umlaufszeit ungefähr 1200 Tage beträgt.

III. Bewegung eines materiellen Punktes, der einer Centralkraft unterworfen ist.

234.

Die Aufgabe, die wir nun auflösen wollen, ist das Umgekehrte der des vorhergehenden §. Dort nahm man an, daſs die Trajectorie und das Gesetz der Bewegung durch die Beobachtung gegeben sey, und es sollte die Kraft, von welcher

diese Bewegung herrührt, ihrer Gröfse und Richtung nach, bestimmt werden. Nun nimmt man an, dafs eine constante Kraft nach einem festen Mittelpunkte gerichtet und als Function des Abstandes des Körpers von diesem Punkte gegeben sey, und man will daraus die Trajectorie und das Gesetz der Bewegung finden.

Diese krumme Linie DMB (Fig. 55) sey in der Ebene enthalten, die durch den festen Punkt C und durch die Richtung DA der Anfangsgeschwindigkeit geht. Ich ziehe in dieser Ebene und durch den Punkt C zwei rechtwinklige Axen Cx und Cy, von welchen die erste durch den Anfangspunkt D des Körpers geht und welche die Coordinatenaxen seyn werden. Am Ende der Zeit t, welche von diesem Ausgange an gerechnet wird, soll der Körper in M seyn; ich bezeichne durch x und y seine Coordinaten CP und CM, durch r seinen Radius Vector CM und durch R seine beschleunigende Kraft, welche von M nach C gerichtet und als Function von r gegeben ist. Die Gleichungen der Bewegung sind alsdann

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}R, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r}R; \qquad (1)$$

und wenn die Kraft R nach der Verlängerung von CM gerichtet wäre, so brauchte man nur die Zeichen der zweiten Theile dieser Gleichungen zu ändern.

Man kann hieraus unmittelbar die zwei ersten Integrale

$$xdy - ydx = cdt, \quad \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = -2\int Rdr + b$$

ableiten, in welchen b und c die willkührlichen Constanten sind und wenn man ϑ den Winkel MCx nennt, so dafs man

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta$$

hat, so werden diese Integrale

$$r^2d\vartheta = cdt, \quad \frac{dr^2 + r^2d\vartheta^2}{dt^2} = -2\int Rdr + b, \quad (2)$$

aus welchen man die Werthe von dt und $d\vartheta$, unter der Form

$$dt = frdr, \quad d\vartheta = Frdr$$

ableiten kann, die man nur noch genau oder näherungsweise integrieren mufs.

Eliminiert man dt aus den Gleichungen (2), so hat man

$$c^2\left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\vartheta}\right)^2+\frac{c^2}{r^2}+2\int R\,dr=b, \qquad (3)$$

als Differentialgleichung der Trajectorie. Nennt man v die Geschwindigkeit des Körpers im Punkte M, so hat man

$$v^2=b-2\int R\,dr, \qquad (4)$$

und wenn man durch δ den Winkel bezeichnet, den seine Richtung mit MC einschliefst, so sind seine Seitengeschwindigkeiten

$$v\cos\delta=-\frac{dr}{dt},\quad v\sin\delta=r\frac{d\vartheta}{dt},$$

nach MC und nach MH, welche Linie senkrecht auf diesem Radius Vector steht.

Die zwei Constanten b und c, und diejenigen, welche durch die Integration der Werthe von dt und $d\vartheta$ eingeführt werden, lassen sich nach der Lage und anfänglichen Geschwindigkeit des Körpers bestimmen. Zu diesem Zwecke bezeichne ich durch γ den anfänglichen Abstand CD, durch α den Winkel CDA, der spitz oder stumpf seyn kann, und durch h die Höhe, welche zur Anfangsgeschwindigkeit gehört, so dafs diese $\sqrt{2gh}$ ist, wenn man die Schwere g nennt. Nimmt man an, dafs das Integral $\int R\,dr$, welches in den vorhergehenden Formeln vorkommt, Null ist, wenn $r=\gamma$ ist, so hat man

$$b=2gh$$

vermöge des Werthes von v^2. In Folge der Gleichung $r^2 d\vartheta=c\,dt$, ist der Werth von $v\sin\delta$ derselbe, wie $\frac{c}{r}$, folglich hat man

$$c=\gamma\sqrt{2gh}.\sin\alpha.$$

Was die beiden anderen willkührlichen Constanten betrifft, so bestimmt man sie auf die Weise, dafs man $\vartheta=o$ und $r=\gamma$ hat, wenn $t=o$ ist, und die Aufgabe ist alsdann vollständig gelöst.

235.

Wenn die Kraft R dem Abstande r proportional ist, so sind die Veränderlichen in den Gleichungen (1) getrennt, und

man braucht nicht auf die Polarcoordinaten und die Gleichungen (2) zurück zu gehen.

Sey nemlich k der Werth von R, welcher $r = \gamma$ entspricht, und

$$R = \frac{k r}{\gamma}$$

sein allgemeiner Werth. Die Gleichungen (1) werden

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{k x}{\gamma}, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = -\frac{k y}{\gamma},$$

und ihre vollständigen Integrale sind

$$x = A \cos t \sqrt{\frac{k}{\gamma}} + A' \sin t \sqrt{\frac{k}{\gamma}}$$

$$y = B \cos t \sqrt{\frac{k}{\gamma}} + B' \sin t \sqrt{\frac{k}{\gamma}}$$

wo A, A', B, B' die vier willkührlichen Constanten sind. Um sie zu bestimmen, hat man, nach den vorhergehenden Annahmen,

$$x = \gamma, \; y = o, \; \frac{dx}{dt} = -\sqrt{2gh} \,.\, \cos\alpha, \; \frac{dy}{dt} = \sqrt{2gh} \sin\alpha,$$

wenn $t = o$ ist; hieraus folgt

$$A = \gamma, \quad A' \sqrt{\frac{k}{\gamma}} = -\sqrt{2gh} \cos\alpha$$

$$B = o, \quad B' \sqrt{\frac{k}{\gamma}} = \sqrt{2gh} \sin\alpha,$$

und daher

$$x = \gamma \left(\cos t \sqrt{\frac{k}{\gamma}} - \sqrt{\frac{2gh}{k\gamma}} \cos\alpha \sin t \sqrt{\frac{k}{\gamma}} \right)$$

$$y = \gamma \sqrt{\frac{2gh}{k\gamma}} \sin\alpha \sin t \sqrt{\frac{k}{\gamma}}.$$

Diese Formeln zeigen uns, daſs die Umläufe des Körpers um den Punkt C gleichzeitig sind und ihre gemeinschaftliche Dauer $= 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{k}}$ ist. Hieraus findet man

$$\gamma \sin\alpha \sin t \sqrt{\frac{k}{\gamma}} = y \sqrt{\frac{k\gamma}{2gh}}$$

$$\gamma \sin\alpha \cos t \sqrt{\frac{k}{\gamma}} = x \sin\alpha + y \cos\alpha.$$

Hieraus folgt, als Gleichung der Trajectorie,

$$\frac{k\gamma}{2gh} y^2 + (x \sin\alpha + y \cos\alpha)^2 = \gamma^2 \sin^2\alpha,$$

welche, wie man sieht, eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt im Punkte C liegt. Damit diese Ellipse ein Kreis sey, mufs $\alpha = 90^0$ und $k\gamma = 2gh$ seyn. In diesem Falle ist die Bewegung gleichförmig, denn nach den Werthen von x und y hat man

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\gamma k} \sin t \sqrt{\frac{k}{\gamma}}, \quad \frac{dy}{dt} = \sqrt{\gamma k} \cos t \sqrt{\frac{k}{\gamma}};$$

was $\sqrt{\gamma k}$ für die Geschwindigkeit v giebt. Die Centralkraft R und die Centrifugalkraft $\frac{v^2}{\gamma}$ sind constante Gröfsen und zwar beide $= k$.

Ist R eine abstofsende Kraft statt einer anziehenden, wie es bisher angenommen wurde, so mufs man k in $-k$ in den vorhergehenden Formeln ändern. Die Trajectorie ist alsdann eine Hyperbel und die Bewegung keine umdrehende mehr.

236.

Man nehme jetzt an, dafs die Kraft R im umgekehrten Verhältnisse der dritten Potenz der Abstände stehe, und bezeichne sie durch

$$R = \frac{k\gamma^3}{r^3},$$

wo k noch immer ihren Werth im Punkte D bedeutet.

Wir haben, nach dieser Hypothese,

$$2\int R dr = k\gamma \left(1 - \frac{\gamma^2}{r^2}\right),$$

weil das Integral verschwinden mufs, wenn $r = \gamma$ ist. Berücksichtigt man die Werthe von b und c und setzt

$$\frac{\gamma}{r} = z, \quad \frac{\gamma d . \frac{1}{r}}{d\vartheta} = \frac{dz}{d\vartheta},$$

so wird die Gleichung (3)

$$\frac{dz^2}{d\vartheta^2} + \left(1 - \frac{k\gamma}{2gh \sin^2\alpha}\right) z^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{k\gamma}{2gh \sin^2\alpha}.$$

Der Coefficient von z^2 kann positiv oder negativ seyn, ich setze daher

$$1 - \frac{k\gamma}{2gh\sin^2\alpha} = \pm n^2,$$

woraus sich

$$\frac{dz^2}{dt^2} \pm n^2 z^2 = \cot^2\alpha \pm n^2$$

und folglich

$$n d\vartheta = \frac{n dz}{\sqrt{\cot^2\alpha \pm n^2 \mp n^2 z^2}}$$

ergiebt.

Im Falle, wenn die oberen Zeichen gelten, hat man

$$n\vartheta = \text{arc}\left(\sin \frac{nz}{\sqrt{\cot^2\alpha + n^2}}\right) - \text{arc}\left(\sin = \frac{n}{\sqrt{\cot^2\alpha + n^2}}\right),$$

und, wenn die unteren Zeichen gelten,

$$n\vartheta = \log \frac{nz + \sqrt{\cot^2\alpha - n^2 + n^2 z^2}}{n + \cot\alpha},$$

wenn man bemerkt, dafs $r = \gamma$ und $z = 1$ ist, wenn $\vartheta = o$ ist.

Aus dem ersten Werthe von $n\vartheta$ findet man

$$nz = \cot\alpha \sin n\vartheta + n \cos n\vartheta \text{ *)}.$$

Das Maximum von z oder das Minimum von r entspricht dem Werthe von ϑ, der sich aus der Gleichung $dz = o$ oder

$$\text{tang } n\vartheta = \frac{1}{n} \cot\alpha$$

ergiebt, für welchen man

$$z = \frac{\gamma}{r} = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}\cot^2\alpha}$$

findet. Bei einem gröfseren Werthe von ϑ entfernt sich der Körper immer weiter vom Punkte C und sein Radius r wird

---

*) Wenn man nemlich zuerst

$$\frac{nz}{\sqrt{\cot^2\alpha + n^2}} = \sin\left[n\vartheta + \text{arc}\left(\sin = \frac{n}{\sqrt{\cot^2\alpha + n^2}}\right)\right]$$

setzt und dann den zweiten Theil dieser Gleichung nach der bekannten Formel

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

entwickelt. Anmerk. des Uebers.

unendlich grofs, wenn ϑ den kleinsten Werth hat, den man aus der Gleichung $z = o$ oder

$$\tang n\vartheta = - n \tang \alpha$$

findet, welchen Werth aber ϑ nur nach einer unendlich grofsen Zeit erreichen kann. Setzt man, in der ersten Gleichung (2), den Werth von $\frac{\gamma}{z}$ an die Stelle von r, so findet man daraus, ohne Schwierigkeit, t als Function von ϑ ausgedrückt.

Hat $n\vartheta$ einen logarithmischen Werth, so hat man, wenn man zu den Zahlen übergeht, und durch e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet,

$$nz + \sqrt{\cot^2\alpha - n^2 + n^2 z^2} = (n + \cot\alpha)\, e^{n\vartheta}$$

und hieraus findet man

$$z = \frac{\gamma}{r} = \frac{1}{2n}(n + \cot\alpha)\, e^{n\vartheta} + \frac{1}{2n}(n - \cot\alpha)\, e^{-n\vartheta}$$

woraus hervorgeht, dafs r unbegränzt abnimmt; so dafs der Körper eine Spirale um den Punkt C beschreibt, und diesen Punkt nach einer unendlichen Zahl von Umläufen erreichen wird.

Setzt man, zur Vereinfachung $\alpha = 90$, so hat man

$$r = \frac{2\gamma}{e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}}$$

als Gleichung dieser Spirale. Die erste Gleichung (2) wird

$$\sqrt{2gh}\, dt = \frac{4\gamma d\vartheta}{(e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta})^2}$$

und, wenn man integriert, so hat man

$$nt\sqrt{2gh} = \frac{\gamma(e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta})}{e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}}.$$

237.

Als letztes Beispiel nehme man, wie es in der Natur der Fall ist, an, dafs die Kraft R im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Abstände stehe, so dafs man

$$R = \frac{k\gamma^2}{r^2}, \quad \int R dr = k\gamma\left(1 - \frac{\gamma}{r}\right)$$

hat, wo k die Intensität dieser Kraft im Punkte D ist, für den der Werth des Integrals gleich Null gesetzt worden ist.

Setzt man

$$\frac{1}{r} = \varrho, \quad 2k\gamma - b = \beta,$$

so wird die Gleichung (3) der Trajectorie

$$c^2 \frac{d\varrho^2}{d\vartheta^2} = 2k\gamma^2\varrho - c^2\varrho^2 - \beta,$$

woraus man

$$d\vartheta = \frac{c\,d\varrho}{\sqrt{\frac{k^2\gamma^4}{c^2} - \beta - \left(\frac{k\gamma^2}{c} - c\varrho\right)^2}}$$

findet. Integriert man, und bezeichnet durch ω die willkührliche Constante, so hat man daher

$$\vartheta = \omega + \text{arc}\left(\cos = \frac{k\gamma^2 - c^2\varrho}{\sqrt{k^2\gamma^4 - c^2\beta}}\right),$$

woraus sich

$$k\gamma^2 r = c^2 - r\sqrt{k^2\gamma^4 - c^2\beta}\,\cos(\vartheta - \omega) \qquad (a)$$

ergiebt, wenn man $\omega + \pi$ an die Stelle von ω setzt, damit ω der Werth von ϑ ist, welcher dem kleinsten Werthe von r, d. h. dem Punkte der Trajectorie entspricht, wo der Körper C am nächsten ist.

Um daraus die Gleichung der krummen Linie, in rechtwinkligen Coordinaten, abzuleiten, setze ich

$$x' = r\cos(\vartheta - \omega), \quad y' = r\sin(\vartheta - \omega);$$

x' und y' werden die Coordinaten des Körpers seyn, die auf die Axen Cx' und Cy' bezogen sind, so daſs man $x'Cx = \omega$ hat. Auch ist

$$x'^2 + y'^2 = r^2,$$

und wenn man beide Theile der Gleichung (a) der Trajectorie auf das Quadrat erhebt, so ergiebt sich

$$k^2\gamma^4 y'^2 + \beta c^2 x'^2 = c^4 - 2c^2 x'\sqrt{k^2\gamma^4 - c^2\beta}.$$

Aus dieser Form erhellt, daſs die Gleichung zu einem Kegelschnitte gehört, welcher eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel seyn wird, je nachdem die beständige Gröſse β positiv, negativ oder Null seyn wird. Auch sieht man, daſs, in allen Fällen, der Punkt C der Brennpunkt dieser krummen

Linie seyn wird; denn, nach der Gleichung (a), ist der Radius Vector r eine lineare Function der Abscisse x', was, bei den drei Kegelschnitten, nur dann der Fall ist, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten einer ihrer Brennpunkte ist.

Da $b = 2gh$, so hat man

$$\beta = 2k\gamma - 2gh,$$

hieraus folgt also, dafs das Zeichen von β und folglich die Beschaffenheit des Kegelschnittes, welchen der Körper beschreibt, nur von seinem anfänglichen Abstande und seiner Anfangsgeschwindigkeit, nicht aber von der Richtung dieser Geschwindigkeit abhängt. Verschiedene materielle Punkte, die von demselben Punkte D, mit derselben Geschwindigkeit, ausgehen, werden daher Kegelschnitte von derselben Beschaffenheit beschreiben, wie auch immer ihre anfänglichen Richtungen gewesen sind. Hat man z. B. $k = g$, so ist die beschriebene krumme Linie eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die Höhe, welche zur Anfangsgeschwindigkeit gehört, kleiner wie CD, ihm gleich, oder gröfser seyn wird.

238.

Ist die Trajectorie eine Ellipse, so zeigt die Gleichung (a), dafs der gröfste und kleinste Werth von r bezüglich den Werthen $\vartheta = \omega + \pi$ und $\vartheta = \omega$ entspricht; bezeichnet man sie durch $a\,(1 + e)$ und $a\,(1 - e)$, so dafs a die halbe grofse Axe und e die Excentricität ist, so hat man also

$$(k\gamma^2 - \sqrt{k^2\gamma^4 - c^2\beta})\,a\,(1 + e) = c^2$$
$$(k\gamma^2 + \sqrt{k^2\gamma^4 - c^2\beta})\,a\,(1 - e) = c^2,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\beta a(1 + e) = k\gamma^2 + \sqrt{k^2\gamma^4 - c^2\beta}$$
$$\beta a(1 - e) = k\gamma^2 - \sqrt{k^2\gamma^4 - c^2\beta}.$$

Addiert man diese Gleichungen, und multipliciert man ihre ersten und zweiten Theile mit einander, so findet man

$$\beta a = k\gamma^2, \quad \beta a^2(1 - e^2) = c^2.$$

Setzt man für β und c ihre Werthe

$$\beta = 2\,(k\gamma - gh), \quad c = \gamma\sqrt{2gh}\,\sin\alpha,$$

so findet man daraus

$$\left.\begin{aligned} 2\,(k\gamma - gh)\,a &= k\gamma^2 \\ \gamma k\sqrt{1-e^2} &= 2\sqrt{gh\,(k\gamma - gh)}\,\sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

wodurch man die halbe grofse Axe und die Excentricität erfährt. Man bestimmt den Winkel ω, indem man, zu gleicher Zeit, in der Gleichung (a), $\vartheta = o$ und $r = \gamma$ setzt. Auf diese Weise werden die Dimensionen der Ellipse und die Lage ihrer grofsen Axe vollkommen bestimmt seyn, sobald man die anfängliche Lage, Geschwindigkeit und Richtung des Körpers kennt. Was seine Bewegung auf dieser krummen Linie betrifft, so ist sie durch die Formeln (a), (b), (c) des §. 220 bekannt.

Das Quadrat der Geschwindigkeit in einem gewissen Augenblicke ist, nach der Formel (4) des §. 234,

$$v^2 = 2gh - 2k\gamma + \frac{2k\gamma^2}{r},$$

oder, was dasselbe ist,

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \qquad (c)$$

wenn man den so eben gefundenen Werth von a berücksichtigt und $k\gamma^2 = \mu$ setzt, so dafs μ hier, wie in der Formel des §. 225, die Intensität der Centralkraft in der Einheit des Abstandes bezeichnet.

239.

Es ist nicht ohne Nutzen, die parabolische Bewegung besonders zu betrachten, welche man näherungsweise für die der Kometen, während der Dauer ihrer Sichtbarkeit, nimmt.

Da man in diesem Falle $\beta = o$ oder $k\gamma = gh$ hat, so geben die Gleichungen (b), $a = \infty$ und $e = 1$, was wirklich bei der Parabel der Fall ist. Die Formel (c) reduciert sich auf

$$v^2 = \frac{2\mu}{r};$$

nennt man u die Geschwindigkeit in einem Kreise, dessen Halbmesser r ist, so hat man vermöge dieser Formel

$$u^2 = \frac{\mu}{r},$$

daher verhält sich, in gleichem Abstande von der Sonne, die

Geschwindigkeit eines Kometen, zu der eines Planeten, welcher einen Kreis beschreibt, wie $\sqrt{2}$ zu 1.

Im Allgemeinen geben die Gleichungen (b)

$$k\gamma a(1-e)(1+e) = 2gh\gamma \sin^2\alpha,$$

wenn man beide Theile der letzten Gleichung auf das Quadrat erhebt und mit denen der ersten multipliciert. Nennt man daher p den kürzesten Abstand des Kometen von der Sonne, so dafs man

$$p = a(1-e)$$

hat, und setzt man $k\gamma = gh$ und $e = 1$, so hat man

$$p = \gamma \sin^2\alpha,$$

wodurch der Abstand des Periheliums vermittelst des anfänglichen Abstandes und der anfänglichen Richtung des Körpers, die man als bekannt voraussetzt, bestimmt wird.

Ich setze, in der Gleichung (a), $\beta = o$ und $k\gamma = gh$ und nehme statt c^2 seinen Werth $2gh\gamma^2 \sin^2\alpha$, so wird diese Gleichung

$$r = 2\gamma \sin^2\alpha - r\cos(\vartheta - \omega),$$

und hieraus folgt

$$r = \frac{2p}{1+\cos(\vartheta-\omega)}$$

als Gleichung der Trajectorie. Setzt man $\vartheta = o$ und $r = \gamma$ so findet man daraus

$$\gamma(1+\cos\omega) = 2p, \quad \cos\tfrac{1}{2}\omega = \sin\alpha,$$

wodurch der Winkel ω bestimmt wird, welchen der Radius Vector des Periheliums mit demjenigen einschliefst, der nach dem Ausgangspunkte des Körpers gezogen ist.

Ich substituiere die Werthe von c und r in die erste Gleichung (2) des §. 234 und setze, zur Abkürzung,

$$\frac{\gamma\sqrt{gh}\sin\alpha}{p^2} = n,$$

hieraus folgt

$$\frac{4d\vartheta}{[1+\cos(\vartheta+\omega)]^2} = n\sqrt{2}\,dt.$$

Bemerkt man, dafs

$$1+\cos(\vartheta-\omega) = 2\cos^2\tfrac{1}{2}(\vartheta-\omega)$$

ist, und setzt man

$$\vartheta - \omega = 2\psi, \quad d\vartheta = 2d\psi,$$

so ergiebt sich

$$\frac{d\psi}{\cos^4\psi} = \frac{n\,dt}{\sqrt{2}},$$

woraus man, wenn man integriert, und die willkührliche Constante durch ε bezeichnet,

$$(3 + \tang^2\psi)\tang\psi + \varepsilon = \frac{3nt}{\sqrt{2}}$$

findet. Um diese Constante zu bestimmen, hat man zu gleicher Zeit

$$t = o, \quad \vartheta = o, \quad \psi = -\tfrac{1}{2}\omega,$$

und da $\cos\frac{1}{2}\omega = \sin\alpha$ ist, so folgt hieraus

$$\varepsilon = (3 + \cot^2\alpha)\cot\alpha.$$

Nennt man t' die Zeit, welche seit dem Ausgange des Körpers bis zu seinem Durchgange durch das Perihelium verflossen ist, so hat man zu gleicher Zeit

$$t = t', \quad \vartheta = \omega, \quad \psi = o,$$

und daher

$$t' = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{3n}.$$

Dies vorausgesetzt, bezeichne man durch τ die Zeit, welche vom Augenblicke dieses Durchgangs an gezählt wird, so dafs man $t = t' + \tau$ hat, so ergiebt sich

$$[3 + \tang^2\tfrac{1}{2}(\vartheta - \omega)]\tang\tfrac{1}{2}(\vartheta - \omega) = \frac{3nt}{\sqrt{2}}; \qquad (\epsilon)$$

löfst man diese Gleichung des dritten Grades auf, so hat man daher $\tang\frac{1}{2}(\vartheta - \omega)$ als Function von τ ausgedrückt, und daher auch r und ϑ für einen beliebigen Augenblick. Die Zeit τ ist nach dem Durchgange durch das Perihelium positiv und vor diesem Durchgange negativ.

Da

$$gh\gamma = k\gamma^2 = \mu, \quad \sqrt{\gamma}\sin\alpha = \sqrt{p},$$

so ist der vorhergehende Werth von n derselbe, wie

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{p\sqrt{p}},$$

er ist daher, nach der Gleichung $a^3n^2 = \mu$ des §. 228, die mittlere Winkelgeschwindigkeit eines Planeten, dessen halbe grofse Axe gleich p ist, und wenn man i die der Erde und l ihre halbe grofse Axe nennt, so dafs man

$$i = \frac{\sqrt{\mu}}{l\sqrt{l}}$$

hat, so findet man hieraus

$$n = \frac{il\sqrt{l}}{p\sqrt{p}}$$

für den Werth von n.

240.

Diese Analyse zeigt, daſs man, wenn man die Bestimmung der Bewegung eines Kometen als eine dynamische Aufgabe ansieht und daher voraussetzt, daſs seine anfängliche Lage, Richtung und Geschwindigkeit bekannt sey, aus diesen Angaben den Abstand p der Spitze der Parabel vom Brennpunkte, den Augenblick des Durchganges des Körpers durch diese Spitze, oder den Werth von t' und die Lage der Axe, die vom Winkel ω abhängt, ableiten kann. Die Gleichungen (c), (d) und (e) geben alsdann die Geschwindigkeit des Kometen und seine Lage auf der Trajectorie für jeden beliebigen Augenblick an, und da die Ebene der krummen Linie diejenige ist, welche durch den Mittelpunkt der Sonne und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit geht, so folgt daraus, daſs die Bewegung vollkommen bestimmt ist. Die astronomische Aufgabe ist aber eine andere. Entdeckt man einen Kometen, so geben die Beobachtungen nicht unmittelbar die Ebene seiner Bahn, seinen Abstand von der Sonne, seine Geschwindigkeit und seine Richtung, für den Augenblick, in welchem er sichtbar wird; so daſs also, wenn man seine Lage, in diesem Augenblicke, als Ausgangspunkt nimmt, die Constanten γ, h, α nicht, wie in der vorhergehenden Aufgabe, gegeben sind. Die Frage besteht alsdann darin, aus den Beobachtungen die Werthe von fünf Gröſsen, nemlich: die Neigung der Bahn und die Länge ihres aufsteigenden Knotens auf der Ebene der Ekliptik, wodurch die Ebene der Bahn bestimmt wird, die Länge des Periheliums und seinen Abstand von der Sonne, welche Stücke die Lage der Bahn in ihrer Ebene angeben und endlich die dem Durchgange des Kometen durch sein Perihelium entsprechende Zeit zu finden. Wenn diese fünf unbekannten Gröſsen bestimmt sind, so geben die Gleichungen (c), (d) und (e), wie früher, die Bewegung des Kometen in seiner Ebene.

Jede Beobachtung des Kometen giebt aber seine gerade Aufsteigung und seine Deklination; drei Beobachtungen geben also sechs Data, und daher sechs Gleichungen, die mehr als hinreichend sind, um die fünf Unbekannten zu bestimmen. Daher kann man zwei dieser Gleichungen durch ihre Verbindung ersetzen, welche am geeignetsten ist, den Einfluſs der Beobachtungsfehler zu ersetzen. Hat man die Näherungswerthe der fünf angegebenen Elemente auf diese Weise, aus den, zur Zeit der Erscheinung des Kometen, angestellten Beobachtungen, gefunden, so dienen alsdann die folgenden Beobachtungen dazu, diese ersten Werthe zu verbessern und die Formeln (d) und (e) zu bestätigen.

Wir können hier diese astronomische Aufgabe, von welcher man mehrere Auflösungen hat, nur andeuten.

Siebentes Kapitel.

Digression über die allgemeine Anziehung.

241.

Die materiellen Punkte aller Körper ziehen sich wechselseitig, im directen Verhältnisse der Massen und im umgekehrten des Quadrates der Abstände, an.

Dieses grofse Naturgesetz, welches Newton entdeckt hat, ist eine nothwendige Folge der Beobachtungen und des Calculs. Man kann in Laplace's "Exposition du système du monde" sehen, wie man, wenn man von der Erfahrung ausgeht, ohne Hypothese und durch eine Reihe strenger Schlüsse auf das Princip der allgemeinen Anziehung geführt wird. Die Entwickelungen dieses Princips sind der besondere Zweck der Mechanik des Himmels. In diesem Kapitel beschränke ich mich darauf, die wesentlichsten Folgen desselben in der Kürze zu erläutern.

242.

Die Kraft, welche die Planeten in ihren Bahnen zurück hält, ist die Mittelkraft der Anziehung, die durch alle materiellen Punkte der Sonne auf alle eines jeden Planeten ausgeübt wird. Wegen der Kleinheit der Dimensionen der Sonne und der Planeten im Verhältnisse zu den Abständen, die sie trennen, können diese Anziehungen, mit hinlänglicher Genauigkeit, in der ganzen Ausdehnung eines Planeten, als parallele und gleiche Kräfte angesehen werden. Ihre Mittelkraft ist alsdann ihrer Summe gleich und, wenn der Abstand derselbe bleibt, so ist die bewegende Kraft eines jeden Planeten dem Produkte aus seiner Masse in die der Sonne proportional, was, wegen der fast kugelförmigen Gestalt dieser zwei Körper, noch genauer wird, wenn man für ihren Abstand den ihrer Schwerpunkte nimmt (§. 99).

Man nehme daher, um die Intensität dieser Kraft in Zahlen auszudrücken, an, dafs man einen gewissen Abstand, z. B. den der Sonne von der Erde, als lineare Einheit betrachte; man wähle sich eine bestimmte Masse und einen be-

stimmten Zeitraum als Einheiten dieser Art von Gröſsen, und nehme noch, wie in §. 118, als Einheit der Kraft, die beständige beschleunigende Kraft, welche in der Zeiteinheit eine der Längeneinheit gleiche Geschwindigkeit hervorbringt. Man denke sich jetzt zwei Körper, deren Massen derjenigen gleich sind, welche man für die Einheit genommen hat, und die in einem Abstande von einander stehen, welcher der Längeneinheit gleich ist. Sey f die anziehende Kraft, welche einer dieser Körper auf den anderen ausübt, d. h. das numerische Verhältniſs seiner Intensität zu der der Kraft, die als Einheit angenommen worden ist. Ferner seyen M und m die Masse der Sonne und die des Planeten; die bewegende Kraft des Planeten wird, in der Einheit des Abstandes, fMm seyn, und wird im Abstande r gleich $\frac{fMm}{r^2}$.

Der Werth der Gröſse, die wir mit f bezeichnen, hängt von der anziehenden Kraft ab, welche die Materie besitzt; diese Kraft ist, bei gleicher Masse und gleichem Abstande, für alle Körper in der Natur dieselbe. Nichts läſst bis jetzt vermuthen, daſs sie mit der Zeit zu- oder abnimmt, und man hat Grund zu glauben, daſs sie immer dieselbe war und seyn wird.

243.

Die bewegende Kraft der Masse M, die von der Masse m herrührt, wird ebenfalls durch $\frac{fmM}{r^2}$ dargestellt, so daſs die Wirkung, welche jeder Planet auf die Sonne ausübt, der Wirkung der Sonne auf den Planeten gleich und entgegengesetzt ist. Da aber die bewegende Kraft $\frac{fMm}{r^2}$, die auf die zwei Massen M und m wirkt, ihnen in jedem Augenblicke unendlich kleine Geschwindigkeiten mittheilt, welche diesen Massen umgekehrt proportional sind, so sind ihre beschleunigenden Kräfte $\frac{fm}{r^2}$ und $\frac{fM}{r^2}$. Hieraus folgt, daſs, wenn diese beiden Körper, ohne Anfangsgeschwindigkeit zu haben, ihrer wechselseitigen Anziehung überlassen sind, sie sich einander nähern werden, indem sie, in derselben Zeit, Räume durchlaufen, die im umgekehrten Verhältnisse ihrer Massen stehen. Sie

treffen im Schwerpunkte von M und m zusammen, welcher ihren anfänglichen Abstand in zwei Theile theilt, die den Massen umgekehrt proportional sind.

Hat, im Allgemeinen, der Planet im Raume eine Bewegung nach einer gewissen Richtung angenommen, und will man seine scheinbare Bewegung um den Mittelpunkt der Sonne, den man als fest ansieht, bestimmen, so muſs man annehmen, daſs man derselben, in jedem Augenblicke, eine unendlich kleine Geschwindigkeit mittheilt, die derjenigen, welche von der Anziehung des Planeten herrührt, gleich und entgegengesetzt ist. Um aber die relative Bewegung dieser zwei Körper nicht zu ändern, muſs man, zu gleicher Zeit, diese Geschwindigkeit dem Planeten mittheilen, was darauf zurück kommt, daſs man eine beschleunigende Kraft an denselben anbringt, welche der der Sonne gleich und entgegengesetzt ist. Bei der Bewegung, die wir hier betrachten, ist daher die beschleunigende Kraft des Planeten m immer gegen die Sonne M gerichtet und der Summe der beiden Kräfte $\frac{fM}{r^2}$, $\frac{fm}{r^2}$ gleich. Will man daher dieselbe, wie in §. 225, durch $\frac{\mu}{r^2}$ ausdrücken, so muſs man

$$\mu = f(M + m)$$

setzen.

Diesen Werth muſs man daher in die verschiedenen Gleichungen der elliptischen Bewegung, welche früher gegeben worden sind, substituieren; die Gleichung

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \mu$$

des angeführten §. giebt also

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{f(M+m)}, \qquad (1)$$

wo T noch immer die Umlaufszeit des Planeten und a die halbe groſse Axe seiner Bahn ist.

Das Verhältniſs $\frac{T^2}{a^3}$, welches, wie man sieht, von der Gröſse m abhängt, wird daher bei zwei Planeten, deren Massen ungleich sind, verschieden seyn, so daſs man nicht annehmen kann, daſs es bei allen Planeten genau dasselbe ist.

Indessen zeigen die Beobachtungen, welche zum dritten Kepplerschen Gesetze führen, dafs dieses Verhältnifs fast, wenn auch nicht ganz genau, beständig ist. Man mufs hieraus schliefsen, dafs die Massen der Planeten, im Verhältnifs zu der Masse der Sonne sehr klein sind, so dafs das Verhältnifs $\frac{T^2}{a^3}$ des Quadrates der Zeit zur dritten Potenz des mittleren Abstandes sich nur sehr wenig von einem Planeten zum anderen ändert. Die Masse des Jupiters, welche unter allen die beträchtlichste ist, beträgt weniger als ein Tausendtel der Masse der Sonne.

244.

Aus diesem Grunde bringt die wechselseitige Anziehung der Planeten nur sehr langsame oder sehr unbeträchtliche Störungen in der elliptischen Bewegung, welche von der Anziehung der Sonne herrührt, hervor. Denn wenn die Massen zweier Planeten m und m_1 sind, so ist der Ausdruck der bewegenden Kraft, die von dem einen nach dem anderen gerichtet ist, im Abstande ϱ gleich $\frac{fmm_1}{\varrho^2}$; die beschleunigende Kraft von m, welche von der Anziehung von m_1 herrührt, ist daher $\frac{fm_1}{\varrho^2}$, und da der Abstand ϱ niemals im Verhältnifs zu dem Abstande r, in welchem m von der Sonne steht, sehr klein wird, so folgt hieraus, dafs, wenn m_1 ein sehr kleiner Bruch von M ist, die Bewegung von m, welche durch die Anziehung der Sonne hervorgebracht wird, durch die Anziehung von m_1 nur sehr wenig modificiert werden kann.

Die planetarischen Störungen können daher durch die Methode der Variation der willkührlichen Constanten, die früher (§. 229) erklärt worden ist, bestimmt werden. Sie bestehen aus zwei verschiedenen Arten. Die einen nemlich sind periodische Ungleichheiten, die im Allgemeinen sehr klein sind und deren Perioden, in der Regel, nur sehr unbeträchtliche Vielfache der Umläufe des gestörten und störenden Planeten enthalten. Wenn jedoch ihre mittleren Bewegungen beinahe commensurabel sind, so können diese Perioden viel länger und die Ungleichheiten viel bedeutender werden. So z. B. verhalten sich die mittleren Bewegungen des Saturn

und Jupiter beinahe wie 2 zu 5, und wirklich hat Laplace gefunden, dafs aus der wechselseitigen Anziehung dieser zwei Planeten eine Ungleichheit entspringt, deren Periode 929 Jahre ist, und deren Maximum ungefähr 48′ in der Länge des Saturn und 20′ in der Länge des Jupiter beträgt.

Die übrigen Störungen der Planeten sind:

1) Die progressiven Bewegungen des Periheliums und der Knoten ihrer Bahnen, in welchen diese Punkte den ganzen Umring in sehr langen Zeiten, die viele tausend Jahre betragen können, durchlaufen.

2) Die säcularen Aenderungen, welche die Excentricitäten und die Neigungen ihrer Bahnen ändern, so wie auch die mittleren Längen der Planeten, deren Perioden den vorhergehenden ähnlich sind, und deren wenig beträchtliche Weiten noch nicht völlig bekannt sind.

Während aber diese verschiedenen Elemente der elliptischen Bewegung, in Folge der planetarischen Anziehung, sich zu gleicher Zeit ändern, so ändert diese Kraft merkwürdiger Weise die grofsen Axen der Bahnen und die mittleren Bewegungen der Planeten nicht, welche daher zu allen Zeiten dieselben seyn werden, ebenso wie die Umlaufszeiten, die durch die Gleichung (1) mit den grofsen Axen verbunden sind.

Jedoch bringen die säcularen Aenderungen der mittleren Längen ähnliche Aenderungen in den Zeiträumen, die zwischen zwei auf einander folgenden Rückkehren zu demselben festen Punkte verfliefsen, hervor. Sie sind bei der Bewegung der Planeten unmerklich, nicht aber bei der der Trabanten und besonders des Mondes, welche aus diesem Grunde mit jedem Jahrhunderte schneller wird.

Da die beschleunigende Kraft, welche von der Anziehung eines Planeten m_1, die auf einen anderen Planeten m ausgeübt wird, von der Masse m unabhängig und der Masse m_1 proportional ist, so ergiebt sich, dafs die Störungen, welche von dieser Kraft herrühren und bei der Bewegung von m um die Sonne beobachtet werden, dazu dienen können, das Verhältnifs der Masse m_1 zu der der Sonne zu bestimmen. So z. B. hat man aus der grofsen Ungleichheit des Saturns, die durch die Wirkung des Jupiter hervorgebracht wird, ge-

funden, dafs die Masse dieses letzteren Planeten $\frac{1}{1070}$ von der der Sonne ist. Ich werde sogleich ein anderes Mittel angeben, wie man die Masse der Planeten berechnen kann, wenn sie von einem oder mehreren Trabanten begleitet werden.

Die Kometen bringen, wegen der Kleinheit ihrer Massen, gar keine bemerkbare Einwirkung auf die Planeten hervor. Dagegen werden ihre Bewegungen durch die planetarischen Anziehungen gestört und man bestimmt auch, durch die Methode des §. 229, ihre Störungen, welche sehr bedeutend auf die Epochen der Wiedererscheinung eines jeden Kometen, d. h. auf den Zeitraum, welcher zwischen zwei auf einander folgenden Durchgängen durch das Perihelium enthalten ist, einwirken.

245.

Seyen m' und m die Massen eines Trabanten und seines Planeten und r' der Abstand ihrer Mittelpunkte; die bewegende Kraft des Trabanten, welche nach dem Mittelpunkte des Planeten gerichtet ist, wird ebenfalls, in diesem Abstande r', durch $\frac{fmm'}{r'^2}$ ausgedrückt, wo der Coefficient f derselbe ist, wie früher.

Die beschleunigende Kraft des Trabanten, in seiner scheinbaren Bewegung um den Planeten, hat den Werth $\frac{\mu}{r'^2}$, wenn man

$$\mu' = f(m + m')$$

setzt.

Ich bezeichne durch a' die halbe grofse Axe der Bahn des Trabanten und durch T' seine Umlaufszeit; wendet man die Gleichung (1) auf seine Bewegung an, so hat man

$$\frac{T^2}{a'^3} = \frac{4\pi^2}{f(m+m')},$$

und wenn man in diesen zwei Gleichungen die ersten und zweiten Theile mit einander dividiert, um den Coefficienten f zu eliminieren, so hat man

$$\frac{T^2}{T'^2} \cdot \frac{a'^3}{a^3} = \frac{m+m'}{M+m}.$$

Mit Ausnahme des Mondes sind aber die Massen der Trabanten sehr klein im Verhältniſs mit denen ihrer Planeten. Die Masse eines Jupitertrabanten z. B. ist nicht der zehntausende Theil von der dieses Planeten. Man kann daher m an die Stelle von $m + m'$ in diese letztere Gleichung setzen, und da a, a', T, T' durch die Beobachtung gegeben sind, so kann sie dazu dienen, das Verhältniſs von m zu M zu bestimmen. Auf diese Weise hat Newton gefunden, daſs die Masse des Jupiter $\frac{1}{1067}$ der Masse der Sonne ist, was nur wenig von dem Werthe $\frac{1}{1070}$ verschieden ist, den man nachher durch ein anderes Mittel gefunden hat *).

246.

Die wechselseitige Anziehung der Trabanten eines und desselben Planeten, wenn er deren mehrere hat, und die Ungleichheit der Wirkung, welche die Sonne auf jeden Trabanten und seinen Planeten ausübt, bringen in den elliptischen Bewegungen der Trabanten ganz ähnliche Störungen hervor, wie wir sie für die Planeten gefunden haben. Die Störungen, welche von der Wechselwirkung der Planeten herrühren, geben die Verhältnisse ihrer Massen zu der des Planeten an, dessen Wirkung ihre elliptische Bewegung hervorbringt. Da dieses Mittel aber bei dem Monde nicht anwendbar ist, so muſs man, um seine Masse zu bestimmen, andere Betrachtungen anwenden, von welchen ich hier nur die Wirkung dieses Trabanten auf das Meer hervorheben will.

Sey C (Fig. 56) der Mittelpunkt der Erde, A der des Mondes, M ein beliebiger Punkt des Erdsphäroids, man setze

$$CA = \alpha, \quad AM = \varrho, \quad CM = r,$$

und bezeichne den Winkel ACM durch λ, so hat man

$$\varrho^2 = \alpha^2 - 2\alpha r \cos\lambda + r^2,$$

*) In der neuesten Zeit hat man jedoch gefunden, daſs die Masse des Jupiter noch um ein Beträchtliches gröſser ist. Airy hat dieselbe zu $\frac{1}{1047{,}68}$ bestimmt (Memoirs of the Roy. Astron. Society Vol. 6). Man vergleiche auch einen Aufsatz von Olbers in Harding's astronom. Ephemeriden für das Jahr 1834. S. 122 ff.

Anmerk. des Uebers

und wenn man vom Punkte M die senkrechte MB auf die Linie AC fällt, so hat man auch

$$MB = r \sin\lambda, \quad AB = \alpha - r\cos\lambda.$$

Im Punkte M ist der Werth der beschleunigenden Kraft, die von der Anziehung des Mondes herrührt und nach MA gerichtet ist, $\frac{fm'}{\varrho^2}$, indem man durch m' die Masse des Trabanten und durch f denselben Coefficienten, wie früher, bezeichnet. Die Seitenkräfte dieser Kraft, welche nach der senkrechten Linie MB und der mit AC parallelen MD gerichtet sind, werden daher

$$\frac{fm' r\sin\lambda}{\varrho^3}, \quad \frac{fm'\alpha}{\varrho^3} - \frac{fm' r\cos\lambda}{\varrho^3}$$

seyn. Ich substituiere den Werth von ϱ in diese Ausdrücke, und da der gröfste Werth von r, d. h. der Halbmesser der Erdkugel nur ungefähr $\frac{1}{60}$ von α ist, so vernachlässige ich das Quadrat von r. Setzt man daher

$$\frac{fm' r\sin\lambda}{\alpha^3} = \varphi, \quad \frac{2fm' r\cos\lambda}{\alpha^3} = \varphi',$$

so sind die zwei Seitenkräfte der Anziehung des Mondes

$$\varphi \text{ und } \frac{fm'}{\alpha^2} + \varphi'.$$

Es werden daher alle Punkte der Erde, parallel mit CA, durch eine beständige Kraft, die gleich $\frac{fm'}{\alpha^2}$ ist, getrieben werden, und aufserdem durch die Kräfte φ und φ', deren Mittelkraft sich, der Gröfse und Richtung nach, von einem Punkte M zum anderen ändert und im Mittelpunkte C Null ist. Es ist aber offenbar, dafs in Folge der Kraft $\frac{fm'}{\alpha^2}$ die ganze Masse der Erde, mit einer allen Punkten gemeinschaftlichen Bewegung, nach dem Monde hin gezogen wird, ohne dafs die Punkte des flüssigen Theils ihre relativen Lagen ändern; daher sind es die an die verschiedenen Punkte des Meeres angebrachten Kräfte φ und φ', welche die durch die Einwirkung des Mondes entstehende Ebbe und Fluth hervorbringen.

Ist die Masse der Sonne M und ihr Abstand von der Erde a, und bezeichnet man aufserdem, durch μ, ψ, ψ', das, was λ, φ, φ' in Beziehung auf die Sonne werden, so hat man auch

$$\psi = \frac{f\, M\, r \sin \mu}{a^3}, \quad \psi' = \frac{2 f\, M\, r \cos \mu}{a^3}$$

als Seitenkräfte der Kraft, die von der Wirkung der Sonne herrührt, welche ebenfalls zu der Erscheinung der Ebbe und Fluth beitragen. Vergleicht man sie mit den Kräften φ und φ', so sieht man, dafs für einen Punkt des Meeres, dessen Radius Vector r denselben Winkel λ oder μ mit dem Radius Vector des Mondes oder der Sonne einschliefst, die Wirkungen dieser beiden Weltkörper, welche die Schwankungen des Meeres hervorbringen, sich zu einander verhalten, wie ihre Massen, dividiert durch die dritte Potenz ihrer Abstände von dem Mittelpunkte der Erde. Man sieht aber, dafs, wenn sonst alles gleich ist, die Gröfsen dieser Schwankungen sich zu einander verhalten, wie die entsprechenden Kräfte. Bezeichnet man daher durch ω das Verhältnifs der durch den Mond verursachten Fluth zu der durch die Sonne verursachten, für denselben Ort der Erde und ähnliche Lagen beider Weltkörper, so hat man

$$\frac{m'}{\alpha^3} = \frac{\omega M}{a^3},$$

in welcher Gleichung man für α und a die mittleren Abstände des Mondes und der Sonne von der Erde nehmen mufs und woraus man

$$\frac{m'}{m} = \omega \frac{\alpha^3}{a^3} \frac{M}{m}$$

findet, wenn man m die Masse der Erde nennt.

Man kann wirklich die von dem Monde und die von der Sonne herrührenden Fluthen, durch die verschiedenen Gesetze, die sie befolgen, von einander unterscheiden und ihr Verhältnifs an jedem Orte der Erde bestimmen. Das Mittel aus einer grofsen Anzahl von Beobachtungen, die im Hafen von Brest angestellt worden sind, giebt *)

$$\omega = 2{,}3533$$

*) Mécanique céleste T. V. pg. 206.

als Werth dieses Verhältnisses. Der Abstand a ist ungefähr 400 mal so grofs als der Abstand α und die Masse M, wie man sogleich sehen wird, ungefähr das 355000 fache der Masse m. Vermittelst dieser Werthe findet man nach der vorhergehenden Formel, dafs die Masse des Mondes $\frac{1}{75}$ der Masse der Erde ist.

Die Wirkungen des Mondes und der Sonne bringen, abgesehen von den Schwankungen des Meeres, auch in der Bewegung des Erdsphäroids um seinen Schwerpunkt, wegen seiner Abplattung, Störungen hervor, die ich auseinander setzen werde, wenn von der drehenden Bewegung eines festen Körpers die Rede seyn wird.

247.

Man bemerke, dafs die nach der Verlängerung $M\mathcal{E}$ des Halbmessers CM gerichtete Seitenkraft von φ und φ' gleich $\varphi' \cos\lambda - \varphi \sin\lambda$ ist, so dafs ihr Werth

$$(2\cos^2\lambda - \sin^2\lambda)\,\frac{fmr}{75\,\alpha^3}$$

beträgt. Dies ist die Verminderung der Schwere im Punkte M, welche die Wirkung des Mondes hervorbringt. Nimmt man aber an, dafs M ein Punkt der Oberfläche der Erde ist, und bezeichnet durch g die Schwerkraft in diesem Punkte, so hat man auch beinahe $fm = gr^2$. Ferner entspricht das Maximum von $2\cos^2\lambda - \sin^2\lambda$ dem Werthe $\lambda = o$ und ist $= 2$. Der gröfste Werth dieser Verminderung der Schwere ist daher $\frac{2gr^3}{75\,\alpha^3}$, welche Gröfse beinahe $\frac{1}{8000000}$ von g beträgt, wenn man $\frac{\alpha}{r} = 60$ setzt. Man müfste daher, wenn der Einflufs der Wirkung des Mondes auf die Länge des Secundenpendels mefsbar werden sollte, die Genauigkeit bis zur zweiten Decimale nach den Hunderttausendteln treiben können, wo man gewöhnlich bei der Bestimmung seiner Länge stehen bleibt. Dieser Einflufs würde im Zeitmafse eine Ungleichheit hervorbringen, die sich nach der Bewegung des Mondes richtete, und deren Maximum in einem Tage nicht über den hunderten Theil einer Secunde betragen würde.

248.

Die Schwere, welche wir an der Oberfläche der Erde beobachten, ist, abgesehen von der Centrifugalkraft, die von der Umdrehung der Erde herrührt, die Mittelkraft der Anziehungen, welche durch alle Punkte des Sphäroids auf jeden materiellen Punkt ausgeübt werden, welche Mittelkraft nur von der Lage und der Masse dieses Punktes, nicht aber von der Natur des Körpers, dem er angehört, abhängt; dies hat auch die Erfahrung vollständig bestätigt. Die Intensität dieser Kraft muſs abnehmen, so wie man sich über die Oberfläche der Erde erhebt, und dies folgt auch aus den Pendelversuchen, die in verschiedenen Höhen angestellt worden sind. Ferner muſs die Schwerkraft an der Erde, wenn man sie im Verhältnisse des Quadrates des Erdhalbmessers zum Quadrate des Halbmessers der Mondbahn vermindert, die beschleunigende Kraft seyn, welche den Mond in seiner Bahn zurückhält. Da aber der Abstand des Mondes ungefähr das Sechzigfache des Halbmessers der Erde beträgt, so folgt hieraus, daſs der Mond, wenn er gar keine Geschwindigkeit hätte, sich in einer Minute durch denselben Raum nach der Erde hin bewegen müſste, den irgend ein Körper an der Oberfläche der Erde in einer Secunde durchlauft. Diese Gröſse ist nichts Anderes als der Sinus versus des Bogens, den der Mond in seiner Bahn in einer Minute beschreibt, oder beinahe das Quadrat dieses Bogens dividiert durch den Durchmesser dieser krummen Linie. Da nun der Umfang der Bahn sechzigmal so viel als der der Erde beträgt, so findet man hieraus, daſs die erwähnte Gröſse 40 Millionen Meter, multipliciert mit $\frac{60\pi}{n^2}$, beträgt, wenn man durch n die Anzahl der Minuten bezeichnet, welche die Umlaufszeit des Mondes enthält. Dieses Produkt muſs daher, vermöge des Werthes von g, den man durch die Pendelversuche gefunden hat, beinahe gleich 4,90 Meter seyn; man findet wirklich 4,88 Meter, wenn man bemerkt, daſs $n = 39343$ ist. Der Unterschied würde noch unbedeutender seyn, wenn man verschiedene Umstände, die wir, um den Beweis zu vereinfachen, weggelassen haben, berücksichtigen wollte.

Die Schwere an der Oberfläche der Erde ist daher ein

besonderer Fall der allgemeinen Anziehung und man nennt daher auch diese allgemeine Kraft die allgemeine Schwere oder Gravitation.

249.

Da die Erde sich wenig von der Kugelgestalt entfernt, so ist die Anziehung, welche sie auf einen Punkt ihrer Oberfläche ausübt, ungefähr $\frac{fm}{r^2}$, wie die einer Kugel, wenn man durch m ihre Masse, durch r ihren Halbmesser und durch f den Coefficienten der allgemeinen Anziehung bezeichnet. Dieser genäherte Werth mufs für die Punkte, welche einem gewissen Parallelkreise angehören, genau richtig seyn und nach der Theorie der Anziehung der Sphäroide, die wenig von einer Kugel verschieden sind, ist dieser Parallelkreis derjenige, bei welchem das Quadrat des Sinus der Breite $\frac{1}{3}$ beträgt. Auf diesem Parallelkreise ist das Maafs der Schwere $9^m,79386$ (§. 193), um es aber der Anziehung der Erde gleich zu setzen, mufs man es zuerst noch um die verticale Seitenkraft der Centrifugalkraft vermehren, welche Seitenkraft, unter diesem Parallelkreise, dem Bruche $\frac{2}{3 \cdot 289}$ der Schwerkraft gleich ist (§. 178). Setzt man daher

$$g = (9^m,79386)\left(1 + \frac{2}{3 \cdot 289}\right) = 9^m,81645,$$

so kann man diesen, so modificierten, Werth der Schwere, als der Anziehung der Erde gleich ansehen und

$$g = \frac{fm}{r^2}$$

setzen.

Multipliciert man die beiden Theile dieser Gleichung mit denen der Gleichung (1) des §. 243, die auf die Bewegung der Erde um die Sonne angewandt wird, so findet man daraus

$$\frac{m}{M+m} = \frac{g\,T^2 r^2}{4\,\pi^2 a^3},$$

welche Formel dazu dient, das Verhältnifs der Masse der Erde zu der der Sonne zu bestimmen.

Denkt man sich ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Grundlinie der Halbmesser der Erde und dessen Höhe sein Abstand

von der Sonne ist, so ist der kleine Winkel, welcher der Grundlinie gegenüber liegt, die Parallaxe der Sonne, die man direct durch astronomische Beobachtungen bestimmen und auch aus einer gewissen Ungleichheit, welche in der Bewegung des Mondes durch die Wirkung der Sonne hervorgebracht wird, und die parallaktische Ungleichheit heifst, bestimmen kann. Die Gröfse der Parallaxe ändert sich mit dem Halbmesser der Erde und ihrer Entfernung von der Sonne; für den mittleren Abstand a und den Halbmesser r, der nach dem Parallelkreise gezogen ist, dessen Sinus der Breite $\sqrt{\frac{1}{3}}$ beträgt, ist ihr Werth 8″, 60. Daher hat man

$$\frac{r}{a} = \text{tang } 8'', 60; \quad a = (23984)\, r.$$

Unter demselben Parallelkreise und wenn man die Abplattung der Erde gleich $\frac{1}{290}$ setzt, hat man

$$r = 6364551^m.$$

Die Zeit des Umlaufs der Erde um die Sonne, in Secunden ausgedrückt, ist

$$T = (86400)\,(365{,}256374).$$

Vermittelst dieser Werthe und des Werthes von g, der ebenfalls für die Voraussetzung bestimmt ist, dafs man die Secunde als Zeiteinheit genommen hat, ist

$$m = \frac{M}{354592}.$$

250.

Die Sonne ist eine Kugel, deren Halbmesser 110 mal so grofs als der der Erde ist. Man kennt daher das Verhältnifs der Volumina dieser zwei Körper und das ihrer Massen; hieraus findet man unmittelbar das Verhältnifs ihrer mittleren Dichtigkeiten. Die mittlere Dichtigkeit der Sonne ist ungefähr der vierte Theil von der der Erde. An der Oberfläche der Sonne ist die Gröfse der Anziehung

$$\frac{fM}{R^2},$$

wenn man ihren Halbmesser R nennt. Da

$$R = 110\, r, \quad g = \frac{fm}{r^2}$$

so ist diese Gröfse dasselbe wie

$$\frac{gM}{(110)^2 m}$$

und ihr Werth, vermöge des Werthes von $\frac{M}{m}$ gleich $(29,5)g$. Da die Dauer der Umdrehung der Sonne um ihre Axe 25,5 Tage ist, so ist die Centrifugalkraft an ihrem Aequator nur der sechste Theil des Werthes, den diese Kraft am Aequator der Erde hat. Vernachlässigt man daher die Verminderung, die sie in der Schwere, an der Oberfläche der Sonne, hervorbringt, so sieht man, dafs das Gewicht eines Körpers, an dieser Oberfläche, $29\frac{1}{2}$ mal das Gewicht desselben Körpers an der Oberfläche der Erde ist und dafs die Körper dort ungefähr 145 Meter in der ersten Secunde ihres Falles durchlaufen. Wendet man allmälich die Gleichung (1) des §. 243 auf die Erde und einen anderen Planeten an und setzt voraus, dafs die Gröfsen m, a, T in Beziehung auf die Erde, m_1, a_1, T_1, in Beziehung auf den Planeten werden, so findet man hieraus

$$\frac{a_1^3}{a^3} = \frac{M + m_1}{M + m} \frac{T_1^2}{T^2}$$

durch die Elimination von f. Kennt man den Werth von a, vermöge der Beobachtung der Sonnenparallaxe oder eines anderen Mittels, so wie die Masse m der Erde und die Dauer T des siderischen Jahres, so dient diese Gleichung dazu, den Werth der halben grofsen Axe a_1 eines Planeten zu bestimmen, wenn man seine Masse m und seine Umlaufszeit T_1 kennt. Das in §. 245 gezeigte Verfahren zur Bestimmung dieser Masse setzt blos voraus, dafs man einen Näherungswerth der halben grofsen Axe kennt.

251.

Die Anziehung, welche an der Oberfläche der Erde durch eine beträchtliche Masse, wie z. B. durch einen hohen Berg, ausgeübt wird, lenkt die schweren Körper von der verticalen Richtung ab, und die Verlängerung des Bleiloths trifft alsdann den Himmel nicht mehr im Zenith. Vielmehr wird sie sich auf beiden Seiten des Berges nach entgegengesetzten Richtungen davon entfernen, so dafs, wenn auf beiden Seiten Alles gleich ist, sowohl die Gestalt des Berges, als die

Entfernung des Bleiloths, der Winkelabstand zweier Sterne, durch welche die Verlängerung des Bleiloths geht, das Doppelte der Ablenkung seyn wird. Diese Thatsache ist von den Astronomen in Peru und Schottland beobachtet worden; weil aber die Massen der höchsten Berge, im Verhältnisse zur Masse der Erde, noch immer sehr klein sind, so sind auch die Ablenkungen, von welchen hier die Rede ist, sehr unbeträchtlich und können nur eine kleine Anzahl von Secunden betragen. Es folgt hier ein Beispiel der Berechnung der Ablenkung, die ein Bleiloth durch die Anziehung einer gegebenen Masse erleidet.

Sey A (Fig. 57) der Mittelpunkt einer gleichartigen Kugel, die am Ende eines unausdehnbaren und unbiegsamen Fadens aufgehängt ist, dessen anderes Ende an den festen Punkt C angeknüpft ist. Sey auch O der feste Mittelpunkt einer anderen gleichartigen Kugel, welche auf die erste wirkt. Der Faden CA wird sich von der Verticalen CB entfernen, ohne aus der Ebene herauszutreten, die durch diese gerade Linie und die Linie CO geht, und in der Lage des Gleichgewichtes muſs die Mittelkraft des Gewichtes der ersten Kugel und der Anziehung der zweiten durch den festen Punkt C gehen. Diese zwei Kräfte sind aber an den Punkt A angebracht, die eine nach der Verticalen AD, die andere nach AO, und sie suchen den Faden CA in entgegengesetzter Richtung um den Punkt C zu drehen. Damit ihre Mittelkraft durch den Punkt O geht, müssen ihre Momente, in Beziehung auf diesen Punkt, gleich seyn (§. 46); daher hat man, wenn man P und Q das Gewicht der ersten Kugel und die ganze Anziehung der zweiten nennt und durch p und q die senkrechten Linien CE und CF bezeichnet, die vom Punkte C auf die Verlängerungen von DA und OA gefällt sind,

$$Pp = Qq$$

als Gleichung des Gleichgewichtes, welche dazu dient, die unbekannte Ablenkung BCA zu bestimmen.

Ich nenne diesen Winkel x und γ den gegebenen Winkel BCO, a und c die ebenfalls gegebenen Abstände CA und CO, und y den unbekannten Abstand AO, so hat man

$$y^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\gamma - x)$$

und auſserdem

$$\sin COA = \frac{a \sin(y-x)}{y}, \quad q = \frac{ac \sin(y-x)}{y}, \quad p = a \sin x.$$

Man nenne auch m die Masse der Erde, m_1 die der beweglichen Kugel, m' die der anziehenden Kugel. Bezeichnet man noch immer durch f den Coefficienten der allgemeinen Anziehung und durch r den Halbmesser der Erde, so sind die Werthe der bewegenden Kräfte P und Q

$$P = \frac{f m m_1}{r^2}, \quad Q = \frac{f m' m_1}{y^2},$$

und wenn ϱ die mittlere Dichtigkeit der Erde, ϱ' die der anziehenden Kugel und r' deren Halbmesser ist, so hat man auch

$$m' = \frac{m \varrho' r'^3}{\varrho r^3}.$$

Vermittelst dieser verschiedenen Werthe geht die Gleichung

$$Pp = Qq$$

in folgende über:

$$\varrho r y^3 \sin x = \varrho' r'^3 c \sin(y-x),$$

wo man nur noch den Werth von y substituieren mufs, um alsdann den Werth von x daraus zu finden.

Ich nehme an, wie dies immer der Fall ist, dafs die Länge CA des Bleiloths im Verhältnisse zum Abstande CO sehr unbeträchtlich ist. Vernachlässigt man, in den Werthen von y, a im Verhältnisse zu c, so hat man $y = c$, und hieraus folgt

$$\frac{\sin x}{\sin(y-x)} = \frac{\varrho' r'^3}{\varrho r c^2}.$$

Wenn die Dichtigkeit ϱ' und der Halbmesser r' der anziehenden Kugel immer dieselben bleiben, so ist der Werth von α, den man aus dieser Gleichung findet, desto gröfser, je kleiner der Abstand c ist und der Winkel y wird sich immer mehr einem rechten nähern. Da nun c nicht kleiner als der Halbmesser r' seyn kann, so folgt hieraus, dafs man das Maximum der Ablenkung des Bleiloths, welche die Anziehung einer gegebenen Kugel hervorbringen kann, haben wird, wenn man $c = r'$ und $y = 90^0$ setzt, wodurch die vorhergehende Gleichung in

$$\operatorname{tang} x = \frac{\varrho' r'}{\varrho r}$$

übergeht.

Setzt man z. B. $\varrho' = \varrho$ und frägt, wie grofs der Halbmesser r' seyn mufs, damit die Ablenkung x eine Secunde betrage, so hat man $r' = r$ tang $1''$ und da der Umring $2\pi r$ der Erde 40 Millionen Meter beträgt, so folgt hieraus $r' = 30^m,856\ldots$ Eine gleichartige Kugel von ungefähr 31 Meter im Durchmesser, deren Dichtigkeit der mittleren Dichtigkeit der Erde gleich ist, bringt daher nur eine Ablenkung von höchstens einer Secunde in der Richtung des Bleiloths hervor, und um diese hervorzubringen, mufs sie das untere Ende dieses Lothes berühren und ihr Mittelpunkt mufs in der horizontalen Ebene liegen, die durch dieses Ende geht.

252.

Aus der Ablenkung des Bleiloths, welche die Anziehung der Berge hervorbringt, hat man die mittlere Dichtigkeit der Erde zu vier bis fünf mal so grofs, als die Dichtigkeit des Wassers, bestimmt. Cavendish hat sie $5\frac{1}{2}$ mal so grofs, als diese letztere Dichtigkeit gefunden, indem er sie aus der Anziehung ableitete, die zwei Bleikugeln von acht Zoll engl. im Durchmesser ausübten, welche Anziehung er durch die Drehwage merkbar zu machen gewufst hat. Ohne hier in alle Einzelnheiten dieses interessanten Versuches einzugehen, oder die verschiedenen erforderlichen Vorsichten und die Rechnungen, die man anstellen mufs, um ein genaues Resultat zu finden, aus einander zu setzen, will ich blos die wesentlichsten Punkte dieser Rechnungen angeben.

Die Drehwage ist das genaueste Instrument, welches wir haben, um sehr kleine Kräfte zu messen. Coulomb, dem man ihre Erfindung verdankt, hat sie besonders angewandt, um die Anziehungen und Abstofsungen der elektrisierten Körper zu messen und sie ist ebendeswegen, in der Physik, unter dem Namen elektrische Wage bekannt. Sie besteht im Wesentlichen in einem sehr feinen verticalen Metallfaden, der an einen festen Punkt angebracht und an dessen Ende ein horizontaler Hebel aufgehängt ist. Man nehme an, dieser Hebel bestehe aus einem sehr dünnen Stiele ACA' (Fig. 58), welcher am Aufhängepunkt C in zwei gleiche Theile getheilt ist und an dessen Enden zwei sehr kleine Kugeln angebracht sind, deren Mittelpunkte A und A' seyn sollen. Aus dem Punkte

C als Mittelpunkte und mit einem Halbmesser, der gleich CA ist, beschreibe man den horizontalen Kreis $BAB'A'$, dessen Umring in eine grofse Anzahl gleicher Theile getheilt seyn soll. Dreht sich der Hebel um den Punkt C, so durchlaufen seine Enden A und A' diesen Umring, und die Theilungspunkte, welchen sie in jedem Augenblicke entsprechen, geben die Bogen an, die sie durchlaufen haben. So lange der Faden, der bis zum Punkte C reicht, nicht gedreht wird, bleibt der Hebel, in einer gewissen Lage, in Ruhe. Ich nehme an, dafs er alsdann der Linie BCB' entspricht; entfernt man ihn von dieser Linie, um ihn in eine andere beliebige Lage ACA' zu bringen, so wird der Faden gedreht, und diese Drehung strebt, den Hebel zur Linie BCB' zurück zu führen. Um ihn in der Richtung ACA' zurück zu halten, nehme man an, es würden an seine beiden Enden gleiche und entgegengesetzte Kräfte angebracht, die in der horizontalen Ebene wirken und auf dieser Richtung senkrecht stehen. Der gemeinschaftliche Werth dieser beiden Kräfte wird das Maafs der Drehkraft seyn, welche mit ihnen im Gleichgewichte ist. Coulomb's Versuche haben aber gezeigt, dafs, wenn der Aufhängefaden derselbe bleibt, diese Drehkraft dem Winkel BCA proportional ist. Nimmt man daher den rechten Winkel als Einheit, nennt h die Drehkraft, welche diesem rechten Winkel entspricht, und bezeichnet durch ϑ den Winkel BCA, so wird diese Kraft, in der Lage ACA' des Hebels, gleich $h\vartheta$ seyn. Die Drehung des Aufhängefadens wird daher zweien an die Punkte A und A' angebrachten Kräften, die gleich $h\vartheta$, horizontal und auf ACA' senkrecht sind und den Hebel zu der Ruhelinie BCB' zurück zu bringen streben, gleich seyn.

Dies vorausgesetzt, nähere man dem Hebel zwei gleichartige Kugeln, die aus demselben Stoffe bestehen, denselben Durchmesser haben und symmetrisch auf beiden Seiten der Linie BCB' liegen. Seyen O und O' ihre Mittelpunkte, die in der horizontalen Ebene, welche der Hebel enthält, in gleichem Abstande von C und auf der durch diesen Punkt gezogenen Linie OCO' liegen. Die Anziehung dieser beiden Körper entfernt den Hebel von der Linie BCB', und da alles um den Punkt C herum gleich ist, so dreht sich die Linie ACA' um diesen Punkt, der in Ruhe bleibt. So wie sich

der Hebel von der Ruhelinie entfernt, nimmt die Drehkraft zu. In einer gewissen Lage wird diese Kraft mit der Anziehung beider Kugeln im Gleichgewichte seyn, da aber der Hebel diese Lage mit einer unterdessen erlangten Geschwindigkeit erreicht, so geht er darüber hinaus und macht, auf beiden Seiten derselben, Schwingungen, ebenso wie ein horizontales Pendel. Die Beobachtung giebt die Dauer einer ganzen Schwingung an. Vergleicht man die Länge dieses Pendels mit der Länge eines gewöhnlichen Pendels, welches seine Schwingungen in derselben Zeit vollbringen würde, so kann man daraus das Verhältniſs der Anziehungskraft jeder der Kugeln zu der Schwere finden, und daher auch das Verhältniſs der Masse dieser Kugel zu der der Erde. Es ist leicht, die Gleichung zu bilden, welche dieses Verhältniſs zu bestimmen dient, wie sogleich gezeigt werden soll.

253.

Da die beiden beweglichen Kugeln, deren Mittelpunkte in A und A' sind, durch dieselben Kräfte getrieben werden, und dieselbe Bewegung um den festen Punkt C haben, so ist es hinreichend, die Bewegung des Mittelpunktes einer derselben zu betrachten, z. B. des Punktes A. Sey daher, wie in der vorhergehenden Aufgabe,

$$CA = a, \quad CO = c, \quad BCO = \gamma,$$

m' sey die Masse der anziehenden Kugel, deren Mittelpunkt in O liegt, und f der Coefficient der allgemeinen Anziehung. Am Ende einer beliebigen Zeit t bezeichne man den Winkel ACB durch ϑ und den Abstand AO durch z, so hat man

$$z^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\gamma - \vartheta),$$

und die beschleunigende Kraft, welche von der nach AO gerichteten Anziehung herrührt, wird $\frac{fm'}{z^2}$ seyn. Ich zerlege sie in zwei andere Kräfte, von welchen eine nach der Verlängerung CA, die andere senkrecht auf CA wirkt. Diese letztere Seitenkraft wird gleich $\frac{fm'}{z^2} \sin CAO$, d. h. gleich $\frac{fm'c}{z^3} \sin(\gamma - \vartheta)$ seyn, wenn man statt $\sin CAO$ seinen, aus dem Dreiecke COA abgeleiteten, Werth setzt. Zieht

man von dieser Seitenkraft, welche die Trajectorie berührt, die Drehkraft $h\vartheta$, die ihr gerade entgegen gesetzt ist, ab, und bemerkt, dafs der durch den Punkt A beschriebene Bogen BA gleich $a\vartheta$ ist, so hat man

$$a\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{fm'c}{z^3}\sin(\gamma-\vartheta) - h\vartheta$$

als Gleichung der Bewegung (§. 152).

Da die Anziehung der Masse m' eine sehr kleine Kraft ist, so ist der Winkel ϑ, um welchen sie den Hebel ACA' von der Ruhelinie entfernt, sehr klein. Nennt man den Abstand BO, oder den Werth von z, welcher $\vartheta = o$ entspricht, b, so dafs man

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\gamma$$

hat, und entwickelt nach den Potenzen von ϑ, so hat man

$$\frac{\sin(\gamma-\vartheta)}{z^3} = \frac{\sin\gamma}{b^3} - [(a^2+c^2)\cos\gamma - 2ac - ac\sin^2\gamma]\frac{\vartheta}{b^5} + \ldots$$

Setzt man daher, zur Abkürzung,

$$[(a^2+c^2)\cos\gamma - 2ac - ac\sin^2\gamma]\frac{fm'c}{b^5} + h = g'$$

$$\frac{fm'c\sin\gamma}{b^3} = \beta g',$$

und vernachlässigt die Potenzen von ϑ, die höher als die erste sind, so wird die Gleichung der Bewegung

$$a\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = g'\beta - g'\vartheta,$$

woraus man, wenn man integriert,

$$\vartheta = \beta + k\cos\left(t\sqrt{\frac{g'}{a}} + k'\right)$$

findet, wo k und k' die beiden willkührlichen Constanten bedeuten.

Vermöge dieses Werthes von ϑ, ist die kleinste und gröfste Entfernung des Hebels ACA' von der Linie BCB', $\beta + k$ und $\beta - k$, und wenn man die Linie DCD' zieht, so dafs BCD gleich β ist, so wird der Hebel, nach beiden Seiten dieser geraden Linie, gleiche und gleichzeitige Schwingungen machen, deren Weite die Constante k seyn wird. Man bestimmt den Winkel β durch die Erfahrung, indem man die kleinste und gröfste Entfernung des Hebels mifst und

die halbe Summe dieser äufsersten Werthe von ϑ für diesen Winkel nimmt. Die gerade Linie DCD', welche dem Werthe $\vartheta = \beta$ entspricht, ist die Lage des Hebels, in welcher er im Gleichgewichte bleiben würde, wenn er, ohne erlangte Geschwindigkeit, dorthin käme. Die Dauer einer ganzen Schwingung des Hebels, zu beiden Seiten dieser Linie, ist die Zeit, während welcher der Winkel $t\sqrt{\frac{g'}{a}} + k'$ um 180° zunimmt. Bezeichnet man ihn durch T, so hat man daher

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g'}},$$

und diese Dauer T ist ebenfalls durch die Beobachtung gegeben.

Nennt man nun g die Schwere und l die Länge des einfachen Pendels, welches seine unendlich kleinen Schwingungen in der Zeit T macht, so hat man (§. 182)

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

daher ist

$$ga = g'l;$$

folglich, da

$$g = \frac{fm}{r^2}, \quad g' = \frac{fm'c\sin\gamma}{\beta b^3},$$

so haben wir schliefslich

$$\frac{m'}{m} = \frac{\beta a b^3}{c l r^2 \sin\gamma},$$

wo m die Masse der Erde und r ihren Halbmesser bedeutet.

Alle Gröfsen, welche in dieser Formel enthalten sind, sind bei jedem Versuche bekannt; sie dient daher dazu, das Verhältnifs der Masse m' zu der der Erde anzugeben, und wenn man aufserdem die Volumina beider Körper und die Dichtigkeit von m' kennt, so kann man hieraus die mittlere Dichtigkeit der Erde finden.

254.

In der Mechanik des Himmels wird bewiesen, dafs es, für das dauernde Gleichgewicht des Meeres, nothwendig und hinreichend ist, dafs die mittlere Dichtigkeit der Erde die des Wassers übertreffe. Weil diese Bedingung wirklich

erfüllt ist, bringen die Kräfte, welche von der gleichzeitigen Wirkung des Mondes und der Sonne herrühren, nur kleine Schwingungen hervor. Wäre sie nicht erfüllt und die Erde z. B. bei derselben Dichtigkeit, von einem Quecksilbermeere bedeckt, so würde die Wirkung der kleinsten fremden Kräfte in dieser Flüssigkeit eine progressive Bewegung hervorbringen, so dafs das Meer, statt hin und her zu schwanken, die ganze Oberfläche der Erde durchlaufen würde.

Auch kann man, durch verschiedene Betrachtungen, beweisen, dafs die Dichtigkeit der concentrischen Lagen des Erdsphäroids zunehmen mufs, wenn man von der Oberfläche nach dem Centrum hin geht; hieraus folgt, dafs die mittlere Dichtigkeit die der obersten Schichte übertreffen mufs, welche Bedingung wirklich erfüllt ist. Denn wenn man die Metalle ausnimmt, die sich nur in geringer Anzahl in dieser Schichte finden, so sind die Dichtigkeiten aller übrigen Substanzen, aus welchen sie besteht, viel kleiner als $5\frac{1}{2}$ mal die Dichtigkeit des Wassers. Es ist jedoch wichtig zu bemerken, dafs diese Zunahme der Dichtigkeit keinesweges das Vorhandenseyn von Stoffen voraussetzt, die von denen, welche wir an der Oberfläche sehen, ganz verschieden sind und deren Dichtigkeit sehr grofs wäre. Man kann annehmen, dafs alle Schichten der Erde aus demselben Stoffe, der ein wenig zusammendrückbar ist, oder einem Gemenge verschiedener Stoffe, wie an der Oberfläche, zusammen gesetzt sind, und in dieser Voraussetzung, welche die natürlichste zu seyn scheint, würde die Zunahme der Dichtigkeit von der Verdichtung herrühren, welche in jeder Lage durch den Druck der oberen Schichten hervorgebracht wird, welcher von der Oberfläche nach dem Mittelpunkte hin zunimmt. Im Inneren der Erde hängt das Gesetz der Anziehung von dem unbekannten Gesetze der Dichtigkeiten ab. Aufserhalb derselben ändert es sich auf der Verlängerung eines jeden Halbmessers ungefähr im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Abstandes vom Mittelpunkte, und von einem Halbmesser zum anderen erleidet es zu gleicher Zeit eine Aenderung, welche dem Quadrate des Cosinus des Winkels proportional ist, welchen jeder Halbmesser mit der Axe der Figur des Erdsphäroids einschliefst. Aus dieser letzten Aenderung folgt, dafs, bei gleichem Abstande vom Mit-

telpunkte der Erde, die Kraft, welche an den Mittelpunkt des Mondes angebracht ist und von der Anziehung dieses Sphäroids herrührt, nicht in allen Richtungen des Radius Vector dieselbe ist, so dafs man diese Kraft als aus zwei anderen zusammengesetzt betrachten kann, deren eine von dem kugelförmigen Theile der Erde herrührt und beständig ist, oder sich nur im Verhältnisse des Abstandes vom Mittelpunkte ändert, die andere dagegen von der Bauchung der Erde am Aequator herrührt und sich mit der Richtung, die der Radius gegen die Axe der Pole hat, ändert. Laplace hat die kleine Ungleichheit in der Länge und Breite, welche diese zweite Kraft in der Bewegung des Mondes hervorbringt, bestimmt. Man sieht leicht ein, dafs ihre Gröfse von der Abplattung der Erde abhängen mufs, und wenn man sie mit derjenigen, welche die Beobachtung giebt, vergleicht, so findet man daraus die Abplattung $\frac{1}{305}$, welche wenig von der verschieden ist, die sich aus den Pendelversuchen und Gradmessungen ergiebt.

An der Oberfläche der Erde folgt die Aenderung der Schwere, die von der der Anziehung und der Centrifugalkraft herrührt, demselben Gesetze, wie in einem beliebigen Abstande vom Mittelpunkte, d. h. sie ist, wie wir es schon (§. 178) gesagt haben, dem Quadrate des Cosinus der Breite proportional. Um aber dieses Gesetz durch Messungen des Secundenpendels zu bewahrheiten, dürfen die Schwingungen nicht in der Nähe eines Berges beobachtet werden, denn so wie die horizontale Seitenkraft der Anziehung das Pendel in seiner Lage des Gleichgewichtes von der Verticalen ablenkt, so vermindert die verticale Seitenkraft dieser Kraft die Schwere und folglich auch die Länge des einfachen Pendels. Vermeidet man diese Quelle von Unregelmäfsigkeiten, so findet man, dafs sich an gewissen Orten die Länge des Secundenpendels dennoch von dem Gesetze der Aenderung, welches die Theorie angiebt, entfernt; was man dem Umstande zuschreiben mufs, dafs an diesen Orten die Dichtigkeit des umliegenden Theils der Erde, in einer beträchtlichen Weite und Tiefe, viel gröfser oder viel kleiner als die allgemeine Dichtigkeit der obersten Schichte ist. Hieraus ergiebt sich eine Vermehrung oder Verminderung der ganzen Schwere und daher auch der Länge

des Secundenpendels, die ihrer Intensität proportional ist. Das Pendel ist daher auch ein geologisches Instrument, welches, durch seine Unregelmäſsigkeiten die Aenderungen in der Natur des Bodens, auf eine groſse Strecke hin, anzeigt.

Uebrigens muſs man bemerken, daſs das Gesetz, nach welchem die Schwere, dem Quadrate des Cosinus der Breite proportional, wenn man vom Pole nach dem Aequator hin geht, abnimmt, voraussetzt, daſs man die Verlängerung der Meeresfläche für die Oberfläche der Erde nimmt, und da die Oerter des Festlandes, wo die Beobachtungen angestellt werden, verschiedene Höhen über dieser Fläche haben, so muſs man die beobachteten Längen auf diejenigen zurückführen, welche, auf jeder Verticalen, an dieser Fläche selbst statt haben würden. Diese Reduction geschieht gewöhnlich, indem man die Schwere und die Länge des Secundenpendels in dem Verhältnisse des Quadrates der Entfernung des Beobachtungsortes vom Mittelpunkte der Erde zum Quadrate derselben, um die Höhe dieses Ortes über der Meeresfläche, verminderten Entfernung vergröſsert; was darauf hinauskommt, daſs man die Anziehung der zwischen der Oberfläche des Bodens und der Verlängerung der Meeresfläche enthaltenen Erdschichte vernachlässigt. Man wird aber im folgenden §. sehen, daſs diese Correction fast um die Hälfte zu groſs ist.

255.

Sey $AM'B$ (Fig. 59) die Oberfläche des Festlandes, $DAMBE$ die Meeresfläche oder deren Verlängerung und C der Mittelpunkt der Erde. Sey auch M' der Beobachtungsort und M der Punkt, wo der Halbmesser CM' diese Verlängerung trifft, so wird $M'M$ die Höhe des Punktes M über der Meeresfläche seyn, welche ich durch h bezeichne und welche durch Nivellierung oder Barometermessungen gegeben seyn wird. Ist M' sehr nahe bei dem Meere, so kann die Schwere ein wenig vermindert und ihre Richtung ein wenig geändert seyn, weil die Dichtigkeit des Wassers geringer als die des Erdbodens ist. Ich werde aber voraussetzen, daſs dies nicht der Fall sey, und zugleich annehmen, daſs die Oberfläche des Bodens um den Punkt M' horizontal oder fast senkrecht auf dem Radius CM' sey und ferner, daſs ihre

Dichtigkeit gleichförmig sey. Es mufs daher die Anziehung berechnet werden, die durch die Schichte $AM'BM$, die sich über die Meeresfläche erhebt, auf den Punkt M' ausgeübt wird. Bei dieser Rechnung kann man von der Krümmung dieser Schichte und den Aenderungen in ihrer Dicke absehen, oder, mit anderen Worten, man kann die Dicke dieser Schichte, in der ganzen Ausdehnung, in welcher sie eine merkliche Anziehung ausübt, als eine constante, die gleich h ist, ansehen. Ich bezeichne den Halbmesser dieser Ausdehnung durch c und die Dichtigkeit der Schichte durch ϱ'.

Dies vorausgesetzt, sey K ein beliebiger Punkt der anziehenden Schichte, man bezeichne durch z und y seine Entfernung von der Oberfläche des Bodens und dem Halbmesser CM' und beschreibe zwei cylindrische Oberflächen, deren gemeinschaftliche Axe MM' und deren Halbmesser y und $y + dy$ sind. Das zwischen diesen zwei Oberflächen enthaltene Volumen hat die Grundfläche $2\pi y dy$ und die Höhe dz, und wenn man es in horizontale Ringe zerlegt, die eine unendlich kleine Dichtigkeit haben, so ist das Volumen des Ringes, der dem Punkte K entspricht, $2\pi y dy dz$ und seine Masse $2\pi\varrho' y dy dz$. Die Anziehung, welche dieser Ring auf einen materiellen Punkt ausübt, der in M' liegt, reduciert sich auf eine Kraft, die nach MM' gerichtet und der Summe der verticalen Seitenkräfte der Anziehungen aller seiner Punkte gleich seyn wird. Da man nun für irgend einen Punkt K

$$KM' = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \cos KM'M = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

hat, so ist der Werth der beschleunigenden Kraft, die von der Anziehung des ganzen Ringes herrührt,

$$\frac{2\pi f \varrho' y z dy dz}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wo f noch immer der Coefficient der allgemeinen Anziehung ist. Um daher die Anziehung der Schichten, die wir betrachten, zu erhalten, mufs man diese Formel von $z = o$ bis $z = h$ und von $y = o$ bis $y = c$ integrieren, woraus sich

$$k' = 2\pi f \varrho' (c + h - \sqrt{c^2 + h^2})$$

ergiebt, wenn man diese Kraft durch k' bezeichnet.

Im Allgemeinen ist aber die verticale Dicke der anziehenden Schichte, im Verhältnisse zu ihrem horizontalen Halbmesser sehr klein; vernachlässigt man daher h^2 im Verhältnisse zu c^2, so hat man einfach

$$k' = 2\pi f \varrho' h.$$

Sey k die Anziehung, welche auf den Punkt M, durch den Theil der Erde ausgeübt wird, der bis zu der Meeresfläche reicht und r der Halbmesser CM, so wird diese Anziehung im Punkte M'

$$\frac{kr^2}{(r+h)^2}$$

seyn. Bezeichnet man die Schwere und die verticale Seitenkraft der Centrifugalkraft am Punkte M durch g und γ, und am Punkte M' durch g' und γ', so hat man daher

$$g = k - \gamma, \quad g' = \frac{kr^2}{(r+h)^2} + k' - \gamma'.$$

Ich entwickele das erste Glied von g' nach den Potenzen von h, ziehe alsdann g' von g ab und lasse das Quadrat von h und den kleinen Unterschied $\gamma' - \gamma$ weg, so ergiebt sich

$$g - g' = \frac{2kh}{r} - k'.$$

Da der Bruch $\frac{h}{r}$ sehr klein ist, so kann man im ersten Gliede dieser Formel $k = g'$ setzen; auch kann man in der unbeträchtlichen Gröfse k'

$$g' = \frac{4\pi\varrho f r}{3}$$

setzen, wenn man durch ϱ die mittlere Dichtigkeit der Erde bezeichnet, und für ihr Volumen $\frac{4\pi r^3}{3}$ setzt. Hieraus folgt alsdann

$$k' = \frac{3\varrho' h g'}{2\varrho r},$$

und daher

$$g = g'\left(1 + \frac{2h}{r} - \frac{3\varrho' h}{2\varrho r}\right).$$

Man mufs also durch den in Klammern eingeschlossenen Factor, und nicht durch den Factor $1 + \frac{2h}{r}$, wie dies ge-

wöhnlich geschieht, die Schwere g', die auf dem Festlande in einer Höhe h über der Meeresfläche statt hat, multiplicieren, um sie auf diese Fläche zu reducieren. Im Allgemeinen kann man ϱ' auf die Hälfte von ϱ schätzen und daher für diesen Factor $1 + \frac{5h}{4r}$ nehmen. In Paris ist die Höhe h des Punktes des Observatoriums, wo das Barometer steht, 63 Meter; hieraus folgt, daſs die Schwere und die Länge des Secundenpendels dort, im Verhältnisse von 1 zu 1,000125 kleiner sind, als an der Meeresfläche.

Drittes Buch.

Statik.

Zweiter Theil.

Erstes Kapitel.

Vom Gleichgewichte eines festen Körpers.

256.

Es giebt keinen Körper in der Natur, der nicht mehr oder weniger zusammendrückbar ist, und nicht seine Gestalt ändert, wenn er Kräften unterworfen ist, die sich im Gleichgewichte halten. Wenn aber der feste Körper, den wir betrachten wollen, die passende Gestalt angenommen hat, so kann man die Angriffspunkte der Kräfte, die auf ihn wirken, als ein System von unveränderlicher Gestalt ansehen und diesem Zustande entsprechen die Coordinaten dieser verschiedenen Punkte, welche man als bekannt voraussetzt und die in der Gleichung des Gleichgewichtes vorkommen.

Sey M, M', M'' dieses System von materiellen Punkten. Bei jedem Punkte kommen sieben Gröfsen in Betrachtung, nemlich, seine drei Coordinaten, die Kraft die ihn treibt und die drei Winkel, welche seine Richtung bestimmen. Ich bezeichne durch P die Kraft, die an den Punkt M angebracht ist und deren Richtung die gerade Linie MD seyn wird (Fig. 60); durch x, y, z die drei Coordinaten OG, GH, HM des Punktes M, welche auf die rechtwinkligen Axen Ox, Oy, Oz bezogen sind, und durch α, β, γ die spitzen oder stumpfen Winkel, welche die Linie MD mit den Linien, die durch den Punkt M, parallel mit diesen Axen gezogen sind, ein-

schliefst. Rücksichtlich der anderen Punkte M', M'' u. s. w. bezeichne ich die analogen Gröfsen durch dieselben Buchstaben mit Accenten.

Dies vorausgesetzt, wollen wir, ehe wir die Bedingungen des Gleichgewichtes der gegebenen Kräfte P, P', P''... suchen, dieses System von Kräften in drei andere verwandeln, von welchen eins aus den Kräften zusammengesetzt seyn soll, die mit der Axe Ox, das andere aus den Kräften, die mit der Axe Oy parallel und in der Ebene der x und y enthalten sind, und das dritte aus den Kräften, die nach der Axe Ox gerichtet sind.

257.

Man zerlege jede der Kräfte P, P', P'' u. s. w., ohne ihren Angriffspunkt zu ändern, in drei Kräfte, die den Axen der x, y, z parallel sind. $P \cos \alpha$, $P' \cos \alpha'$, $P'' \cos \alpha''$... werden die mit der Ox parallelen Kräfte seyn, $P \cos \beta$, $P' \cos \beta'$, $P'' \cos \beta''$... die mit der Axe Oy und $P \cos \gamma$, $P' \cos \gamma'$, $P'' \cos \gamma''$... die mit der Axe Oz parallelen Kräfte. Man kann also die gegebenen Kräfte durch diese drei Gruppen paralleler Kräfte ersetzen.

Es ist erlaubt, ohne das System der Kräfte, die man betrachtet, zu ändern, an denselben Punkt zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte anzubringen. Ich bringe daher an den Punkt M zwei Kräfte an, die gleich, entgegengesetzt und mit der Axe Oz parallel sind und welche ich durch g und $-g$ bezeichne. Ich setze die Kraft g, die nach MC wirkt, mit der Kraft $P \cos \alpha$, die nach MA, parallel mit Ox gerichtet ist, zusammen. Sey ME die Richtung ihrer Mittelkraft und K der Punkt, wo ihre Verlängerung die Ebene der x und y trifft. Ich verlege den Angriffspunkt in diesen Punkt K, zerlege alsdann diese Kraft in zwei andere, die mit den Axen der x und z parallel sind, wodurch die Kräfte $P \cos \alpha$ und g wieder zum Vorschein kommen; jedoch ist jetzt die Kraft $P \cos \alpha$ nach der Projection ihrer ersten Richtung auf die Ebene der x und y gerichtet, und die Kraft g ist senkrecht auf diese Ebene, an den Punkt K dieser Projection angebracht, dessen Coordinaten leicht zu bestimmen sind.

Da nemlich H die Projection des Punktes M auf die Ebene der x und y ist, so sind seine Coordinaten x und y,

und man hat y und $x - KH$ für die des Punktes K, weil diese zwei Punkte auf derselben, mit der Axe der x parallelen, Linie liegen. Betrachtet man aber das Rechteck $KNMH$, dessen Diagonale KM die Richtung der Mittelkraft der Kräfte g und $P \cos\alpha$ ist, die nach KN und KH wirken, so hat man das Verhältniſs

$$\frac{KH}{HM} = \frac{P\cos\alpha}{g},$$

woraus man

$$KH = \frac{zP\cos\alpha}{g}$$

findet, da $HM = z$ ist. Die Coordinaten des Angriffspunktes K der Kraft g, in der Ebene der x und y, sind also

$$y \text{ und } x - \frac{zP\cos\alpha}{g}.$$

Verfährt man auf dieselbe Weise mit den Kräften $P\cos\beta$ und $-g$, so wird die erstere in die Ebene der x und y nach der Projection ihrer ursprünglichen Richtung versetzt und die Coordinaten des neuen Angriffspunktes der Kraft $-g$, in derselben Ebene, werden

$$y + \frac{zP\cos\beta}{g} \text{ und } x$$

seyn.

Man kann, durch dasselbe Mittel, alle Kräfte $P'\cos\alpha'$, $P''\cos\alpha''\ldots$, $P'\cos\beta'$, $P''\cos\beta''\ldots$ in die Ebene der x und y versetzen; jede dieser Kräfte wirkt nach der Projection ihrer ursprünglichen Richtung auf diese Ebene, welche Richtung über oder unter dieser Ebene liegen kann, und man hat auſserdem so viel Kräftepaare g' und $-g'$, g'' und $-g''\ldots$, als Punkte M', $M''\ldots$ vorhanden sind. Die Coordinaten der Angriffspunkte dieser letzteren Kräfte, in der Ebene der x und y, können aus denjenigen abgeleitet werden, welche den Kräften g und $-g$ entsprechen, indem man die Buchstaben x, y, z, g, P, α, β accentuiert.

258.

Nun kann man, durch eine ähnliche Operation, die Kräfte $P\cos\alpha$, $P'\cos\alpha'$, $P''\cos\alpha''\ldots$, die der Axe der x parallel und in der Ebene der x und y enthalten sind, in zwei

Gruppen von Kräften umbilden, von welchen eine aus Kräften besteht, die der Axe Oy parallel sind, und die andere aus Kräften, die nach der Axe Ox gerichtet sind. Im Punkte H (Fig. 61), wo die Kraft $P \cos \alpha$ nach der Richtung HF wirkt, bringe ich Kräfte an, die mit Oy parallel sind und durch h und $-h$ bezeichnet werden. Ich setze die Kraft h, die nach HB gerichtet ist, mit der Kraft $P \cos \alpha$ zusammen, verlege den Angriffspunkt ihrer Mittelkraft in den Punkt Q, wo die Verlängerung ihrer Richtung HK die Axe Ox trifft. Alsdann zerlege ich sie nach den rechtwinkligen Richtungen Qx und Qy, wodurch die Kräfte $P \cos \alpha$ und h in diesem Punkte Q wieder zum Vorschein kommen. Außerdem hat man

$$QG : GH = P \cos \alpha : h,$$

und da $OG = x$ und $GH = y$, so findet man hieraus

$$OQ = x - \frac{y P \cos \alpha}{h}$$

als Abscisse des Punktes Q.

Die Kraft $P \cos \alpha$, deren Richtung HF war, wird daher durch eine Kraft $P \cos \alpha$ ersetzt seyn, welche nach der Axe Ox wirkt, und durch zwei Kräfte h und $-h$, die senkrecht auf diese Axe und an die Punkte Q und G angebracht sind, deren Lagen bekannt sind. Ebenso ist es bei den anderen Kräften $P' \cos \alpha'$, $P'' \cos \alpha'' \ldots$, die mit der Axe der x parallel und in der Ebene der x und y enthalten sind, welche ebenfalls durch die nach der Linie Ox gerichteten Kräfte $P' \cos \alpha'$, $P'' \cos \alpha'' \ldots$ und die Kräftepaare h' und $-h'$, h'' und $-h'' \ldots$, die mit der Axe Oy parallel sind, ersetzt werden.

259.

Wir sehen also, daß die gegebenen Kräfte, durch diese zwei auf einander folgenden Operationen, wie früher gesagt wurde, in drei Gruppen von Kräften verwandelt sind, die theils nach der Axe der x gerichtet, oder auf ihr senkrecht sind und in der Ebene der x und y liegen, theils senkrecht auf dieser Ebene stehen.

Bei dieser Verwandelung ist jede Kraft P durch sechs andere Kräfte ersetzt, nemlich

1) durch die drei Kräfte $P \cos \gamma$, g und $-g$, die der Axe der z parallel sind, und deren Angriffspunkte auf der

Ebene der x und y folgende, auf die Axen Ox und Oy bezogene, Coordinaten haben; nemlich der Angriffspunkt der ersten, x und y, der der zweiten, $x - \frac{zP\cos\alpha}{g}$ und y, der der dritten, x und $y + \frac{zP\cos\alpha}{g}$.

2) Durch die zwei Kräfte $P\cos\beta - h$ und h, welche der Axe der y parallel und in der Ebene der x und y enthalten sind, und die man sich an die Axe der x angebracht denken kann; die erste nemlich in dem Abstande x vom Punkte O, und die zweite in dem Abstande $x - \frac{yP\cos\alpha}{h}$.

3) Durch die Kraft $P\cos\alpha$, die nach der Axe der x gerichtet ist, und deren Angriffspunkt man nach O verlegen kann.

260.

Es ist jetzt leicht, die Gleichungen des Gleichgewichtes der gegebenen Kräfte P, P', P''... oder der drei Gruppen von Kräften, die an ihre Stelle gesetzt worden sind, zu bilden.

Zuerst bemerke man, dafs dieses Gleichgewicht nicht statt haben kann, wenn es nicht in jeder einzelnen dieser drei Gruppen besteht. Denn wenn die mit der Axe der z parallelen Kräfte sich nicht aufhöben, und dennoch das Gleichgewicht aller gegebenen Kräfte möglich wäre, so könnte man, ohne dieses Gleichgewicht zu stören, eine Linie, die in der Ebene der x und y gezogen wäre, fest machen. Alsdann würden aber die in dieser Ebene enthaltenen Kräfte aufgehoben seyn, weil sie entweder diese feste Axe treffen, oder mit ihr parallel seyn würden. Man könnte also diese Kräfte ganz unbeachtet lassen; alsdann würde aber, gegen die Voraussetzung, das Gleichgewicht gestört seyn, weil Nichts die auf der Ebene der x und y senkrechten Kräfte hindern würde, den festen Körper um diese feste Axe zu drehen. Daher ist das Gleichgewicht unmöglich, so lange sich diese letzteren Kräfte nicht unter sich selbst aufheben. Dies vorausgesetzt, sieht man auch, dafs das Gleichgewicht nicht unter den Kräften bestehen kann, die in der Ebene der x und y enthalten sind, ohne dafs die der Axe der y parallelen Kräfte sich einander aufheben. Denn wenn es wirklich bestände, ohne dafs

diese Bedingung erfüllt wäre, so könnte man einen Punkt der Axe der x fest machen, wodurch alle nach dieser geraden Linie gerichteten Kräfte aufgehoben würden; alsdann würde aber Nichts mehr die auf dieser Linie senkrecht stehenden Kräfte hindern, das System um diesen Punkt zu drehen, so daſs das Gleichgewicht durch Hinzufügung eines festen Punktes aufgehoben würde, was ungereimt ist.

Ist also der Körper, den wir betrachten, völlig frei, so muſs (§. 57), wenn die parallelen Kräfte $P\cos\gamma$, $P'\cos\gamma'$, $P''\cos\gamma''\ldots$ g und $-g$, g' und $-g'$, g'' und $-g''$ im Gleichgewichte seyn sollen, ihre Summe Null seyn. Dies giebt

$$P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots = o.$$

Auſserdem müssen die Summen ihrer Momente in Beziehung auf die Ebene der x und z und auf die der y und z, die diesen Kräften parallel sind, ebenfalls Null seyn. In Beziehung auf die erste Ebene hat man aber

$$yP\cos\gamma + y'P'\cos\gamma' + y''P''\cos\gamma'' + \ldots.$$

als Summe der Momente der Kräfte $P\cos\gamma$, $P'\cos\gamma'$, $P''\cos\gamma''\ldots$; die der Momente der Kräfte g, g', $g''\ldots$ ist

$$gy + g'y' + g''y'' + \ldots,$$

und der Werth der Summe der Momente der Kräfte $-g$, $-g'$, $-g''\ldots$ ist

$$-g\left(y + \frac{zP\cos\beta}{g}\right) - g'\left(y' + \frac{z'P'\cos\beta'}{g'}\right) - \ldots.$$

vermöge der Coordinaten der Angriffspunkte dieser verschiedenen Kräfte. Man hat daher, wenn man diese drei Summen zusammen addiert und reduciert,

$$P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta') + \ldots = o,$$

und ebenso findet man, wenn man die Summe der Momente dieser Kräfte, in Beziehung auf die Ebene der y und z, nimmt und sie gleich Null setzt,

$$P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) + P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + \ldots = o.$$

Was die Kräfte $P\cos\beta - h$, $P'\cos\beta' - h'$, $P''\cos\beta'' - h''\ldots$ und h, h', $h''\ldots$, die mit der Axe der x parallel und sämmtlich in der Ebene der x und y enthalten sind, betrifft, so hat man nur zwei Gleichungen des Gleichgewichtes (§. 57), es ist nemlich hinreichend, daſs ihre Summe gleich Null sey, was

$$P \cos\beta + P' \cos\beta' + P'' \cos\beta'' + \ldots = o$$

giebt, und dafs die Summe ihrer Momente, in Beziehung auf die Ebene der y und z, ebenfalls gleich Null sey. In Beziehung auf diese Ebene ist aber die Summe der Momente der ersteren Kräfte

$$x(P \cos\beta - h) + x'(P' \cos\beta' - h') + \ldots = o,$$

die der Momente der Kräfte $h, h', h'' \ldots$ ist, zu gleicher Zeit,

$$h\left(x - \frac{Py \cos\alpha}{h}\right) + h'\left(x' - \frac{P'y' \cos\alpha'}{h'}\right) + \ldots.$$

vermöge ihres Abstandes von der Axe der y; wenn man daher ihre ganze Summe gleich Null setzt, so hat man

$$P(x \cos\beta - y \cos\alpha) + P'(x' \cos\beta' - y' \cos\alpha') + \ldots = o.$$

Endlich ist es für das Gleichgewicht der Kräfte, die nach der Axe der x gerichtet sind, hinreichend, dafs ihre Summe gleich Null sey, hieraus folgt

$$P \cos\alpha + P' \cos\alpha' + P'' \cos\alpha'' + \ldots = o$$

Dies sind die sechs nothwendigen und hinreichenden Gleichungen für einen völlig freien festen Körper, der von beliebigen Kräften getrieben wird und im Gleichgewichte seyn soll.

261.

Setzt man zur Abkürzung

$$P \cos\alpha + P' \cos\alpha' + P'' \cos\alpha'' + \ldots = X$$
$$P \cos\beta + P' \cos\beta' + P'' \cos\beta'' + \ldots = Y$$
$$P \cos\gamma + P' \cos\gamma' + P'' \cos\gamma'' + \ldots = Z$$
$$P(x \cos\beta - y \cos\alpha) + P'(x' \cos\beta' - y' \cos\alpha') + \ldots = L$$
$$P(z \cos\alpha - x \cos\gamma) + P'(z' \cos\alpha' - x' \cos\gamma') + \ldots = M$$
$$P(y \cos\gamma - z \cos\beta) + P'(y' \cos\gamma' - z' \cos\beta') + \ldots = N$$

so werden diese Gleichungen des Gleichgewichtes

$$X = o, \; Y = o, \; Z = o, \; L = o, \; M = o, \; N = o. \quad (1)$$

Man bemerke, dafs diese Gröfsen L, M, N, so wie Z, Y, X, nach der Regel des §. 22, aus einander abgeleitet werden können.

Diese sechs Gleichungen enthalten die Bedingungen des Gleichgewichtes, die allen Systemen völlig freier materieller Punkte gemeinschaftlich sind. Denn, wie auch ein solches System oder die wechselseitige Verbindung der Punkte, aus

welchen es besteht, beschaffen sey, so ist es immer einleuchtend, dafs man ihr Gleichgewicht nicht stören wird, wenn man ihre Abstände unveränderlich macht, ohne ihre Coordinaten oder die sie bewegenden Kräfte zu ändern. Die Gleichungen des Gleichgewichtes eines Systems von unveränderlicher Gestalt, die bei diesen Gröfsen statt finden, müssen daher auch für jedes andere System gelten. Alsdann sind sie aber nicht mehr hinreichend, und man mufs noch, für jedes besondere System, besondere Bedingungsgleichungen hinzufügen, welche, wie man in der Folge sehen wird, dazu dienen, die Lagen seiner verschiedenen Punkte, im Zustande des Gleichgewichtes zu bestimmen.

262.

Wenn die gegebenen Kräfte alle unter sich parallel sind, so sind die Winkel, welche sie mit jeder der Axen Ox, Oy, Oz einschliefsen, gleich, oder ergänzen sich zu 180^0, je nachdem diese Kräfte in demselben, oder in entgegengesetztem Sinne wirken. Man kann sie gleich setzen, wenn man, zu gleicher Zeit, die Kräfte, die nach einer Richtung wirken, als positive, und diejenigen, die nach der anderen Richtung wirken, als negative ansieht (§. 11). Alsdann hat man

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' \ldots \quad \beta = \beta' = \beta'' \ldots \quad \gamma = \gamma' = \gamma'' \ldots,$$

wodurch sich die drei ersten Gleichungen (1) in eine einzige verwandeln, nemlich

$$P + P' + P'' + \ldots = o,$$

und die drei anderen werden

$$(Px + P'x' + P''x'' + \ldots)\cos\beta = (Py + P'y' + P''y'' + \ldots)\cos\alpha$$
$$(Pz + P'z' + P''z'' + \ldots)\cos\alpha = (Px + P'x' + P''x'' + \ldots)\cos\gamma$$
$$(Py + P'y' + P''y'' + \ldots)\cos\gamma = (Pz + P'z' + P''z'' + \ldots)\cos\beta.$$

Da aber die Gleichungen des Gleichgewichtes paralleler Kräfte nur drei sind, so müssen sich die drei letzten Gleichungen auf zwei reducieren, und wirklich, wenn man sie addiert, nachdem man sie mit $\cos\gamma$, $\cos\beta$, $\cos\alpha$ multipliciert hat, so findet man eine identische Gleichung, so dafs eine derselben eine Folge der zwei übrigen ist.

Wenn alle gegebenen Kräfte in derselben Ebene liegen, so kann man diese Ebene für die der x und y nehmen, als-

dann sind die Winkel γ, γ', γ''... rechte Winkel und die Coordinaten z, z', z''... gleich Null, wodurch die dritte Gleichung und die zwei letzteren Gleichungen (1) verschwinden. In diesem besonderen Falle, wie bei den parallelen Kräften, giebt es daher nur drei Gleichungen des Gleichgewichtes, nemlich

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = o.$$

263.

Wenn die gegebenen Kräfte sich nicht im Gleichgewichte halten, so kann man nach der Bedingung fragen, die sie erfüllen müssen, um eine einzige Mittelkraft zu haben, und welche diese Mittelkraft ist.

Um diese Frage zu beantworten, bezeichne ich diese Kraft durch R, durch a, b, c die Winkel, welche ihre Richtung mit Linien, die mit den Axen Ox, Oy, Oz parallel und durch einen ihrer Punkte gezogen sind, den man für den Angriffspunkt nimmt, und dessen, auf dieselben Axen bezogenen, Coordinaten durch x_1, y_1, z_1 bezeichnet werden, einschliefsen. Diese Kraft, im entgegengesetzten Sinne ihrer Richtung genommen, hält den gegebenen Kräften das Gleichgewicht. Die Gleichungen (1) werden statt haben, wenn man zu den Kräften P, P', P''... noch eine Kraft hinzufügt, welche gleich R und ihm entgegengesetzt ist, folglich hat man

$$X = R \cos a, \quad Y = R \cos b, \quad Z = R \cos c, \qquad (2)$$

und aufserdem

$$L = R\,(x_1 \cos b - y_1 \cos a)$$
$$M = R\,(z_1 \cos a - x_1 \cos c)$$
$$N = R\,(y_1 \cos c - z_1 \cos b),$$

d. h. in Folge der drei ersten Gleichungen,

$$\left.\begin{aligned} Xy_1 - Yx_1 + L = o \\ Zx_1 - Xz_1 + M = o \\ Yz_1 - Zy_1 + N = o \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Da die Coordinaten x_1, y_1, z_1 einem beliebigen Punkte der geraden Linie angehören können, nach welcher die Mittelkraft gerichtet ist, so sind diese drei letzten Gleichungen die ihrer Projectionen auf die Coordinatenebenen. Damit diese gerade Linie vorhanden sey, müssen sie sich daher auf zwei zurückführen lassen, oder, wenn man sie addiert, nachdem

man sie mit Z, Y, X multipliciert hat, so verschwinden die drei Veränderlichen x_1, y_1, z_1 und man hat

$$ZL + YM + XN = o, \qquad (4)$$

es ist daher nothwendig und hinreichend, dafs diese Gleichung (4) statt finde, damit die gegebenen Kräfte eine einzige Mittelkraft haben; wenn sie statt hat, so ist diese Kraft, der Gröfse und Richtung nach, durch die Gleichungen (2) bestimmt.

Wenn die drei Summen X, Y, Z, der den Axen der x, y, z, parallelen Seitenkräfte, Null sind, so ist der Gleichung (4) Genüge geleistet; alsdann ist die Mittelkraft eine unendlich kleine Kraft, die in einem unendlich grofsen Abstande von den Angriffspunkten der gegebenen Kräfte liegt, oder, genauer ausgedrückt, es werden sich diese Kräfte auf zwei reducieren, die gleich und parallel sind und in entgegengesetztem Sinne wirken, aber nicht auf eine einzige zurückgeführt werden können (§. 44).

Wenn die drei Summen L, M, N Null sind, so wird der Gleichung (4) ebenfalls Genüge geleistet, und man sieht, durch die Gleichung (3), dafs die Mittelkraft durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen wird.

264.

Wenn die durch die Gleichung (4) ausgedrückte Bedingung nicht erfüllt ist, so kann man derselben Genüge leisten, wenn man zu den gegebenen Kräften noch eine passende Kraft hinzufügt. Ich nehme zur gröfseren Einfachheit an, sie gehe durch den Anfangspunkt der Coordinaten, bezeichne sie durch Q, und durch λ, μ, ν die Winkel, welche sie mit den Axen Ox, Oy, Oz einschliefst. Die Gröfsen L, M, N ändern sich nicht durch Hinzufügung dieser Kraft und die Summen X, Y, Z werden um die Glieder $Q\cos\lambda$, $Q\cos\mu$, $Q\cos\nu$ vermehrt. Daher wird die Gleichung (4)

$$Q(L\cos\nu + M\cos\mu + N\cos\lambda) + LZ + MY + NZ = o,$$

so dafs man ihr auf unendlich viel Arten, vermittelst der Kraft Q und der Winkel λ, μ, ν, die ihre Richtung bestimmen, Genüge leisten kann.

Die Mittelkraft R der Kräfte Q, P, P', P''... und ihre Lage werden vermittelst der Gleichungen (2) und (3) bestimmt, in welchen man $X + Q\cos\lambda$, $Y + Q\cos\mu$, $Z + Q\cos\nu$

statt X, Y, Z setzt. Die gegebenen Kräfte können daher durch diese Mittelkraft R und eine Kraft, welche der Kraft Q gleich und entgegengesetzt ist, ersetzt werden, woraus man den Schlufs zieht, dafs, wenn gegebene Kräfte weder im Gleichgewichte sind, noch auf eine einzige Kraft zurück geführt werden können, man sie immer, auf unendlich viel verschiedene Arten, auf zwei Kräfte reducieren kann, die nicht in derselben Ebene enthalten sind, weil sie, ohne letztere Beschränkung, sich, gegen die Voraussetzung, auf eine einzige zurück führen liefsen. Dies sieht man aufserdem auch unmittelbar durch die Umbildung des §. 257; denn die gegebenen Kräfte P, P', P''... können durch die Mittelkraft der Kräfte, die der Axe der z parallel sind, und durch die der Kräfte, die in der Ebene der x und y enthalten sind, ersetzt werden, und man kann alsdann, ohne Schwierigkeit, diese beiden Mittelkräfte, auf unendlich viel Arten, in zwei andere Kräfte verwandeln. Sucht man die Bedingung, unter welcher sie sich treffen, so findet man die Gleichung (4), die sich auf das Vorhandenseyn einer einzigen Kraft bezieht.

265.

Betrachtet man zwei feste Körper A und A' (Fig. 62), die sich in einem Punkte K berühren und auf einander stützen, und nimmt man an, dafs sie durch gegebene Kräfte getrieben werden, so ist es leicht, aus dem Vorhergehenden die Bedingungen ihres Gleichgewichtes zu finden.

Zu diesem Ende nehme ich an, dafs sich die sechs Gröfsen X, Y, Z, L, M, N des §. 261, auf den Körper A beziehen, und bezeichne durch X', Y', Z', L', M', N' das, was sie in Beziehung auf A' werden; ich nenne x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punktes K, die auf dieselben Axen bezogen sind, wie diejenigen, welche in diesen verschiedenen Gröfsen vorkommen. Durch den Punkt K ziehe ich die gerade Linie HKH' senkrecht auf die, beiden Körpern gemeinschaftliche, Berührungsebene, bezeichne durch a, b, c die Winkel, welche der Theil KH dieser geraden Linie, der in A enthalten ist, mit Linien einschliefst, welche durch denselben Punkt K, parallel mit den Axen der x, y, z, gezogen sind; alle diese Gröfsen sind gegeben, und man soll nun die Gleichungen des Gleichgewichtes bilden, welchen sie Genüge leisten müssen.

Der Körper A wird aber auf A' nach der Richtung KH', einen unbekannten Druck ausüben, den ich durch R bezeichne; zu gleicher Zeit wird er einen Widerstand erleiden, der dieser Kraft gleich und ihr entgegengesetzt ist. Fügt man daher zu den gegebenen Kräften, die auf A wirken, eine Kraft R hinzu, die nach KH gerichtet ist, so kann man A ganz unberücksichtigt lassen, und ebenso kann man auch A' allein betrachten, wenn man zu den, an A' angebrachten Kräften, noch eine Kraft R hinzu fügt, die nach KH' gerichtet ist. Hieraus und aus den Gleichungen (1) folgt, dafs man für das Gleichgewicht dieser zwei Körper folgende zwölf Gleichungen haben wird:

$$X + R\cos a = o,\quad Y + R\cos b = o,\quad Z + R\cos c = o$$
$$X' - R\cos a = o,\quad Y' - R\cos b = o,\quad Z' - R\cos c = o$$
$$L + R\,(x_1 \cos b - y_1 \cos a) = o$$
$$M + R\,(z_1 \cos a - x_1 \cos c) = o$$
$$N + R\,(y_1 \cos c - z_1 \cos b) = o$$
$$L' - R\,(x_1 \cos b - y_1 \cos a) = o$$
$$M' - R\,(z_1 \cos a - x_1 \cos c) = o$$
$$N' - R\,(y_1 \cos c - z_1 \cos b) = o$$

welche sich durch die Elimination von R auf elf zurückführen lassen. Sind diese elf Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes erfüllt, so giebt eine der vorhergehenden den Werth von R, welcher eine positive Gröfse seyn mufs, wenn sich die zwei Körper wirklich auf einander stützen sollen.

Diese zwölf Gleichungen geben unmittelbar

$$X + X' = o,\quad Y + Y' = o,\quad Z + Z' = o$$
$$L + L' = o,\quad M + M' = o,\quad N + N' = o,$$

was auch aus den Bedingungen des Gleichgewichtes hervorgeht, die allen völlig freien Systemen gemeinschaftlich sind, wie es das der zwei Körper A und A' ist (§. 261).

Ebenso findet man die Gleichungen des Gleichgewichtes einer beliebigen Anzahl fester Körper, von welchen sich mehrere auf einander stützen, und man sieht leicht, dafs die Anzahl dieser Gleichungen sechs mal der der Körper, weniger der Anzahl ihrer Berührungen, gleich seyn wird.

266.

Die Gleichungen des Gleichgewichtes eines festen Körpers, welcher gegebenen Bedingungen unterworfen ist, müssen unter denen eines festen völlig freien Körpers enthalten seyn. Denn das Gleichgewicht eines solchen würde nicht gestört werden, wenn man ihn besonderen Bedingungen unterwürfe, so dafs durch diese Bedingungen keine neue Gleichung des Gleichgewichtes eingeführt werden kann. Im Gegentheil müssen eine oder mehrere der Gleichungen (1) überflüssig werden, und man mufs daher für die verschiedenen Fälle, die vorkommen können, diejenigen Gleichungen bestimmen, welche noch nothwendig sind. Dies soll in diesem §. geschehen, indem noch immer die Voraussetzung beibehalten wird, dafs man die gegebenen Kräfte P, P', P'' u. s. w. durch die drei Gruppen von Kräften, von welchen in §. 259 die Rede war, ersetzt hat.

1) Enthält der feste Körper, welcher im Gleichgewichte bleiben soll, einen festen Punkt, so nimmt man diesen Punkt für den Anfangspunkt der Coordinaten. Die Kräfte, welche nach der Axe Ox gerichtet sind, werden durch diesen Punkt aufgehoben, wodurch die Gleichung $x = o$ verschwindet. Damit die Kräfte, welche der Axe Oy parallel und in der Ebene der x und y enthalten sind, verschwinden, braucht nicht mehr $Y = o$ zu seyn, sondern es ist hinreichend, dafs ihre Mittelkraft mit der Axe Oy zusammen falle, oder, dafs die Summe L ihrer Momente, in Beziehung auf die Ebene der y und x, Null sey. Damit endlich die Kräfte, die der Axe der z parallel sind, im Gleichgewichte seyen, ist nicht mehr die Gleichung $Z = o$ erforderlich, sondern es genügt, dafs ihre Mittelkraft mit der Axe Oz zusammen fällt, was erfordert, dafs die Summe ihrer Momente, in Beziehung auf die Ebene der y und z und der x und z, nemlich die Gröfsen $-M$ und N, gleich Null sind.

In diesem ersten Falle sind daher die drei Gleichungen des Gleichgewichtes, die noch nothwendig vorhanden seyn müssen,

$$L = o, \quad M = o, \quad N = o.$$

Sie drücken wirklich aus, dafs die gegebenen Kräfte eine Mittelkraft haben, und dafs diese Mittelkraft durch den festen

Punkt geht. Diese Kraft drückt, der Gröfse und Richtung nach, den Druck aus, welcher auf diesen Punkt ausgeübt wird, und wird durch die Gleichungen (2) bestimmt.

2) Man nehme an, der feste Körper werde durch eine feste Axe zurück gehalten, um welche er sich drehen kann, ohne nach der Richtung ihrer Länge gleiten zu können. Man nehme diese Axe für die der z, die Kräfte, welche dieser Axe Oz parallel sind, können gar keine Bewegung hervor bringen; daher sind die drei Gleichungen $L = o$, $M = o$, $N = o$, die sich auf ihr Gleichgewicht beziehen, nicht mehr erforderlich. Die Gleichungen $X = o$ und $Y = o$ sind ebenfalls nicht für das Gleichgewicht der in der Ebene der x und y enthaltenen Kräfte nothwendig, so dafs es in diesem Falle nur eine Gleichung des Gleichgewichtes giebt, welche $L = o$, d. h.

$$P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + P'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') + \ldots = o \quad (5)$$

seyn wird.

Hat aber der Körper die Freiheit, längs der festen Axe fortzugleiten, so mufs noch aufserdem, wenn diese Bewegung verhindert werden soll, die Summe Z, der mit Ox parallelen Kräfte, gleich Null seyn, und dann hat man die zwei Gleichungen des Gleichgewichtes

$$Z = o, \quad L = o.$$

Der Druck, den die feste Axe senkrecht auf ihre Richtung erleidet, ist die Mittelkraft der in der Ebene der x und y enthaltenen Kräfte, die, der Gröfse und Richtung nach, durch die zwei ersten Gleichungen (2) bestimmt ist, und, in Folge der Gleichung (5), durch den Punkt O geht. Die Kräfte, welche mit dieser Axe parallel sind, werden zu gleicher Zeit streben, dieselbe um sich selbst zu drehen. Vergleicht man die Gröfsen M und N mit L, so ergiebt sich aus ihrer Zusammensetzung, dafs $M = o$ die Gleichung des Gleichgewichtes um die Axe Oy, und $N = o$ dasselbe um die Axe Ox seyn wird. Hieraus folgt auch, dafs die Bedingung des Gleichgewichtes um einen festen Punkt darin besteht, dafs das Gleichgewicht um drei feste rechtwinklige Axen, die beliebig durch diesen Punkt gezogen sind, statt habe. Besteht daher das Gleichgewicht um drei rechtwinklige Axen, die sich in

demselben Punkte schneiden, so hat es auch um jede andere gerade Linie statt, die durch diesen Punkt geht.

3) Ich nehme an, dafs drei oder mehr Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, und einem festen Körper angehören, auf einer festen Ebene bleiben müssen, deren Lage gegeben ist; diese Ebene nehme ich für die der x und y. Da die mit der Axe der z parallelen Kräfte keine Bewegung hervorbringen können, so werden die auf ihr Gleichgewicht bezüglichen Gleichungen wegfallen, die drei Gleichungen

$$X = o, \quad Y = o, \quad L = o$$

dagegen, welche den in der Ebene der x und y enthaltenen Kräften entsprechen, sind erforderlich, um den Körper zu verhindern, sich parallel mit dieser festen Axe zu drehen oder zu gleiten.

Die Kraft Z ist der ganze Druck, den die feste Ebene erleidet. Ist der Körper blos auf diese Ebene gelegt, so dafs man z. B. ein Polyeder betrachtet, dessen eine Fläche auf der Ebene der x und y liegt, so mufs das Zeichen von Z so beschaffen seyn, dafs diese Kraft den Körper gegen diese Ebene prefst. Aufserdem mufs diese Mittelkraft der mit der Axe der z parallelen Kräfte, die Ebene der x und y innerhalb der Ausdehnung der Grundfläche des Körpers treffen, weil sie sonst denselben um eine der Seiten dieser Grundfläche drehen würde. Nennt man aber x_1 und y_1 die Coordinaten des Punktes, in welchem diese Mittelkraft die Ebene der x und y trifft, so sind ihre Momente, rücksichtlich der Ebene der x und y und der Ebene der y und z, gleich Zy_1 und Zx_1; sie müssen den Summen der Momente der Seitenkräfte, in Beziehung auf dieselben Ebenen, gleich seyn, und vermöge der Werthe dieser zwei Summen, die man früher gefunden hat (§. 260), hat man

$$Zx_1 = -M, \quad Zy_1 = N.$$

Man mufs daher, in jedem besonderen Falle, untersuchen, ob die Werthe von x_1 und y_1, die sich aus diesen Gleichungen ergeben, einem Punkte der Grundfläche des Körpers angehören; welche Bedingung nicht durch Gleichungen ausgedrückt werden kann, eben so wenig wie die, welche sich auf das Zeichen von Z bezieht.

4) Wenn die Punkte des Körpers, welche auf der festen Ebene der x und y bleiben sollen, nur zwei sind, oder wenn sie alle in einer geraden Linie liegen, so nimmt man diese Linie für die Axe der y; die Mittelkraft L muſs alsdann die Ebene der x und y in einem Punkte dieser Axe treffen, und man hat, unabhängig von den drei Gleichungen des vorhergehenden Falles, die vierte Gleichung des Gleichgewichtes

$$M = o.$$

5) Berührt endlich der feste Körper die feste Ebene der x und y nur in einem Punkte, den man für den Anfangspunkt O der Coordinaten nimmt, so sieht man leicht, daſs man fünf Gleichungen des Gleichgewichtes haben wird, nemlich

$$X = o, \quad Y = o, \quad L = o, \quad M = o, \quad N = o.$$

Die Kraft Z ist immer der Druck, welcher auf die feste Ebene im Punkte O ausgeübt wird, und muſs das passende Zeichen haben.

Dieses Resultat fällt mit dem des vorhergehenden §. zusammen, denn nimmt man an, daſs der Körper A' unbeweglich und durch eine Ebene begränzt ist, und man nimmt diese Ebene für die der x und y und den Punkt K (Fig. 62) für den Anfangspunkt der Coordinaten, so muſs man, in den Gleichungen dieses §., $x_1 = o$, $y_1 = o$, $z_1 = o$, $a = 90^0$, $b = 90^0$ setzen, wodurch die sechs Gleichungen, die sich auf das Gleichgewicht des Körpers A beziehen, auf die fünf vorhergehenden reduciert werden. Die sechste dieser Gleichungen wird, zu gleicher Zeit,

$$R + Z = o,$$

wenn man annimmt, daſs $c = o$, oder daſs der Theil KH der Normalen die Axe der positiven Z ist. Daher ist der Druck, welcher auf A' ausgeübt wird und dem Widerstande R gleich und entgegengesetzt ist, die Kraft Z, sowohl der Gröſse als Richtung nach.

Diese Aufzählung der verschiedenen Fälle des Gleichgewichtes veranlaſst die Bemerkung, daſs die Anzahl der Gleichungen, die sich auf einen festen Körper beziehen, der durch unbewegliche Hindernisse aufgehalten wird, eine jede

Zahl, die kleiner als sechs ist, betragen kann, welche letztere Zahl einem völlig freien Körper entspricht.

267.

Die Gleichung (5), welche sich auf das Gleichgewicht um die als fest gedachte Axe der z bezieht, enthält weder die dieser Axe parallelen Seitenkräfte der gegebenen Kräfte P, P', P''..., noch die derselben Axe parallelen Coordinaten ihrer Angriffspunkte M, M', M''... u. s. w., so daſs das Gleichgewicht nicht gestört wird, wenn man diese Kräfte und ihre Angriffspunkte durch ihre Projectionen auf die Ebene der x und y ersetzt; was man übrigens auch leicht a priori beweisen kann.

Seyen also Q, Q', Q''... die auf die Ebene der x und y projicierten Kräfte P, P', P''..., d. h. die parallel mit dieser Ebene zerlegten und an die Projection der Punkte M, M', M'' u. s. w. auf dieselbe Ebene angebrachten. Man bezeichne durch q, q', q''... u. s. w. die senkrechten Linien, welche von dem als fest gedachten Anfangspunkte der Coordinaten auf die Richtungen der Kräfte Q, Q', Q''... gefällt sind, und um einen bestimmten Fall zu betrachten, nehme man an, daſs Q, Q', Q'' nach einer und derselben Richtung um diesen Anfangspunkt zu drehen streben, während Q''', Q^{iv} nach entgegengesetzter Richtung drehen. Damit alle Kräfte im Gleichgewichte seyen, muſs man, nach §. 47,

$$Qq + Q'q' + Q''q'' - Q'''q''' - Q^{\text{iv}}q_{\text{iv}} - \ldots = o \quad (6)$$

haben, indem man q, q', q'', q'''..., so wie auch Q, Q', Q'', Q'''..., als positive Gröſsen betrachtet.

Diese Gleichung muſs daher mit der Gleichung (5) zusammenfallen, was man auch wirklich, auf folgende Weise, zeigen kann.

Sey H (Fig. 63) die Projection des Punktes M, OG und HG seine Coordinaten x und y, HA die Richtung der Kraft Q, λ und μ die Winkel, welche diese Linie mit den Linien einschlieſst, die mit den Axen Ox und Oy parallel durch den Punkt H gezogen sind. Durch den Punkt O ziehe man zwei andere Axen Ox_1 und Oy_1, die erstere nach der Richtung HA und die zweite senkrecht auf diese Linie, und so beschaffen, daſs der Winkel yOy_1 zugleich mit xOx_1, spitz

oder stumpf ist. Man nenne x_1 und y_1 die Coordinaten OF und FH des Punktes H, die auf diese neuen Axen bezogen sind, so hat man, wie bekannt,

$$x_1 = y \cos\mu + x \cos\lambda; \quad y_1 = y \cos\lambda - x \cos\mu.$$

Da aber die senkrechte Linie OK oder q, die vom Punkte O auf HA gefällt ist, eine positive Gröfse seyn mufs, so hat man

$$q = \pm y_1 = \pm (y \cos\lambda - x \cos\mu),$$

je nachdem die Ordinate y_1 positiv oder negativ ist, oder, was dasselbe ist, je nachdem die Kraft Q nach einer bestimmten oder der entgegengesetzten Richtung um den Punkt O zu drehen strebt. Aufserdem hat man

$$Q = P \sin\gamma,$$

und ferner (§. 8)

$$\cos\alpha = \sin\gamma \cos\lambda, \quad \cos\beta = \sin\gamma \cos\mu;$$

hieraus folgt also

$$Qq = \pm P (y \cos\alpha - x \cos\beta).$$

Da die Kräfte Q' und Q'', nach unserer Voraussetzung, in demselben Sinne drehen wie Q, so hat man auch

$$Q' q' = \pm P' (y' \cos\alpha' - x' \cos\beta')$$
$$Q'' q'' = \pm P'' (y'' \cos\alpha'' - x'' \cos\beta'')$$

und da die anderen Kräfte Q''', Q^{iv}... nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen streben, so hat man

$$Q''' q''' = \mp P''' (y''' \cos\alpha''' - x''' \cos\beta''')$$
$$Q^{\text{iv}} q^{\text{iv}} = \mp P^{\text{iv}} (y^{\text{iv}} \cos\alpha^{\text{iv}} - x^{\text{iv}} \cos\beta^{\text{iv}})$$

. . . . . .

Man mufs daher, in allen diesen Werthen, zu gleicher Zeit entweder die oberen oder die unteren Zeichen nehmen und substituiert man sie in die Gleichung (6), so geht diese in die Gleichung (5) über, was zu beweisen war.

268.

Da der im Gleichgewichte befindliche Körper immer der Schwerkraft unterworfen ist, so mufs man unter den gegebenen Kräften P, P' P''... auch sein Gewicht begreifen, das naeh der Verticalen an seinem Schwerpunkte wirkt. Man nehme z. B. an, dafs von einem schweren Körper die Rede sey, der auf einer schiefen Ebene liegt und durch eine ein-

zige Kraft gehalten wird. Die Figur 64 stellt einen Durchschnitt des Körpers vor, der durch den Schwerpunkt G geht und auf der geneigten Ebene senkrecht steht. Die Länge dieser Ebene ist AB, ihre Basis BC und ihre Höhe AC. Man verlegt den Anfangspunkt O der Coordinaten in die Verticale GH, die durch den Schwerpunkt geht und nimmt die Axen Oz und Ox bezüglich senkrecht auf AB und parallel mit dieser Linie. Die dritte Axe Oy, die nicht in der Figur angegeben ist, steht auf der Ebene der Figur senkrecht. Die Kraft P ist das Gewicht des Körpers, die Verticale GH ihre Richtung und HOx der Winkel α. Aufserdem hat man $x = o$, $y = o$, $\beta = 90^0$. Nimmt man daher P' für die gegebene Kraft, welche den Körper hält, so reducieren sich die Gleichungen des Gleichgewichtes für den dritten Fall des §. 266 auf

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' = o, \; P'\cos\beta' = o, \; P'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') = o.$$

Vermöge der zwei letzteren Gleichungen hat man $\beta' = 90^0$ und $y' = o$, woraus zuerst hervorgeht, dafs die Kraft P' in der Ebene der x und z enthalten seyn mufs, und dies ist auch wirklich nothwendig, damit diese Kraft und das Gewicht des Körpers eine einzige Mittelkraft haben, die auf der geneigten Ebene senkrecht steht. Ich nehme an, es sey O der Punkt, wo die Richtung von P' die Verticale GH trifft und bezeichne diese Richtung durch OD. Der Winkel α' oder DOx mufs stumpf seyn, um der ersten der drei vorhergehenden Gleichungen zu genügen. Ich nenne δ den spitzen Winkel DOx', welchen die Kraft P' mit der Verlängerung von Ox einschliefst, so dafs man

$$\cos\alpha' = -\cos\delta$$

hat. Der Winkel α oder HOx ist das Complement der Neigung ABC der Ebene; bezeichnet man die Höhe AC durch h, und die Länge AB durch l, so hat man daher

$$\cos\alpha = \frac{h}{l},$$

woraus sich zuletzt

$$\frac{Ph}{l} = P'\cos\delta$$

ergiebt, welche Gleichung des Gleichgewichtes eine der zwei Gröfsen P' und δ finden lehrt, wenn die andere gegeben ist.

Ist z. B. die Kraft P' mit der geneigten Ebene parallel, so hat man $\delta = o$, und daher

$$P' : P = h : l,$$

oder, was dasselbe ist,

$$P' = P \sin i,$$

indem man i die Neigung der Ebene nennt. Nennt man Q den Druck, den die Ebene erleidet, und welcher, in diesem Falle, die nach der senkrechten Oz gerichtete Seitenkraft des Gewichtes P seyn wird, so hat man, zu gleicher Zeit,

$$Q = P \cos i.$$

269.

Man abstrahiert hier von der Reibung, die zu der Kraft P' hinzu kommt, parallel mit der schiefen Ebene wirkt und den Körper hindert, längs dieser Ebene fort zu gleiten. Ist die Kraft P' Null, so kann die Reibung allein den Körper zurück halten, so lange die Neigung i nicht eine gewisse Gränze erreicht hat. Bezeichnet man diese Gränze durch λ, d. h. den Winkel i, welcher dann vorhanden ist, wenn die Störung des Gleichgewichtes anfängt, und nimmt man an, dafs die Reibung in diesem Augenblicke ein Bruch f des Druckes ist, so mufs die Kraft fQ der Seitenkraft $P \sin \lambda$ des Gewichtes des Körpers, die der schiefen Ebene parallel ist, das Gleichgewicht halten. Daher hat man zu gleicher Zeit

$$Q = P \cos \lambda, \quad fQ = P \sin \lambda,$$

woraus man

$$f = \operatorname{tang} \lambda$$

findet. Man findet daher den Werth von f durch die Beobachtung des Winkels λ, unter welchem die Bewegung anfängt, und den man den Reibungswinkel nennt.

Die Erfahrung zeigt, dafs, bei sonst gleichen Verhältnissen, die Reibung in dem Augenblicke, welcher der Aufhebung des Gleichgewichtes vorausgeht, dem Drucke proportional ist, so dafs der Coefficient f und der Winkel λ von dem Drucke Q und daher auch von dem Gewichte P unabhängig sind. Dieser Coefficient ändert sich mit der Beschaffenheit des Körpers und der Politur der Oberflächen; auch hat man bemerkt, dafs er das Maximum seines Werthes erst dann erreicht, wenn die Berührung des Körpers und der Ebene

eine Zeitlang gedauert hat, die bei Körpern von verschiedener Beschaffenheit verschieden ist; auch ist die Behauptung, dafs die Reibung dem Drucke proportional ist, nur dann richtig, wenn man von diesem Maximum ausgeht.

Giebt man diesen Erfahrungssatz zu, so folgt daraus, dafs, wenn mehrere Körper von derselben Beschaffenheit, deren Oberflächen dieselbe Politur haben, auf eine horizontale Ebene gelegt werden, und man diese Ebene allmälich, nach einer gewissen Zeit, neigt, alle diese Körper unter demselben Winkel α zu gleiten anfangen werden, wie auch ihre Gewichte und die Ausdehnung ihrer Oberfläche, die auf der Ebene liegen, beschaffen seyn mögen.

270.

Liegt ein Körper auf einer horizontalen Ebene, so vertheilt sich der Druck, den sein Gewicht P ausübt, unter den Stützpunkten dieser Ebene; wenn aber ihre Zahl mehr als drei beträgt, so scheint diese Vertheilung, beim ersten Blicke unbestimmt zu seyn, dies ist eine Schwierigkeit, die wir nun genauer untersuchen wollen.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehme man an, die horizontale Ebene sey die Oberfläche eines Tisches, dessen Füfse vertical sind. In dieser Ebene ziehe man zwei rechtwinklige Axen Ox und Oy (Fig. 65). Sey C die Projection des Schwerpunktes des Körpers auf diese Ebene und A, A', A''... die Punkte dieser Ebene, welche den Füfsen des Tisches entsprechen. Man bezeichne durch x_1 und y_1, x' und y', x'' und y''... die Coordinaten dieser Punkte C, A, A' A'' u. s. w., die auf die Axen Ox und Oy bezogen sind. Damit der Tisch nicht umgeworfen werde, mufs der Punkt C im Inneren des Vielecks A, A', A'', A'''... liegen. Ist diese Bedingung erfüllt, so zerlegt sich das an den Punkt C angebrachte Gewicht in parallele Kräfte, die im Sinne der Schwerkraft gerichtet sind, und durch die Stützpunkte A, A', A''... gehen, welche Kräfte die Lasten sind, die die Füfse des Tisches tragen müssen. Seyen Q, Q', Q''... diese unbekannten Lasten, so hat man, nach der Theorie der parallelen Kräfte,

$$P = Q + Q' + Q'' + \dots$$

$$P x_1 = Q x + Q' x' + Q'' x'' + \ldots$$
$$P y_1 = Q y + Q' y' + Q'' y'' + \ldots$$

Sind nun nur drei Stützpunkte A, A', A'' vorhanden, so sind diese drei Gleichungen hinreichend, um die Lasten Q, Q', Q'' zu bestimmen; sind aber deren vier oder eine gröfsere Anzahl vorhanden, so ist die Aufgabe unbestimmt, und man kann alsdann die Werthe aller Unbekannten, weniger drei, nach Belieben annehmen, sobald sich nur hieraus, für diese drei Unbekannten, positive Werthe ergeben. *)

Diese Unbestimmtheit würde wirklich statt finden, wenn der Tisch völlig unbiegsam wäre; doch ist dies nie der Fall, und so wenig biegsam man ihn annimmt, immer wird er seine Gestalt ein wenig ändern und sich in seinen verschiedenen Theilen auf ungleiche Weise zusammendrücken. Die Gestalt aber, die er annimmt, und die Gröfse, um welche er sich in jedem Punkte zusammendrückt, werden nicht blos von dem Gewichte P, sondern auch von der Anzahl und der Lage der Stützpunkte A, A', A''... abhängen, und beide, so wie der Druck, der in jedem dieser Punkte statt hat, werden in jedem besonderen Falle vollkommen bestimmt seyn. Doch ist diese Bestimmung eine sehr schwere Aufgabe, für die man noch keine allgemeine Lösung hat, und die in die mathematische Physik gehört. Wir beschränken uns hier darauf, zu bemerken, dafs Alles nothwendig in der Natur bestimmt ist, und dafs wir, wenn uns etwas unbestimmt zu seyn scheint, von irgend etwas in der Aufgabe Gegebenem, d. h. von irgend einer Eigenschaft der Materie abstrahiert, haben, wie es z. B. in der gegenwärtigen Frage, mit dem Grade der Biegsamkeit des Tisches der Fall ist.

*) Es ist leicht einzusehen, dafs die Aufgabe auch in dem Falle unbestimmt bleibt, wenn nur drei Stützpunkte vorhanden sind, sobald diese in einer geraden Linie liegen, in welcher dann auch der Punkt C liegen mufs, damit der Tisch nicht umgeworfen werde. Denn nimmt man in diesem Falle diese gerade Linie z. B. für die Axe Oy, so hat man $x_1 = x = x' = x'' = o$ und $y_1 = y = y' = y'' = \infty$, so dafs nur noch die Gleichung

$$P = Q + Q' + Q''$$

übrig bleibt, die zwei anderen Gleichungen dagegen, als identische, wegfallen. Man vergleiche übrigens auch Crelle's Journ. für die reine u. angew. Mathem. Bd. 1, pg. 117 ff. Anmerk. des Uebers.

Zweites Kapitel.

Theorie der Momente.

271.

Die Momente, welche wir in diesem Kapitel betrachten, sind diejenigen, von welchen in §. 42 die Rede war. So ist das Moment einer Kraft P das Produkt Pp aus dieser Kraft und der senkrechten Linie p, die vom Mittelpunkte der Momente auf ihre Richtung gefällt wird. Ist dieser Mittelpunkt C (Fig. 66), und wird die Kraft P durch die Linie MA vorgestellt, die man auf ihrer Richtung genommen hat, so ist der Werth ihres Momentes das Doppelte des Dreiecks CAM, dessen Grundlinie diese Kraft und dessen Spitze in C ist. Hiernach ist der Lehrsatz des §. 46, in Beziehung auf das Moment der Mittelkraft zweier Kräfte, nichts Anderes, als ein leicht zu beweisender geometrischer Lehrsatz.

Seyen nemlich MA und MB die beiden Seitenkräfte, die Diagonale MD des Parallelogramms $MADB$ wird ihre Mittelkraft seyn, und da der Punkt C außerhalb des Winkels AMB und seines Scheitelwinkels liegt, so muß man beweisen, daß das Dreieck CMD die Summe der Dreiecke CMA und CMB ist. Man hat aber sogleich

$$CMD = CMA + CAD + MAD;$$

fällt man vom Punkte C eine senkrechte Linie CE auf MB, welche die mit dieser parallel gezogene Linie AD in F trifft, so hat man

$$CMB = \tfrac{1}{2} MB.CE, \quad CAD = \tfrac{1}{2} AD.CF,$$

und da

$$MB = AD, \quad CF = CE - EF,$$

so folgt hieraus

$$CAD = CMB - \tfrac{1}{2} MB.EF.$$

Nun ist $MB.EF$ die Oberfläche des Parallelogramms $MADB$, oder das Doppelte des Dreiecks MAD, daher hat man

$$CAD = CMB - MAD,$$

und daher

$$CMD = CMA + CMB,$$

was zu beweisen war.

In der Figur wird angenommen, dafs die Linie EF der Unterschied der senkrechten Linien CE und CF ist; sie könnte auch deren Summe seyn, und man würde ohne Schwierigkeit den vorhergehenden Beweis umändern können, um ihn auf diesen Fall anzuwenden. Auch kann man auf dieselbe Weise zeigen, dafs das Dreieck CMD der Unterschied der Dreiecke CMA und CMB ist, wenn der Punkt C innerhalb des Winkels AMB oder seines Scheitelwinkels liegt.

272.

Durch den Mittelpunkt der Momente (Fig. 67) ziehe man eine beliebige Ebene; man projiciere auf diese Ebene die gerade Linie AB, welche die Kraft P, der Gröfse und Richtung nach, darstellt. Sey ebenso Q die Kraft, welche durch die Projection $A'B'$ von AB dargestellt wird; alsdann ist das Moment der Kraft P das Doppelte des Dreiecks CAB, und das der Kraft Q das Doppelte des Dreiecks $CA'B'$. Bleibt daher der Mittelpunkt der Momente derselbe, so ist das Moment der Projection einer Kraft auf eine Ebene, die durch diesen Punkt geht, die Projection des Momentes dieser Kraft auf dieselbe Ebene.

Nennt man H das Moment der Kraft P, und K das seiner Projection Q, erhebt man auf den Ebenen dieser zwei Momente die senkrechten Linien CD und CE, und bezeichnet den Winkel DCE durch δ, so ist dieser Winkel ebenfalls die Neigung von H gegen K, und man hat (§. 10)

$$K = H \cos \delta.$$

Für dieselbe Kraft P, ändert sich der Winkel δ und das Moment H mit der Lage des Punktes C auf der Linie CE; bleibt aber diese Linie dieselbe, so ändert sich das Produkt $H \cos \delta$ nicht, denn alsdann wird K oder das Dreieck $CA'B'$ nur seinen Ort parallel mit sich selbst verändern, ohne dafs sich seine Gröfse ändert.

273.

Man betrachte nun, statt einer einzigen Kraft, ein System von Kräften $P, P', P''\ldots$ Seyen H, H', H'' u. s. w. ihre Momente in Beziehung auf den Punkt C (Fig. 68). Man bezeichne durch $\delta, \delta', \delta''\ldots$ die Winkel, welche die auf den

Ebenen dieser Momente senkrecht stehenden Linien CD, CD', CD''... mit derselben Axe CE einschliefsen, durch Q, Q', Q''... die Projectionen von P, P', P''... auf die Ebene, die durch den Punkt C gezogen ist und auf dieser Axe senkrecht steht, und durch K, K', K''... die Projectionen von H, H', H''... auf dieselbe Ebene. Alsdann hat man

$$K = H \cos\delta, \quad K' = H' \cos\delta', \quad K'' = H'' \cos\delta''...$$

Wollte man blos den Flächeninhalt der Projectionen aus dem der projicierten Flächen erfahren, so müfste man die Neigungen δ, δ', δ''... als spitze Winkel betrachten. In den Anwendungen aber, die wir von den Projectionen der Momente machen werden, betrachten wir diese Winkel als spitz oder stumpf, oder, mit anderen Worten, wir nehmen für die geraden Linien CD, CD', CD''... die Theile der auf den Ebenen der Momente H, H', H''... senkrecht stehenden Linien, welche mit der Axe CE spitze oder stumpfe Winkel einschliefsen, je nachdem die Projectionen Q, Q', Q''... der Kräfte P, P', P''... in einem bestimmt angenommenen Sinne oder dem entgegengesetzten um den Punkt C zu drehen streben. So z. B., da in der Figur die Winkel DCE, $D'CE$ $D''CE$ spitz und die Winkel $D'''CE$, $D^{iv}CE$ u. s. w. stumpf sind, so setzt dies voraus, dafs die Kräfte Q, Q', Q'' in demselben Sinne und die Kräfte Q''', Q^{iv} u. s. w. in entgegengesetztem Sinne zu drehen streben. Da die Linien CD'' und CD''' eine gerade Linie bilden, so zeigt dies, dafs die Kräfte P'' und P''' in derselben Ebene enthalten sind, die durch den Punkt C geht, dafs sie aber, so wie ihre Projectionen Q'' und Q''', in entgegengesetztem Sinne zu drehen streben.

Nennt man S die Summe der positiven oder negativen Werthe von K, K', K'' u. s. w., so hat man

$$S = H \cos\delta + H' \cos\delta' + H'' \cos\delta'' + \ldots;$$

läfst man das Zeichen unberücksichtigt, so ist S die Summe der Momente der Kräfte Q, Q', Q''..., welche in demselben Sinne zu drehen streben, weniger der Summe der Momente derjenigen Kräfte, welche eine Drehung in entgegengesetztem Sinne hervorzubringen suchen. Nach dem Lehrsatze des §. 47 drückt daher die Gröfse $\pm S$ das Moment ihrer Mittelkraft

aus, welche in dem Sinne der Kräfte, die den spitzen Winkeln δ, δ', δ''... oder den stumpfen Winkeln δ''', δ^{iv}... entsprechen, zu drehen strebt, je nachdem der vorhergehende Werth von S positiv oder negativ ist.

Verwandelt man zu gleicher Zeit alle Linien CD, CD', CD'' u. s. w. in ihre Verlängerungen, so gehen die Winkel δ, δ', δ''... in ihre Supplemente über und S wird $-S$. Ebendies ist der Fall, wenn man die Axe CE durch ihre Verlängerung CE' ersetzt. Die Summe S ist, wie jeder ihrer Theile, von der Lage des Punktes C auf der Axe CE unabhängig. Sie hängt nur von dem System der Kräfte P, P', P''..., von der Lage dieser Axe und ihrer, auf der Ebene der Projection senkrecht stehenden, Richtung ab. In der Folge werden wir die Gröſse S das Moment der Kräfte P, P' P''... in Beziehung auf die Axe CE nennen.

274.

Nach dieser Erklärung sind die drei Gröſsen L, M, N des §. 261 die Momente der Kräfte P, P', P'' u. s. w. in Beziehung auf die positiven Coordinatenaxen ihrer Angriffspunkte.

Um dies zu beweisen, sey Q die Projection der Kraft P auf die Ebene der x und y, und q die vom Anfangspunkte der Coordinaten auf ihre Richtung gefällte senkrechte Linie, so daſs der Werth ihres Momentes in Beziehung auf diesen Punkt Qq ist. Man nehme an, die Kraft Q wirke von A nach B (Fig. 69) und es seyen AC und AD die Coordinaten x und y ihres Angriffspunktes A, die auf die rechtwinkligen Axen Ox und Oy bezogen sind. Seyen ferner λ und μ die Winkel BAC' und BAD', welche die Kraft Q mit den Verlängerungen von x und y einschlieſst; die nach AC' und AD' gerichteten Seitenkräfte sind $Q \cos \lambda$ und $Q \cos \mu$, und ihre Momente in Beziehung auf den Punkt O sind $yQ \cos \lambda$ und $xQ \cos \mu$. Nach der Figur suchen diese Kräfte in entgegengesetztem Sinne zu drehen und die Kraft Q in dem Sinne von $Q \cos \mu$; man hat also

$$Qq = xQ \cos \mu - yQ \cos \lambda.$$

Untersucht man die verschiedenen Lagen, welche der Punkt A haben kann, und die verschiedenen Richtungen,

welche die Kraft Q haben kann, so sieht man leicht, dafs diese Gleichung bestehen wird, wie auch die Zeichen von x, y, $\cos\lambda$, $\cos\mu$ beschaffen sind, sobald nur die Kraft Q, wenn sie nach E oder F verlegt wird, wo ihre Richtung die Axe der x oder der y trifft, die Axe Ox der positiven x, innerhalb des Winkels der positiven x und y, und daher die Axe Oy der positiven y aufserhalb dieses Winkels zu drehen strebt, wie dies durch die Pfeile s und s' angedeutet wird. Findet das Entgegengesetzte statt, d. h. strebt die so verlegte Kraft, die Axe der positiven y innerhalb des Winkels der positiven x und y und daher die Axe der positiven x aufserhalb dieses Winkels zu drehen, so hat man

$$Qq = yQ\cos\lambda - xQ\cos\mu,$$

wie auch die Zeichen von x, y, $\cos\lambda$, $\cos\mu$ beschaffen seyen. Hieraus folgt, dafs, wenn S das Moment der Kräfte P, P', P'' u. s. w. in Beziehung auf die Axe der positiven x ist, und man die Winkel δ, δ', δ''..., im vorhergehenden §., als spitze oder stumpfe ansieht, je nachdem die Projectionen Q, Q', Q'' u. s. w. dieser Kräfte die Axe der positiven x innerhalb des Winkels der positiven x und y oder aufserhalb dieses Winkels zu drehen streben, so hat man

$$S = Q(x\cos\mu - y\cos\lambda) + Q'(x'\cos\mu' - y'\cos\lambda') + Q''(x''\cos\mu'' - y''\cos\lambda'') + \ldots$$

wo x', y', λ', μ' x'', y'', λ'', μ'' u. s. w. das bedeuten, was x, y, λ, μ in Beziehung auf die Kräfte Q', Q''... werden.

Seyen aufserdem α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ''... die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte P, P' P''... mit den Linien, die den Axen der x, y, z parallel sind, einschliefsen, so hat man

$$Q = P\sin\gamma, \quad Q' = P'\sin\gamma', \quad Q'' = P''\sin\gamma''\ldots$$
$$\cos\alpha = \sin\gamma\cos\lambda, \quad \cos\alpha' = \sin\gamma'\cos\lambda', \quad \cos\alpha'' = \sin\gamma''\cos\lambda''\ldots$$
$$\cos\beta = \sin\gamma\cos\mu, \quad \cos\beta' = \sin\gamma'\cos\mu', \quad \cos\beta'' = \sin\gamma''\cos\mu''\ldots$$

und, nach diesen Werthen, fällt der Werth von S mit der Gröfse L in §. 261 zusammen. L ist also das Moment der Kräfte P, P', P''... in Beziehung auf die Axe der positiven z, und je nachdem es positiv oder negativ ist, so strebt dieses System von Kräften, die Ebene der positiven x und z,

innerhalb des dreikantigen Winkels der positiven Coordinaten, oder aufserhalb dieses Winkels, um diese Axe zu drehen.

Substituiert man nun die Axen der positiven z, x, y, bezüglich statt der der positiven x, y, z, so geht L in M über. Hieraus folgt also, dafs M das Moment der Kräfte P, P', P''... in Beziehung auf die Axe der positiven y ist, und dafs, je nachdem es positiv oder negativ ist, dieses System von Kräften, die Ebene der positiven z und y, innerhalb des dreikantigen Winkels der positiven Coordinaten, oder aufserhalb dieses Winkels, um diese Axe zu drehen strebt. Dieses vorausgesetzt, geht M in N über, wenn man die Axen der positiven z, x, y durch die der positiven y, z, x ersetzt; daher ist N das Moment der Kräfte P, P', P''... in Beziehung auf die Axe der positiven x, und, je nachdem dieses positiv oder negativ ist, sucht dieses System von Kräften, die Ebene der positiven y und x, innerhalb des Winkels der positiven Coordinaten, oder aufserhalb dieses dreikantigen Winkels zu drehen.

Die drei Gröfsen L, M, N sind daher, wie gesagt, die Momente desselben Systems von Kräften in Beziehung auf die drei Axen der positiven Coordinaten ihrer Angriffspunkte, und die Zeichen ihrer Werthe, wie man sie in §. 261 findet, entsprechen einer bekannten Richtung der Umdrehung um jede als fest angenommene Axe.

275.

Der erste Werth von Qq des vorhergehenden §. ist dasselbe, wie

$$Qq = xP\cos\beta - Py\cos\alpha.$$

Nennt man H das Moment von P in Beziehung auf den Anfangspunkt der Coordinaten, und δ den Winkel, der zwischen einem Theile der auf der Ebene dieses Momentes senkrecht stehenden Linie und der Axe der positiven z enthalten ist, so hat man daher (§. 272)

$$H\cos\delta = P(x\cos\beta - y\cos\alpha),$$

was voraussetzt, dafs dieser Theil der auf der Ebene von H senkrecht stehenden Linie derjenige ist, welcher mit der Axe der positiven z einen spitzen oder stumpfen Winkel ein-

schliefst, je nachdem die in den Klammern enthaltene Gröfse positiv oder negativ ist.

Seyen δ_1 und δ_2 die Winkel, welche derselbe Theil dieser senkrechten Linie mit den Axen der positiven y und x einschliefst, so hat man auch

$$H \cos \delta_1 = P (z \cos \alpha - x \cos \gamma)$$
$$H \cos \delta_2 = P (y \cos \gamma - z \cos \beta).$$

Setzt man daher zur Abkürzung

$$(x \cos\beta - y \cos\alpha)^2 + (z \cos\alpha - x \cos\gamma)^2 + (y \cos\gamma - z \cos\beta)^2 = p^2$$

und betrachtet p als eine positive Gröfse, so folgt hieraus

$$H = Pp,$$

da

$$\cos^2 \delta + \cos^2 \delta_1 + \cos^2 \delta_2 = 1$$

ist, daher hat man

$$\cos \delta = \frac{1}{p} (x \cos \beta - y \cos \alpha),$$
$$\cos \delta_1 = \frac{1}{p} (z \cos \alpha - x \cos \beta),$$
$$\cos \delta_2 = \frac{1}{p} (y \cos \gamma - z \cos \beta),$$

um ohne Zweideutigkeit die drei Winkel δ, δ_1, δ_2 zu bestimmen. Der Winkel δ wird, wie vorausgesetzt worden ist, spitz oder stumpf seyn, je nachdem das Zeichen von $x \cos \beta - y \cos \alpha$ positiv oder negativ ist, und ebenso wird es von dem Zeichen von $z \cos \alpha - x \cos \gamma$ und $y \cos \gamma - z \cos \beta$ abhängen, ob die Winkel δ_1 und δ_2 spitz oder stumpf sind.

Die Richtigkeit dieser Formeln ist leicht zu erweisen. Denn man drücke die Gleichung der Ebene, welche den Anfangspunkt der Coordinaten und die Kraft P enthält, durch

$$Au + Bv + Cw = o$$

aus, wo u, v, w die Coordinaten eines jeden beliebigen Punktes andeuten.

Da die Coordinaten des Angriffspunktes dieser Kraft x, y, z sind, so mufs man

$$Ax + By + Cz = o$$

haben; aufserdem werden die Gleichungen einer geraden Linie, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten parallel mit dieser Kraft gezogen ist,

$$v \cos\alpha = u \cos\beta, \quad w \cos\alpha = u \cos\gamma$$

seyn, und da diese Parallellinie ebenfalls in der Ebene, die wir betrachten, enthalten ist, so folgt hieraus die zweite Bedingungsgleichung

$$A \cos\alpha + B \cos\beta + C \cos\gamma = o.$$

Aus diesen zwei Gleichungen findet man

$$C = \frac{A(x \cos\beta - y \cos\alpha)}{y \cos\gamma - z \cos\beta}$$

$$B = \frac{A(z \cos\alpha - x \cos\gamma)}{y \cos\gamma - z \cos\beta},$$

und substituiert man diese Werthe in die Gleichung der Ebene, so wird diese

$$u(y \cos\gamma - z \cos\beta) + v(z \cos\alpha - x \cos\gamma) + w(x \cos\beta - y \cos\alpha) = o.$$

Nach den bekannten Formeln (§. 17) werden aber die Cosinus der Winkel δ, δ_1, δ_2, welche die auf dieser Ebene senkrecht stehende Linie, mit den Axen der u, v, w, welche auch die der x, y, z sind, einschliefst, wirklich durch die zu beweisenden Formeln ausgedrückt.

In Folge der Gleichung $H = Pp$ ist p die vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Richtung der Kraft P gefällte senkrechte Linie. Dies läfst sich auch ohne Schwierigkeit beweisen, wenn man den Endpunkt dieser Senkrechten für den Angriffspunkt von P nimmt. Denn nennt man r den Radius Vector dieses Punktes, welcher alsdann diese Senkrechte seyn wird, und λ, μ, ν die Winkel, welche seine Richtung mit den Axen der x, y, z einschliefst, so hat man

$$x = r \cos\lambda, \quad y = r \cos\mu, \quad z = r \cos\nu,$$

und substituiert man diese Werthe in den Werth von p^2, und berücksichtigt die Gleichungen (§§. 6 und 9),

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

$$\cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta \cos\mu + \cos\gamma \cos\nu = o,$$

so findet man

$$p^2 = r^2 \text{ oder } p = r.$$

276.

Die Momente desselben Systems von Kräften, in Beziehung auf verschiedene Axen, haben merkwürdige Eigenschaf-

ten, die eine unmittelbare Folge der Eigenschaften der Projectionen ebener Flächen auf verschiedene Ebenen sind und im Folgenden erläutert werden sollen.

Seyen Ox, Oy, Oz drei rechtwinklige Axen, die sich in einem Punkte O schneiden (Fig. 70). Man ziehe durch diesen Punkt drei andere Axen Ox', Oy', Oz', die ebenfalls rechtwinklig sind. Um die Richtung dieser neuen Axe im Verhältnisse zu den ersten zu bestimmen, setze man

$$\begin{array}{lll} xOx' = \alpha, & yOx' = \beta, & zOx' = \gamma \\ xOy' = \alpha', & yOy' = \beta', & zOy' = \gamma' \\ xOz' = \alpha'', & yOz' = \beta'', & zOz' = \gamma'', \end{array}$$

und betrachte α, β, γ u. s. w. als neun gegebene, spitze oder stumpfe Winkel. Ihre Cosinus sind durch sechs Gleichungen unter einander verbunden. Betrachtet man allmälich die drei geraden Linien Ox', Oy', Oz', so hat man

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1 \\ \cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' = 1 \end{array}\right\} \quad (1)$$

und da $x'Oy'$, $x'Oz'$, $y'Oz'$ rechte Winkel sind, so hat man auch

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = o \\ \cos\alpha\cos\alpha'' + \cos\beta\cos\beta'' + \cos\gamma\cos\gamma'' = o \\ \cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' = o \end{array}\right\} \quad (2)$$

Die neun Winkel α, α', α''... bestimmen auch wieder die Richtungen der ersten Axen Ox, Oy, Oz im Verhältnisse zu den zweiten Ox', Oy', Oz'. So hat man

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1 \\ \cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'' = 1 \\ \cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' = 1 \end{array}\right\} \quad (3)$$

und aufserdem

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'' = o \\ \cos\alpha\cos\gamma + \cos\alpha'\cos\gamma' + \cos\alpha''\cos\gamma'' = o \\ \cos\beta\cos\gamma + \cos\beta'\cos\gamma' + \cos\beta''\cos\gamma'' = o \end{array}\right\} \quad (4)$$

welche Gleichungen dasselbe, wie die sechs früheren, ausdrücken, und statt ihrer genommen werden können.

Sey a der Inhalt einer ebenen Fläche, die durch irgend einen Zug begränzt ist und in einer Ebene liegt, welche durch

den Punkt O geht. Man errichte in diesem Punkte eine senkrechte Linie OD auf dieser Ebene und setze

$$xOD = q, \quad yOD = q', \quad zOD = q''.$$

Diese drei spitzen oder stumpfen Winkel bestimmen die Richtung von OD und der Ebene von a; gehen sie alle drei in ihre Supplemente über, so geht die Linie OD in ihre Verlängerung über und die Ebene von a bleibt dieselbe.

Man nenne auch p, p', p'' die Projectionen von a auf die Ebenen yOz, xOz, xOy, so hat man (§. 10)

$$p = a \cos q, \quad p' = a \cos q', \quad p'' = a \cos q''.$$

Sey endlich b die Projection von a auf eine vierte Ebene, die, wenn man will, die Ebene $y'Oz'$ seyn soll, und sey c der Winkel $x'OD$, so hat man auch

$$b = a \cos c,$$

und, nach der Formel (2) des §. 9,

$$\cos c = \cos q \cos \alpha + \cos q' \cos \beta + \cos q'' \cos \gamma, \qquad (5)$$

woraus man

$$b = p \cos \alpha + p' \cos \beta + p'' \cos \gamma \qquad (6)$$

findet, welche Gleichung die Projection einer Fläche a auf eine beliebige Ebene angiebt, wenn man ihre Projectionen auf drei beliebige rechtwinklige Ebenen kennt.

Da die Gleichung (5) nur dann richtig ist, wenn man die Zeichen der in ihr enthaltenen Cosinus berücksichtigt, so folgt hieraus, daſs man auch in den Gleichungen (6) auf die Zeichen der Projectionen p, p', p'' Rücksicht nehmen, und sie als positive oder negative Gröſsen ansehen muſs, je nachdem die auf der Ebene von a senkrecht stehende Linie OD mit den Axen Ox, Oy, Oz, spitze oder stumpfe Winkel einschlieſst.

277.

Dies vorausgesetzt, betrachte man eine beliebige Anzahl ebener Flächen $a, a', a''\ldots$, die in verschiedenen Ebenen liegen. Man projiciere alle diese Flächen auf die drei Ebenen xOy, xOz, yOz und addiere die auf dieselbe Ebene gemachten Projectionen zusammen, indem man ihre Zeichen, wie so eben erklärt worden ist, berücksichtigt. Seyen A, A', A'' die drei Summen, die man auf diese Weise erhält, und sey ferner B die Summe der Projectionen von $a, a', a''\ldots$ auf

die Ebene $y'Oz'$. Bildet man für jede dieser Flächen eine der Gleichung (6) ähnliche Gleichung und addiert alle diese Gleichungen zusammen, so hat man

$$B = A \cos\alpha + A' \cos\beta + A'' \cos\gamma.$$

Man bezeichne durch B' die Summe der Projectionen von a, a', a''... auf die Ebene $x'Oz'$. Es ist einleuchtend, dafs man den Werth von B' aus dem von B ableiten kann, indem man die auf dieser Ebene senkrecht stehende Axe Oy' statt der auf der Ebene $y'Oz'$ senkrecht stehenden Ox' substituiert, d. h. wenn man in der vorhergehenden Formel α', β', γ' statt α, β, γ setzt, woraus sich

$$B' = A \cos\alpha' + B \cos\beta' + C \cos\gamma'$$

ergiebt. Bezeichnet man ebenso durch B'' die Summe der Projectionen von a, a', a''... auf die Ebene $x'Oy'$, so kann man ihren Werth aus dem von B ableiten, indem man α'', β'', γ'' statt α, β, γ substituiert, woraus sich

$$B'' = A \cos\alpha'' + B \cos\beta'' + C \cos\gamma''$$

ergiebt. Aus diesen Werthen von B, B', B'' und mit Rücksicht auf die Gleichungen (3) und (4) findet man auch wieder

$$\left.\begin{aligned} A &= B \cos\alpha + B' \cos\alpha' + B'' \cos\alpha'' \\ A' &= B \cos\beta + B' \cos\beta' + B'' \cos\beta'' \\ A'' &= B \cos\gamma + B' \cos\gamma' + B'' \cos\gamma'' \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Diese verschiedenen Gleichungen zeigen, dafs die Projectionen ebener Flächen auf verschiedene Ebenen denselben Gesetzen folgen, wie die gerader Linien auf andere gerade Linien.

278.

Nimmt man die Summe der Quadrate der Werthe von B, B', B'', so ergiebt sich nach den Gleichungen (3) und (4)

$$B^2 + B'^2 + B''^2 = A^2 + A'^2 + A''^2 \qquad (8)$$

woraus hervorgeht, dafs sich die Summe der Quadrate dieser drei Gröfsen B, B', B'' nicht mit der Richtung der drei rechtwinkligen Ebenen der Projection, auf welche sie sich beziehen, ändert. In dem besonderen Falle, wenn alle Flächen a, a', a''... in derselben Ebene liegen, ist diese Summe nichts Anderes, als das Quadrat der ganzen Fläche $a + a' + a'' + \ldots$, und wenn man diese Ebene z. B. für die der Axen Oy und Oz nimmt, so hat man offenbar

$$A = a + a' + a'' + \ldots,\quad A' = o,\quad A'' = o.$$

Man suche nun, was dieselbe Summe in dem allgemeinen Falle wird, wenn die Flächen a, a', a''... in verschiedenen Ebenen liegen.

Die Gleichung (8) giebt

$$B = \sqrt{A^2 + A'^2 + A'^2 - B'^2 - B''^2},$$

daher ist die Summe B, welche sich, wenn man von einer Projectionsebene zur anderen übergeht, ändert, die möglich gröſste, wenn man $B' = o$, $B'' = o$ hat, und sie ist alsdann gleich

$$\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}.$$

Im allgemeinen Falle bezeichnet also die beständige Gröſse, von welcher die Rede ist, die gröſste Summe der Projectionen der ebenen Flächen, die man im Raume betrachtet, auf dieselbe Ebene.

279.

Die dieser gröſsten Projection entsprechende Ebene $y'Oz'$, hat für die Mechanik sehr wichtige Eigenschaften, die wir im Fortgange dieses Lehrbuches mittheilen werden. Ihre Lage ist durch die Gleichungen $B' = o$, $B'' = o$, welche sie charakterisieren, leicht zu bestimmen.

Die Gleichungen (7) reducieren sich nemlich alsdann auf

$$A = B \cos\alpha,\quad A' = B \cos\beta,\quad A'' = B \cos\gamma,$$

woraus man

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{A'}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{A''}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}}$$

findet. Kennt man daher die Summen A, A', A'' der Projectionen auf die drei rechtwinkligen beliebig gewählten Ebenen yOx, xOz, xOy, so kann man hieraus unmittelbar die Richtung der Ebene $y'Oz'$ der gröſsten Projection, vermittelst der drei Winkel α, β, γ, bestimmen, die sich auf die auf dieser Ebene senkrecht stehende Linie Ox' beziehen.

Was ihre absolute Lage im Raume betrifft, so ist diese offenbar unbestimmt; denn die Projectionen einer jeden der Flächen a, a', a''..., bleiben auf allen parallelen Ebenen dieselben, mithin bleibt auch die Summe dieser Projectionen dieselbe.

280.

Die Summe der Projectionen der Flächen a, a', a''... ist auf allen Ebenen, die gegen die Ebenen der gröfsten Projection gleiche Neigung haben, dieselbe. Um dies zu beweisen, nehme man die auf der Linie OD senkrecht stehende Ebene. Seyen noch immer q, q', q'' die Winkel, welche die gerade Linie OD mit den Axen Ox, Oy, Oz einschliefst, und c der Winkel $x'OD$, welcher die Neigung dieser Ebene gegen die der gröfsten Projection angiebt. Nach früher (§. 277) gefundenen Resultaten hat man

$$C = A \cos q + A' \cos q' + A'' \cos q''.$$

Substituiert man $B \cos \alpha$, $B \cos \beta$, $B \cos \gamma$ statt A, A', A'', so hat man daher

$$C = B (\cos \alpha \cos q + \cos \beta \cos q' + \cos \gamma \cos q''),$$

oder, in Folge der Formel (5), $C = B \cos c$, und wenn man statt B seinen Werth setzt,

$$C = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2} \cos c.$$

Der Werth von C ist daher für alle Ebenen, die denselben Winkel c mit der Ebene $y'Oz'$ der gröfsten Projection einschliefsen, derselbe.

Dieser Werth nimmt ab, so wie sich der Winkel c dem Werthe von 90^0 nähert; er ist für alle Ebenen, die auf $y'Oz'$ senkrecht stehen, Null.

281.

Um nun diese, auf die Projectionen der ebenen Oberflächen bezüglichen Lehrsätze, auf die Theorie der Momente anzuwenden, ist es hinreichend, anzunehmen, dafs die Flächen a, a', a''... das Doppelte der Dreiecke sind, deren gemeinschaftliche Spitze der Punkt O und deren Grundlinien die Linien sind, die, der Gröfse und Richtung nach, die Kräfte P, P', P''... vorstellen, die man vorher betrachtet hat. Ihre Momente L, M, N in Beziehung auf die Axen Oz, Oy, Ox der positiven Coordinaten ihrer Angriffspunkte (§. 274) sind

alsdann die Summen der Projectionen von a, a', a''... auf die Ebenen xOy, xOz, yOz, und es ergeben sich nun folgende Resultate aus den so eben bewiesenen Lehrsätzen:

1) Nennt man E das Moment der Kräfte P, P', P''... in Beziehung auf eine Axe, die durch den Punkt O geht und mit den Axen Ox, Oy, Oz die spitzen oder stumpfen Winkel ε, ε', ε'' einschliefst, so hat man

$$E = N\cos\varepsilon + M\cos\varepsilon' + L\cos\varepsilon''.$$

2) Unter allen Lagen, welche die Axe des Momentes E um den Punkt O haben kann, giebt es eine, für welche dieses Moment das möglichst gröfste und gleich $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$ ist. In Beziehung auf jede Axe, die durch den Punkt O geht und auf der des gröfsten Momentes senkrecht steht, ist das Moment E Null, und in Beziehung auf eine Axe, welche mit der des gröfsten Momentes den Winkel δ einschliefst, ist es gleich $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\cos\delta$.

3) Nennt man endlich α, β, γ die Winkel, welche die Axe des gröfsten Momentes, die durch den Punkt O geht, mit den Axen Ox, Oy, Oz der Momente N, M, L einschliefst, und bezeichnet man durch G die Gröfse dieses gröfsten Momentes, so hat man

$$\cos\alpha = \frac{N}{G},\quad \cos\beta = \frac{M}{G},\quad \cos\gamma = \frac{L}{G},$$

und zu gleicher Zeit

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

hieraus ergiebt sich, dafs, wenn man auf den Axen Ox, Oy, Oz, vom Punkte O ausgehend, gerade Linien nimmt, die den Momenten N, M, L proportional sind und das Parallelopipedum vollendet, dessen drei zusammenstofsende Kanten diese Linien sind, die Länge seiner Diagonale, die Gröfse des gröfsten Momentes darstellen, und diese gerade Linie die Axe dieses Hauptmomentes *) seyn wird.

Diese merkwürdigen Lehrsätze verdankt man Euler. Sie zeigen die vollkommenste Analogie zwischen der Zusammen-

*) Was ein Hauptmoment ist, wird im folgenden §. erklärt.
Anm. des Uebers.

setzung der Momente und der der Kräfte: welche Analogie daher rührt, dafs, wenn die Kräfte durch gerade Linien dargestellt werden, die Momente durch ebene Oberflächen ausgedrückt werden, die sich auf dieselbe Weise auf verschiedene Ebenen, wie Linien auf verschiedene Linien projicieren (§. 277).

282.

Sind der Punkt O und das System der Kräfte P, P', P''... gegeben, so nenne ich ihr gröfstes Moment G, das Hauptmoment dieser Kräfte. Verlegt man alle diese Kräfte parallel mit sich selbst, in den Punkt O, so haben sie eine Mittelkraft, die ich durch R bezeichne und deren nach den Axen Ox, Oy, Oz zerlegte Seitenkräfte die drei Gröfsen X, Y, Z des §. 261 sind. Die Betrachtung dieser Mittelkraft und des Hauptmomentes bietet einen sehr einfachen Ausdruck für die Resultate des vorhergehenden Kapitels dar.

Für das Gleichgewicht der an einen festen völlig freien Körper angebrachten Kräfte P, P', P''... ist es hinreichend, dafs die Mittelkraft R und das Hauptmoment G gleich Null seyen. Denn da

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad G^2 = L^2 + M^2 + N^2$$

ist, so folgen aus den Gleichungen $R = o$, $G = o$, die sechs Gleichungen des Gleichgewichtes im §. 261 von selbst.

Hieraus läfst sich der Schlufs ziehen, dafs, wenn ein System von Kräften einem anderen das Gleichgewicht halten soll, es nothwendig und hinreichend ist:

1) Dafs die Mittelkräfte R, welche bei diesen zwei Systemen statt haben, gleich und entgegengesetzt sind.

2) Dafs ihre Hauptmomente für denselben Punkt O gleich seyen, und Axen, die in entgegengesetztem Sinne gerichtet sind, entsprechen, oder von welchen eine die Verlängerung der anderen ist. Die Mittelkraft R und ihre Richtung, das Hauptmoment und die Richtung seiner Axe bleiben, bei allen Umbildungen, die man an einem System von Kräften vornehmen kann, dieselben, und dies gilt auch bei zwei Systemen gleichgeltender Kräfte.

Seyen a, b, c die Winkel, welche die Kraft R mit den Axen Ox, Oy, Oz einschliefst, so hat man

$$\cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}, \quad \cos c = \frac{Z}{R}.$$

Sey auch ω der zwischen ihrer Richtung und der Axe des Hauptmomentes enthaltene Winkel; bezeichnen α, β, γ die Winkel, welche diese Axe mit Ox, Oy, Oz einschliefst, so hat man

$$\cos \omega = \cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\cos \omega = \frac{XN + YM + ZL}{RG}.$$

Hieraus folgt also, dafs die Bedingung einer einzigen Mittelkraft, die durch die Gleichung (§. 263)

$$XN + YM + ZL = o$$

ausgedrückt ist, darin besteht, dafs die Axe des Hauptmomentes G und die Richtung der Mittelkraft R sich rechtwinklig durchschneiden. Man kann sich auch leicht von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugen, wenn man bemerkt, dafs, wenn die Kräfte P, P', P''..., in ihrer wahren Lage, eine einzige Mittelkraft haben, diese Kraft gleich R und parallel damit seyn mufs, und dafs ihr Moment, in Beziehung auf den Punkt O, auch das Hauptmoment G seyn mufs, so dafs die Axe des Hauptmomentes alsdann auf dieser, parallel mit sich selbst, nach dem Punkte O verlegten Mittelkraft senkrecht stehen mufs. Diese Betrachtung reicht aber nicht hin, um zu zeigen, dafs auch umgekehrt, wenn die vorhergehende Gleichung statt hat, auch die gegebenen Kräfte eine einzige Mittelkraft haben.

283.

Ich verlege den Punkt O in einen anderen Punkt, den ich O_1 nenne, und bezeichne durch x_1, y_1, z_1 die Coordinaten von O_1, auf die Axen Ox, Oy, Oz bezogen, und durch L_1, M_1, N_1 das, was L, M, N, rücksichtlich des Punktes O_1 wird. Die Werthe dieser neuen Gröfsen findet man aus den früheren (§. 261), wenn man dort $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ statt x, y, z setzt, und es folgt hieraus

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= L + Xy_1 - Yx_1 \\ M_1 &= M + Zx_1 - Xz_1 \\ N_1 &= N + Yz_1 - Zy_1 \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Diese Formeln zeigen, dafs, wenn P, P', P''... sich auf gleiche parallele Kräfte reducieren, die in entgegengesetztem, aber nicht direct entgegengesetztem Sinne gerichtet sind, in welchem Falle man $X=o$, $Y=o$, $Z=o$ hat, die Gröfsen L_1, M_1, N_1 von den Coordinaten des Punktes O_1 unabhängig sind, so dafs die Gröfse des Hauptmomentes und die Richtung seiner Axe sich nicht mit der Lage dieses Punktes ändern. Denn wo sich auch der Punkt O befinde, so ist immer die Axe des Hauptmomentes der zwei parallelen Kräfte, die man statt der gegebenen Kräfte P, P', P''... substituieren kann, die auf ihrer Ebene senkrecht stehende Linie, und aufserdem wissen wir (§. 48), dafs die Summe der Momente dieser zwei Kräfte, welche das Hauptmoment der gegebenen Kräfte ist, eine beständige Gröfse ist.

In jedem anderen Falle ändert sich das Hauptmoment mit den Lagen des Punktes O_1, und man kann die Frage aufwerfen, wie dieser Punkt, oder diese Punkte, wenn mehrere vorhanden sind, beschaffen seyn müssen, damit das Moment ein Minimum wird. Bezeichnet man dies allgemein durch G_1, d. h., setzt man

$$G_1^2 = L_1^2 + M_1^2 + N_1^2,$$

so hat man

$$G_1^2 = (L + Xy_1 - Yx_1)^2 + (M + Zx_1 - Xz_1)^2 + (N + Yz_1 - Zy_1)^2.$$

Setzt man seine drei partiellen Differentiale in Beziehung auf x_1, y_1, z_1 gleich Null, um seinen kleinsten Werth zu bestimmen, und bemerkt, dafs

$$R^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$

so erhält man drei Gleichungen, die man leicht unter der Form

$$R^2 x_1 = X(Xx_1 + Yy_1 + Zz_1) + YL - ZM$$
$$R^2 y_1 = Y(Xx_1 + Yy_1 + Zz_1) + ZN - XL$$
$$R^2 z_1 = Z(Xx_1 + Yy_1 + Zz_1) + XM - YN$$

schreiben kann. Addiert man diese drei Gleichungen, nachdem man sie mit X, Y, Z multipliciert hat, so findet man eine identische Gleichung. Hieraus folgt, dafs eine derselben eine Folge der beiden anderen ist, und da nur die erste Potenz der Coordinaten x_1, y_1, z_1, in denselben vorkommen, so gehören sie zu einer geraden Linie, die der Ort der Mittelpunkte der Momente ist, in Beziehung auf welche das

Hauptmoment ein Minimum ist. Man braucht daher nicht zu untersuchen, ob ein Maximum oder ein Minimum statt hat, denn es ist einleuchtend, dafs der Werth von G_1 unbestimmt mit den Veränderlichen x_1, y_1, z_1 wächst und kein Maximum haben kann.

284.

Eliminiert man die Gröfse $Xx_1 + Yy_1 + Zz_1$ aus den vorhergehenden Gleichungen, die man nach einander paarweise nimmt, so findet man

$$\left.\begin{aligned} Xy_1 - Yx_1 + L &= \frac{Z(NX + MY + LZ)}{R^2} \\ Zx_1 - Xz_1 + M &= \frac{Y(NX + MY + LZ)}{R^2} \\ Yz_1 - Zy_1 + N &= \frac{X(NX + MY + LZ)}{R^2} \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

welche Gleichungen den Projectionen des Ortes der Mittelpunkte der kleinsten Hauptmomente auf die drei Coordinatenebenen angehören.

Hieraus findet man

$$G_1 = \frac{NX + MY + LZ}{R} \qquad (c)$$

als Werth des kleinsten Hauptmomentes, welcher also für alle Mittelpunkte O derselbe ist.

Nennt man $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Winkel, welche die Axe des Momentes G_1 mit Linien einschliefst, die durch den Punkt O_1 parallel mit den Axen Ox, Oy, Oz gezogen sind, so hat man

$$\cos\alpha_1 = \frac{N_1}{G_1}, \quad \cos\beta_1 = \frac{M_1}{G_1}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{L_1}{G_1},$$

wo auch der Mittelpunkt der Momente liegt, und nach den Gleichungen (a), (b), (c) folgt hieraus insbesondere für einen Punkt O_1, welcher der durch die Gleichungen (b) bestimmten geraden Linie angehört,

$$\cos\alpha_1 = \frac{X}{R}, \quad \cos\beta_1 = \frac{Y}{R}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{Z}{R},$$

woraus hervorgeht, dafs die Axen aller kleinsten Hauptmomente, deren gemeinschaftlicher Werth durch die Formel (c)

gegeben ist, unter einander und mit der Richtung der Kraft R parallel sind.

Haben die gegebenen Kräfte eine einzige Mittelkraft, so ist es einleuchtend, dafs der kleinste Werth von G_1 statt haben mufs, wenn der Punkt O_1 auf deren Richtung genommen wird, wodurch dieser Werth gleich Null wird. Ist umgekehrt der Werth von G_1 in Beziehung auf einen Punkt O_1 Null, so findet man daraus, dafs die gegebenen Kräfte P, P', P''... eine einzige Mittelkraft haben, die durch diesen Punkt geht. Denn wenn sie sich auf zwei Kräfte reducierte, die nicht in derselben Ebene enthalten wären, so könnte man eine davon durch den Punkt O_1 gehen lassen und das Hauptmoment derselben auf das der anderen Kraft reducieren, welches nicht Null seyn würde, gegen die Voraussetzung. Hieraus findet man, dafs die nothwendige und hinreichende Bedingung, unter welcher die gegebenen Kräfte eine einzige Mittelkraft haben, darin besteht, dafs ihr Hauptmoment gleich Null seyn kann. Da alsdann dieses Moment ein Minimum ist, so wird die in Rede stehende Bedingung durch die Gleichung

$$LZ + MY + NX = o,$$

vermöge der Formel (c), ausgedrückt werden, und da der Punkt O, auf welchen es sich bezieht, dieser Mittelkraft angehört, so sind die Gleichungen der geraden Linie, nach welcher sie gerichtet ist, in Folge der Gleichungen (b),

$$Xy_1 - Yx_1 + L = o$$
$$Zx_1 - Xz_1 + M = o$$
$$Yz_1 - Zy_1 + N = o.$$

Diese Resultate fallen mit denen des §. 263 zusammen, die man durch andere Betrachtungen gefunden hat.

Drittes Kapitel.

Beispiele des Gleichgewichtes eines biegsamen Körpers.

I. Gleichgewicht des Seilpolygons.

285.

Im Allgemeinen nennt man Seilmaschine jede Verbindung von Seilen, die durch feste Knoten mit einander verbunden sind, oder nur durch Ringe gehen, die längs dieser Seile fortgleiten können. Die Anzahl der Seile, die sich in demselben Knoten vereinigen, kann beliebig grofs seyn; um aber die Frage zu vereinfachen, wollen wir annehmen, dafs nie, in einem Knoten, mehr als drei Seile vereinigt sind, und werden zuerst die beweglichen Ringe von unserer Betrachtung ausschliefsen.

Man nehme daher an, man habe ein völlig biegsames Seil von beliebiger Länge, dessen zwei Endpunkte A und B (Fig. 71) sind. Seyen M, M', M'',... verschiedene Punkte dieses Seils; man befestige an diese Punkte die Seile MC, $M'C'$, $M''C''$..., nach welchen die gegebenen Kräfte P, P', P''... wirken werden. Man bringe auch an den Punkt M eine gegebene Kraft H an, die nach der Richtung des Seils MA wirkt, und an den letzten der Punkte M, M', M''... eine andere gegebene Kraft K, die nach dem Punkt B gerichtet ist. Im Zustande des Gleichgewichtes bildet dieses Seil ein Vieleck, dessen Spitzen die Punkte A, M, M', M''...B seyn und das wir besonders ein Seilpolygon nennen werden. Man mufs daher die Bedingungen finden, welche die gegebenen Kräfte H, P, P', P''... K erfüllen müssen, damit dieses Gleichgewicht statt haben kann, und die Gestalt des Polygons bestimmen, welche diesem Zustande entspricht.

Um diese Bedingungen zu finden, gehe ich von dem einleuchtenden Grundsatze aus, dafs jedes der Seile MM', $M'M''$ u. s. w., wenn das Gleichgewicht statt hat, an seinen beiden Enden, durch gleiche Kräfte gezogen werden mufs, die nach deren Verlängerungen gerichtet sind. Denn hätten

diese beiden Kräfte nicht dieselbe Richtung wie das Seil, so würde sie Nichts abhalten, es zu drehen, und wären sie nicht gleich und entgegengesetzt, so würden sie das Seil nach seiner Richtung fortbewegen.

Hieraus folgt sogleich, dafs die Mittelkraft der beiden Kräfte H und P, die an den Punkt M angebracht sind, mit der Verlängerung MD des Seils $M'M$ zusammen fallen mufs. Man kann daher den Angriffspunkt dieser Kraft nach dem auf ihrer Richtung gelegenen Punkt M' bringen (§. 41), setzt man sie alsdann mit der Kraft P', die an diesen Punkt angebracht ist, zusammen, so mufs diese zweite Mittelkraft, welche die der drei Kräfte H, P, P' ist, mit der Verlängerung $M'D'$ des Seils $M''M'$ zusammen fallen und man darf sie daher nach dem Punkte M'' verlegen. Ich nehme ferner die Mittelkraft dieser Kraft und der Kraft P'', die in demselben Punkte M'' wirkt, so erhalte ich, auf diese Weise, die Kraft, welche das Seil $M''\,M'''$ an seinem Endpunkte M'' zieht und nach seiner Verlängerung $M''D''$ gerichtet seyn mufs. Diese Kraft ist, wie man sieht, die Mittelkraft der Kräfte H, P, P', P''; eine ähnliche Betrachtung würde zeigen, dafs die Kraft, welche dasselbe Seil am Ende M''' zieht und mit dessen Verlängerung $M'''D'''$ zusammenfallen mufs, die Mittelkraft der Kräfte P''', $P^{\text{iv}} \ldots K$ ist. Diese zwei Mittelkräfte sind daher gleich und direct entgegengesetzt, und die Mittelkraft aller gegebenen Kräfte H, P, P', $P'' \ldots K$ mufs daher gleich Null seyn. Man würde offenbar dasselbe Resultat erhalten, wenn man die Kräfte, welche auf beiden Enden jeder anderen Seite des Polygons wirken, betrachten würde.

Daher müssen die an das Seilpolygon angebrachten Kräfte so beschaffen seyn, dafs, wenn man sie alle, parallel mit sich selbst, nach demselben Punkte hin bringt, sie sich alsdann im Gleichgewichte halten, was, wie man weifs, drei Gleichungen zwischen den Gröfsen dieser Kräfte und den Winkeln, welche ihre Richtungen mit drei durch diesen Punkt gezogenen rechtwinkligen Axen machen, giebt. Diese Gleichungen sind (§. 35)

$$\left.\begin{aligned} H\cos a + K\cos e + P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + \ldots &= o \\ H\cos b + K\cos f + P\cos\beta + P'\cos\beta' + \ldots &= o \\ H\cos c + K\cos g + P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + \ldots &= o \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

wo a, e, α, α'... die Winkel bezeichnen, die sich auf die eine Axe, b, f, β, β'... diejenigen, die sich auf die andere und c, g, γ, γ'... die Winkel, die sich auf die dritte Axe beziehen, bezeichnen.

286.

Wenn die Kräfte H, P, P', P''...K und die Richtungen der Seile, durch welche sie wirken, nicht diesen Gleichungen Genüge leisten, so ist es unmöglich, dafs sie sich vermöge des Seilpolygons, im Gleichgewichte halten, welche Gestalt man auch diesem geben mag. So oft aber diese Gleichungen erfüllt sind, so kann man dem Vielecke eine solche Gestalt geben, dafs das Gleichgewicht statt hat. Da die Gröfsen und Richtungen der Kräfte H, P, P', P''...K gegeben sind, so ist diese Gestalt bestimmt und ihre Construction folgt aus der Reihe von Zusammensetzungen der Kräfte, welche eben angegeben worden sind.

Kennt man nemlich die Richtungen der Seile MA und MC, an welchen die Kräfte H und P wirken, so bestimmt man die Gröfse und Richtung ihrer Mittelkraft. Auf die Verlängerung dieser Richtung trägt man, vom Punkte M aus, die gegebene Länge der Seite MM'. Alsdann bringt man an den Punkt M' die Mittelkraft von H und P nach der Richtung $M'M$ und die Kraft P' nach der gegebenen Richtung des Seils $M'C'$ an. Ich nehme die Mittelkraft dieser zwei Kräfte und trage auf die Verlängerung ihrer Richtung, vom Punkte M' aus, die gegebene Länge der Seite $M'M''$. Jetzt mache ich am Punkte M'' eine ähnliche Construction, wie die so eben für den Punkt M angegebene, bringe an M'' die letztere Mittelkraft auf der Seite $M''M'$ an, und ferner die Kraft P'' nach der gegebenen Richtung des Seils $M''C''$, setze alsdann diese zwei Kräfte in eine einzige zusammen und trage auf die Verlängerung derselben die gegebene Länge der Seite $M''M'$.

Dies setze ich fort, bis ich an den letzten Knoten M, M', M''... komme, der z. B. der Punkt M^{iv} seyn soll, so dafs $M^{iv}B$ die letzte Seite des Polygons ist. Ihre Richtung ist bekannt, weil sie die der äufsersten Kraft K ist, die nach der Voraussetzung gegeben ist. Die verlängerte Richtung der Mittelkraft der beiden Kräfte, die an den Punkt M^{iv}, nach

der Seite $M'''M^{iv}$ und dem Seile $M^{iv}C^{iv}$ angebracht sind, mufs mit der gegebenen Richtung der Seite $M^{iv}B$ zusammen fallen. Dies wird auch wirklich immer eintreffen. Denn, nach unserer Construction, ist die nach $M^{iv}M'''$ gerichtete Kraft nichts Anderes, als die Mittelkraft der fünf Kräfte H, P, P', P'', P''', die parallel mit ihren Richtungen nach dem Punkte M^{iv} versetzt sind. Setzt man diese Kraft mit der nach $M^{iv}C^{iv}$ gerichteten Kraft P^{iv} zusammen, so hat man die Mittelkraft aller gegebenen Kräfte weniger der Kraft K; oder, in Folge der Gleichungen (a), denen Genüge geleistet seyn soll, ist diese Mittelkraft der Kraft K gleich und ihr direct entgegengesetzt (§. 35).

Zieht man durch den Punkt A die drei Axen, auf welche sich die Winkel a, e, α, α' u. s. w., b, f, β, β' u. s. w., c, g, γ, γ' u. s. w. beziehen, so sind die Coordinaten einer jeden der Spitzen des Vielecks, auf diese Axen bezogen, die Projectionen des Theils des Vierecks, welcher zwischen dem Punkte A und dieser Spitze enthalten ist, auf diese Axen. Man könnte sie als Functionen dieser Winkel, der Längen der Seiten des Vielecks und der gegebenen Kräfte berechnen; die allgemeinen Formeln, die man auf diese Weise erhalten würde, könnten in jedem Falle dazu dienen, alle Spitzen des Polygons, oder nur einen oder mehrere dieser Punkte direct zu construieren. Es ist aber einfacher, allmälich die verschiedenen Seiten des Vielecks aus einander zu bestimmen, wie dies vorhin angedeutet worden ist.

287.

Erfüllen die gegebenen Kräfte die durch die Gleichung (a) ausgedrückten Bedingungen, und hat man das Polygon die Gestalt annehmen lassen, die für das Gleichgewicht pafst, so ist die gemeinschaftliche Intensität der zwei gleichen und entgegengesetzten Kräfte, die jede der Seiten nach ihrer Verlängerung ziehen, die Spannung, die dieses Seil erleidet. Es ist daher in der Ausübung wichtig, diese Spannung zu berechnen, und sich durch die Erfahrung zu versichern, dafs sie nicht diejenige überschreitet, welche ein Seil von demselben Durchmesser und demselben Stoffe ertragen kann, ohne zu reifsen.

Nach dem Vorhergehenden ändert sich diese Spannung von einer Seite des Vielecks zur anderen; die Spannung der Seite MM' ist die Mittelkraft der Kräfte H und P, oder der der Kräfte P', P'', P'''... K gleich. Die Spannung der Seite $M'M''$ ist der Mittelkraft der Kräfte H, P, P' oder der der Kräfte P'', P'''... K gleich u. s. w. Es ist daher, in jedem besonderen Falle, leicht, die Spannungen zu bestimmen, die alle Seiten des im Gleichgewichte befindlichen Vielecks erleiden, wenn die Gröfsen und Richtungen der Kräfte H, P, P', P''... K alle gegeben sind.

Sind die äufsersten Punkte A und B des Vielecks unbeweglich, so geben die Kräfte H und K zu gleicher Zeit die Spannungen der Seile, die in diesen Punkten zusammentreffen, und die Drucke, welche diese Punkte erleiden, an. In diesem Falle sind die Werthe von H und K und die Winkel a, b, c, e, f, g, welche die Richtungen der beiden äufsersten Seiten des Vielecks bestimmen, nicht mehr gegeben. Man hat aber acht Gleichungen, um diese acht Unbekannten zu bestimmen, nemlich die Gleichungen (a), die Gleichungen (§. 6)

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$$
$$\cos^2 e + \cos^2 f + \cos^2 g = 1$$

und die drei Gleichungen, welche sich daraus ergeben, dafs die Lage der zwei festen Punkte A und B gegeben ist. Man bildet diese, indem man die Werthe der drei Coordinaten eines dieser Punkte, die auf die durch den anderen Punkt gehenden Axen bezogen sind, d. h. die Projectionen des ganzen Polygons auf diese drei Axen, berechnet, und sie den gegebenen Werthen dieser Coordinaten gleich setzt.

Im Allgemeinen ist die Bestimmung dieser acht Unbekannten sehr verwickelt; hat aber das Seilpolygon von selbst die dem Gleichgewichte der an seine Spitzen angebrachten Kräfte zugehörende Form angenommen, so erhält man die Spannungen seiner verschiedenen Seiten ohne Schwierigkeit, was für die Ausübung hinreichend ist. Zerlegt man z. B. die an den Punkt M angebrachte Kraft P in zwei andere Kräfte, die nach den Verlängerungen der Seiten AM und MM' gerichtet sind, so sind die Seitenkräfte, die unmittelbar durch die Regel des Parallelogramms der Kräfte gegeben sind, die

Spannungen dieser zwei Seiten. Diejenige, die nach der Verlängerung von AM wirkt, mufs der Kraft gleich seyn, welche nach dieser ersten Seite wirkt, wenn der Punkt A frei ist, und ist er fest, so giebt er den Druck an, der auf diesen Punkt ausgeübt wird. Ebenso drücken die nach den Verlängerungen von MM' und $M'M''$ gerichteten Seitenkräfte die Spannung von MM' aus, die schon durch die Zerlegung von P bekannt ist, und die der anliegenden Seite $M'M''$ u. s. w.

288.

Die Seile, welche die verschiedenen Seiten eines Seilpolygons bilden, sind immer ein wenig ausdehnbar. Jedes derselben verlängert sich um eine kleine Gröfse, im Verhältnisse der Spannung, die es im Zustande des Gleichgewichtes erleidet, und wenn diese Spannung bekannt ist, so kann man die entsprechende Verlängerung berechnen.

Die Erfahrung zeigt nemlich, dafs, so lange die Spannung eines gleichartigen und überall gleich dicken Fadens sich nicht der Kraft nähert, die erforderlich ist, um ihn zu zerreifsen, seine Verlängerung seiner Länge und der Spannung, die er erleidet, proportional ist. Aufserdem ändert sie sich von einem Faden zum anderen, mit der Dicke und dem Stoffe des Fadens. Hiernach nehme ich an, dafs man einen Faden, der dieselbe Dicke, wie das Seil AM hat und aus demselben Stoffe besteht, an einen festen Punkt anbringt und an sein unteres Ende ein im Verhältnisse zu dem Gewichte des Fadens sehr grofses gegebenes Gewicht Π aufhängt. Seyen l und $l(1+\omega)$ seine Längen vor und nach der Aufhängung des Gewichtes Π, diese Gröfse ω ist ein sehr kleiner Bruch, der nicht von l abhängt und Π proportional ist, wenn man das Gewicht des Fadens vernachlässigt, so dafs, wenn, bei einem anderen Versuche, die drei Gröfsen l, ω, Π in l', ω', Π' übergehen, man

$$\omega' = \frac{\omega \Pi'}{\Pi}$$

hat, wie auch l und l' beschaffen seyen. Es ist aber klar, dafs ein Faden, der an einen festen Punkt angebracht ist, und an seinem anderen Ende durch eine Kraft gezogen wird, die nach seiner Verlängerung gerichtet ist, sich in demselben

Zustande befindet, als wenn er durch dieselbe Kraft nach seinen zwei Verlängerungen gezogen würde. Nennt man T die Spannung des Seils AM, und setzt voraus, daſs es sich in dem Verhältnisse von $1 + \tau$ zu 1 verlängert hat, so hat man

$$\tau = \frac{\omega T}{\Pi},$$

um diese Verlängerung zu bestimmen, und ebenso wird es bei allen Seilen des Vielecks seyn.

289.

Mögen nun die äuſsersten Punkte A und B des Vielecks fest oder beweglich seyn, so führt der Umstand, wenn einer oder mehrere der Knoten M, M', M''... durch Ringe ersetzt sind, zu neuen Bedingungsgleichungen. Man nehme z. B. an, M'' sey ein beweglicher Ring, der längs des Seils $M'M''M'''$ gleiten kann, so ist es offenbar, daſs die Summe der Abstände $M'M''$, $M''M'''$ des Punktes M'' von den Punkten M' und M''', constant bleibt. Ist aber Gleichgewicht vorhanden, so wird dieser Zustand nicht gestört werden, wenn man diese zwei letzteren Punkte befestigt; alsdann wird aber der Punkt M'' in demselben Falle seyn, als wenn er gezwungen wäre, auf der Oberfläche eines Revolutionsellipsoids zu bleiben, dessen beide Brennpunkte M' und M'' sind und dessen groſse Axe der gegebenen Länge des Seils $M'M''M'''$ gleich ist. Daher kann dieser Punkt nicht im Gleichgewichte bleiben (§. 36), wenn nicht die an ihn angebrachte Kraft P'' auf dieser Oberfläche senkrecht steht. Hieraus folgt, nach einer bekannten Eigenschaft der Ellipse, daſs die Richtung dieser Kraft den Winkel, welchen die zwei Radius Vector $M''M'$ und $M''M'''$ bilden, in zwei gleiche Theile theilen muſs.

Ist man daher, wenn man die Construction des §. 286 ausführt, an einen beweglichen Ring wie M'' gekommen, und hat man die Mittelkraft der beiden Kräfte genommen, die nach $M''M'$ und $M''C''$ gerichtet sind, deren Verlängerung die Seite $M''M'''$ ist, so kann kein Gleichgewicht vorhanden seyn, sobald man findet, daſs die Winkel $C''M''M'$ und $C''M''M'''$ nicht einander gleich sind. Im Allgemeinen darf die Richtung des an einen beweglichen Ring angebrachten

Seils $M''C''$ nicht im Voraus gegeben seyn, damit man, wenn man dieselbe auf eine passende Weise bestimmt, die Bedingung der Gleichheit der zwei Winkel $M'M''C''$ und $M'''M''C''$ erfüllen kann.

Man bemerke, dafs, im Zustande des Gleichgewichtes, die Spannungen der zwei an einem beweglichen Ringe anliegenden Seiten gleich sind. Dies folgt daraus, dafs diese zwei Seiten mit der Richtung der an diesen Ring angebrachten Kraft gleiche Winkel machen und dafs ihre Spannungen die nach ihren Richtungen wirkenden Seitenkräfte dieser Kraft sind. Diese Gleichheit der Spannungen ist aber auch ohnehin schon einleuchtend, da die beiden Seiten, auf welchen der Ring gleiten kann, nur ein Seil bilden, das nothwendig in seiner ganzen Ausdehnung dieselbe Spannung erleiden mufs.

290.

Was wir in Beziehung auf einen Ring sagen, der längs eines, als unausdehnbar und völlig biegsam, angenommenen Ringes gleiten kann, läfst sich auf alle Punkte eines Systems von materiellen Punkten, die im Gleichgewichte sind, ausdehnen. Wie auch die Verbindung dieser Punkte beschaffen sey, so wird man dieses Gleichgewicht nicht stören, wenn man alle Punkte des Systems, einen ausgenommen, befestigt. Ist aber die Verbindung dieses Punktes mit den anderen der Art, dafs er noch eine Oberfläche oder nur eine krumme Linie um diese festen Punkte beschreiben mufs, so wird sich der bewegliche Punkt offenbar in demselben Falle befinden, als wenn die Oberfläche oder krumme Linie wirklich vorhanden wäre. Die Richtung der an ihn angebrachten Kraft mufs daher auf dieser Oberfläche oder krummen Linie senkrecht stehen.

Hieraus folgt, dafs bei jedem Systeme materieller Punkte, die im Gleichgewichte sind, die Kraft, die an jeden dieser Punkte angebracht ist, auf der Oberfläche oder der Linie, auf welcher dieser Punkt bleiben mufs, senkrecht steht, wenn man alle Punkte, mit welchen er verbunden ist, für einen Augenblick, als feste Punkte ansieht.

Ist diese Bedingung, in Beziehung auf die Richtung der Kräfte und die Verbindung der Theile des Systems, nicht er-

füllt, so kann man sicher annehmen, daſs das Gleichgewicht nicht vorhanden ist; jedoch ist sie allein nicht hinreichend, um das Vorhandenseyn des Gleichgewichtes anzugeben.

291.

Wenn alle Kräfte, die auf ein an den zwei festen Punkten A und B aufgehängtes Seilpolygon wirken, gegebene Kräfte sind, so folgt aus der Construction des §. 286, daſs dieses ganze Polygon in der verticalen Ebene enthalten ist, die durch diese zwei Punkte geht; dies ist auſserdem auch an und für sich klar, da kein Grund vorhanden ist, warum es sich mehr nach der einen als nach der anderen Seite von dieser Ebene entfernen sollte. Nimmt man alsdann die auf dieser Ebene senkrecht stehende Linie für die Axe, welcher $c, g, \gamma, \gamma' \ldots$ entsprechen, so sind alle Winkel rechte und die dritte Gleichung (a) verschwindet. Die beiden anderen reducieren sich auf

$$\left.\begin{aligned} H \cos a + K \cos e &= o \\ H \cos b + K \cos f + \Pi &= o \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

wenn man annimmt, daſs die Winkel $a, e, \alpha, \alpha' \ldots$ einer horizontalen Axe und die Winkel $b, f, \beta, \beta' \ldots$ einer im Sinne der Schwere gerichteten Axe entsprechen, und durch Π die Summe der Gewichte $P, P', P'' \ldots$, die an das Polygon angebracht sind, bezeichnet.

Das Gleichgewicht dieses Polygons wird nicht gestört, wenn man seine Gestalt unveränderlich macht; die Kraft Π muſs daher der Mittelkraft der Kräfte H und K gleich und direct entgegengesetzt seyn. In Folge der Gleichungen (b) ist sie schon dieser Mittelkraft gleich und entgegengesetzt; sie muſs daher noch durch den Punkt O (Fig. 72) gehen; wo sich die Verlängerungen der äuſsersten Seile AM und BN schneiden und welchen man für den gemeinschaftlichen Angriffspunkt der beiden Kräfte H und K nehmen kann. Im Zustande des Gleichgewichtes muſs daher die Mittelkraft Π der verticalen Kräfte $P, P', P'' \ldots$ nach der verticalen Linie OD gerichtet seyn und man hat hiernach die Proportionen (§. 29)

$$H : \Pi = \sin BOD : \sin AOB$$
$$K : \Pi = \sin AOD : \sin AOB,$$

welche die Spannungen der äufsersten Seile oder die Drucke H und K, die auf die beiden festen Punkte A und B ausgeübt werden, angeben, wenn man die Winkel AOD und BOD gemessen hat.

292.

Man kann in Beziehung auf die Seile, die ein gegebenes Gewicht tragen, dieselbe Bemerkung machen, die man schon in Beziehung auf die Drucke gemacht hat, welche die Stützpunkte einer horizontalen Ebene erleiden, auf welcher ein Gewicht ruht (§. 270).

Man nehme an, die drei an die festen Punkte A, B, C (Fig. 73) angebrachten Seile vereinigten sich im Punkte M, und es sey in diesem Punkte ein Gewicht P aufgehängt, welches nach der Verticalen MD wirkt. Man nehme auf der Verlängerung dieser geraden Linie einen Punkt D', und construiere das Parallelopipedum, dessen Diagonale MD' ist und dessen drei zusammenstofsende Seiten MA', MB', MC' auf den Richtungen dieser drei Seile liegen. Bezeichnet man die Kraft P durch die gerade Linie MD', so werden ihre nach diesen Richtungen wirkenden Seitenkräfte durch die Linien MA', MB', MC' dargestellt und sie drücken die Spannungen der drei Seile MA, MB, MC, oder die Lasten der drei festen Punkte A, B, C aus, welche, in diesem Falle, vollkommen bestimmt sind. Treffen aber vier oder mehr Seile im Punkte M zusammen, so kann man die Kraft P auf unendlich viele Arten nach ihren Richtungen zerlegen, so dafs ihre Spannungen und die Lasten der festen Punkte nicht mehr bestimmt sind, und eine oder mehrere derselben Null seyn oder willkührlich angenommen werden können. Diese Unbestimmtheit würde wirklich bei der abstracten Frage statt finden, wo man die Dehnbarkeit der Seile unbeachtet läfst. Sobald man aber diese Eigenschaft der Materie berücksichtigt, so verschwindet sie, und alsdann verlängern sich alle Seile um eine, wenn auch noch so unbedeutende, Gröfse; ihre Ausdehnungen hängen von ihrer Zahl und wechselseitigen Lage ab, und wenn man diese kleinen Verlängerungen messen würde, so könnte man daraus die Spannung eines jeden Seils oder die Last eines jeden festen Punktes, die wirklich statt

hat, finden. Nimmt man z. B. an, es habe sich das Seil AM in dem Verhältnisse von $1 + \delta$ zur Einheit ausgedehnt, und weiſs man auſserdem, daſs ein Seil, welches aus demselben Stoffe besteht und denselben Durchmesser hat, sich in dem Verhältnisse von $1 + \omega$ zur Einheit ausdehnt, wenn man es vertical an einem festen Punkte aufhängt und an sein unteres Ende das Gewicht P anbringt, so findet man hieraus (§. 288), daſs die Spannung dieses Seils, oder die Last, welche der Punkt A trägt, dem Produkte $\frac{\delta}{\omega} P$ gleich ist.

Bezeichnet man durch ω' und δ', ω'' und δ'' u. s. w. das, was die Brüche ω und δ in Beziehung auf die Seile MB, MC u. s. w. werden, und durch γ, γ', γ'' u. s. w. die spitzen Winkel, welche die Seile MA, MB, MC u. s. w. mit der Verticalen MD' machen, so muſs man

$$\frac{d}{\omega} \cos \gamma + \frac{\delta'}{\omega'} \cos \gamma' + \frac{\delta''}{\omega''} \cos \gamma'' + \ldots = 1$$

haben, damit die Summe der verticalen Seitenkräfte aller Spannungen dem Gewichte P gleich ist. Projiciert man dieselben Seile auf eine durch den Punkt M gezogene horizontale Ebene und bezeichnet durch φ, φ', φ'' u. s. w. die Winkel, welche die Projectionen von MA, MB, MC u. s. w. mit der geraden Linie MO machen, die willkührlich in dieser Ebene gezogen ist, so hat man auch

$$\frac{\delta}{\omega} \sin \gamma \sin \varphi + \frac{\delta'}{\omega'} \sin \gamma' \sin \varphi' + \ldots = o$$

$$\frac{\delta}{\omega} \sin \gamma \cos \varphi + \frac{\delta'}{\omega'} \sin \gamma' \cos \varphi' + \ldots = o,$$

um auszudrücken, daſs die Mittelkraft aller Spannungen eine verticale Kraft ist.

Sind nur drei Seile vorhanden, so sind diese drei Gleichungen hinreichend, um die Verhältnisse ihrer Spannungen zum Gewichte P, oder die Werthe von $\frac{\delta}{\omega}$, $\frac{\delta'}{\omega'}$, $\frac{\delta''}{\omega''}$ vermittelst der Winkel, welche diese drei Seile mit der Verticalen MD' einschlieſsen, und der Winkel, welche zwischen den Ebenen dieser Linie und ihren Richtungen enthalten sind, zu bestimmen. Sind nur zwei Seile da, so sind ihre Richtungen

und diese Verticale in derselben Ebene enthalten, wodurch die zwei letzten Gleichungen auf eine einzige reduciert werden.

II. Gleichgewicht eines biegsamen Fadens.

293.

Man betrachte zuerst einen schweren gleichartigen Faden von überall gleicher Dicke, nehme an, er sey völlig biegsam und in seinen Endpunkten A und C (Fig. 74) an zwei feste Punkte geknüpft. Man will nun die krumme Linie ABC bestimmen, die er im Zustande des Gleichgewichtes bildet. Diese krumme Linie nennt man Kettenlinie, sie ist offenbar in der verticalen Ebene, die durch die festen Punkte A und C geht, enthalten, denn es ist durchaus kein Grund vorhanden, warum sie sich mehr nach der einen als nach der anderen Seite davon entfernen sollte.

Durch einen Punkt O ziehe man in dieser Ebene zwei rechtwinklige Axen Ox und Oy, welche die der positiven Coordinaten seyn werden. Man nehme an, Ox sey horizontal und liege auf der Seite von A, und Oy sey vertical und der Richtung der Schwere entgegengesetzt und gehe durch den tiefsten Punkt B der krummen Linie. Seyen x und y die auf diese zwei Axen bezogenen Coordinaten OP und PM eines beliebigen Punktes M der Kettenlinie, und s der Bogen BM, der bis zu diesem Punkte reicht und vom Punkte B aus gezählt wird. Man bezeichne durch x', y', s' das, was x, y, s in Beziehung auf einen anderen Punkt M' dieser krummen Linie werden, so dafs $s' > s$ ist.

Nennt man p das Gewicht der Länge der Einheit des Fadens, wenn er auf einer horizontalen Ebene liegt, so ist $p\,(s' - s)$, in diesem Zustande, das Gewicht einer Länge $s' - s$ desselben Fadens, weil man ihn gleichartig und überall gleich dick angenommen hat. Ist er an zwei Punkten A und C aufgehängt, so werden sich seine verschiedenen Theile, wegen ihrer verschiedenen Spannungen, auf ungleiche Weise ausdehnen, und zu gleicher Zeit werden ihre Dichtigkeiten oder Dicken so abnehmen, dafs ihre Massen dieselben bleiben. Das Gewicht einer solchen Länge $s' - s$ wird daher nicht

mehr genau dasselbe, wie früher, seyn; ist aber der Stoff, aus welchem der Faden besteht, nur wenig ausdehnbar und vernachlässigt man die kleinen Ausdehnungen seiner Theile, so kann man noch immer $p\ (s' - s)$ für das entsprechende Gewicht des Bogens MM' der Kettenlinie nehmen.

Seyen aufserdem T und T' die unbekannten Kräfte, welche auf die Endpunkte M und M' wirken, und daher rühren, dafs die Punkte mit den Theilen CM und AM' dieser krummen Linie verbunden sind. Vereinigt man diese Kräfte mit dem Gewichte $p\ (s' - s)$, so kann man MM' als völlig frei betrachten. Bezeichnet man daher durch α und β die Winkel, welche die Richtung der Kraft T mit den Verlängerungen der Coordinaten x und y ihres Angriffspunktes macht und durch α', β' die analogen Winkel in Beziehung auf die Kraft T', so hat man

$$\left.\begin{aligned} T\cos\alpha + T'\cos\alpha' &= o \\ T\cos\beta + T'\cos\beta' &= p\,(s' - s) \\ T(x\cos\beta - y\cos\alpha) + T'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') &= p\,(s' - s)\,x_1 \end{aligned}\right\}\ (a)$$

für das Gleichgewicht dieser drei Kräfte, die in derselben Ebene enthalten sind (§. 262), wo x_1 die horizontale Abscisse des Schwerpunktes des Bogens MM' ist. Diese Gleichungen gelten für jede Länge dieses Bogens. Nimmt man daher an, dafs dieser unendlich klein ist, so kann man, in diesen Gleichungen, die unendlich kleinen Gröfsen der zweiten Ordnung vernachlässigen, die der ersten Ordnung mufs man aber beibehalten. Demungeachtet mufs man doch die Kraft T als am Endpunkte M nach dem Theile MH der Tangente wirkend betrachten, und die Kraft T' als nach dem Theile $M'H'$ der Tangente am anderen Endpunkte M' wirkend.

Um dies zu zeigen, nehme man auf MM' einen Punkt m, so dafs der Bogen Mm ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung ist; man kann also das Gewicht dieses Theils der Kettenlinie vernachlässigen. Befestigt man den Punkt m, so wird hierdurch das Gleichgewicht nicht gestört; da man sich aber den Faden als vollkommen biegsam denkt, so würde Nichts die Kraft P abhalten, den Bogen Mm um m zu drehen, wenn sie nicht nach seiner Verlängerung MH gerichtet wäre. Ebenso sieht man, dafs die Kraft T' nach $M'H'$ gerichtet seyn mufs.

Hiernach hat man

$$\cos\alpha = -\frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = -\frac{dy}{ds}$$

$$\cos\alpha' = \frac{dx'}{ds'}, \quad \cos\beta' = \frac{dy'}{ds'}$$

und wenn man die unendlich kleinen Gröſsen der zweiten Ordnung vernachlässigt, so sind diese letzteren Werthe

$$\cos\alpha' = \frac{dx}{ds} + d.\frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta' = \frac{dy}{ds} + d.\frac{dy}{ds}.$$

Man kann auch beweisen, daſs $T' = T + dT$ ist. Die Gröſse T ist nemlich eine Function der Coordinaten eines Punktes M, dem sie entspricht, und wird daher im Punkte M' gleich $T + dT$. In diesem letzteren Punkte drückt sie die Kraft aus, welche auf den oberen Theil AM' der Kettenlinie nach der Richtung $M'H_1$, welche die Verlängerung von $H'M'$ ist, wirkt. Ist aber m' ein Punkt der krummen Linie, dessen Abstand von M' ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung ist, so wird die Kraft, die in m' auf den Theil Am' wirkt, der Gröſse und Richtung nach mit derjenigen übereinstimmen, welche in M' auf AM' wirkt. Der Theil $M'm'$ der Kettenlinie wird daher in entgegengesetztem Sinne, nach $M'H'$ und $m'H_1$, durch die Kräfte T' und $T + dT$ getrieben, welche gleich seyn müssen, damit $M'm'$ im Gleichgewichte bleibt.

Dies vorausgesetzt, substituiere ich diese verschiedenen Werthe in die zwei ersten Gleichungen (a) und mache $s' - s = ds$, dies giebt

$$d.T\frac{dx}{ds} = o, \quad d.T\frac{dy}{ds} = pds. \qquad (b)$$

Die dritte Gleichung nimmt die Gestalt

$$d.T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = pxds$$

an, wenn man die unendlich kleinen Gröſsen der zweiten Ordnung vernachlässigt, weil es alsdann erlaubt ist, x statt x_1 im zweiten Theile zu setzen. Diese Gleichung ist aber dasselbe wie

$$x\,d.T\frac{dy}{ds} - yd.T\frac{dx}{ds} = pxds,$$

und sie ist, wie man sieht, eine Folge der zwei anderen

Wirklich kann auch die Aufgabe nur von zwei Gleichungen abhängen, da man nur zwei Unbekannte y und T als Functionen von x zu bestimmen hat. Die erste braucht man, um die Gleichung der krummen Linie zu bestimmen, und die zweite, um die Spannung in einem beliebigen Punkte M, d. h. die Gröſse der gleichen Kräfte, die das Element Mm nach seinen zwei Verlängerungen ziehen, zu erfahren.

294.

Das Integral der ersten Gleichung (b) ist

$$T\frac{dx}{ds} = c,$$

wenn man durch c die willkührliche Constante bezeichnet. Im Punkte B hat man $\frac{dx}{ds} = 1$ und $T = c$; bezeichnet man daher die Spannung in diesem tiefsten Punkte durch das Gewicht einer Länge h des Fadens, so hat man $c = ph$, und in einem beliebigen Punkte

$$T = ph\frac{ds}{dx}.$$

Die zweite Gleichung (b) wird also

$$hd.\frac{dy}{dx} = ds,$$

woraus man

$$s = h\frac{dy}{dx}$$

findet, indem man bemerkt, daſs man zu gleicher Zeit $s = o$ und $\frac{dy}{dx} = o$ im Punkte B hat. Aus diesen Gleichungen findet man unmittelbar den Bogen s und die Spannung T, wenn die Ordinate y als Function von x bestimmt ist.

Setzt man, in der vorhergehenden Gleichung, statt ds seinen Werth

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

so findet man daraus

$$dx = \frac{hd.\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}.$$

Integriert man, und bemerkt, dafs man, im Punkte B, $x = o$ und $\frac{dy}{dx} = o$ hat, so findet man hieraus

$$x = h \log\left(\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\right),$$

und daher

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = e^{\frac{x}{h}},$$

wo e, wie gewöhnlich, die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Ich multipliciere diese Gleichung durch

$$\left(\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} - \frac{dy}{dx}\right) e^{-\frac{x}{h}},$$

woraus

$$e^{-\frac{x}{h}} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} - \frac{dy}{dx}$$

folgt. Man hat daher

$$ds = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) dx$$

$$dy = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) dx,$$

woraus man

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) \\ y &= \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) \end{aligned}\right\} {}^{*)} \qquad (c)$$

findet, wenn man bemerkt, dafs, im Punkte B, $s = o$ und $x = o$ ist, und man den Anfangspunkt O der Coordinaten in den Abstand h unterhalb dieses Punktes setzt, so dafs $y = h$ ist, wenn $x = o$ ist.

---

*) Statt dieser Formeln könnte man auch, nach den bekannten Werthen von sin. und cos.,

$$s = h\sqrt{-1}\,\sin\frac{x}{h\sqrt{-1}}$$

$$y = h\cos\frac{x}{h\sqrt{-1}}$$

schreiben, die in der Anwendung noch bequemer sind.

Anmerk. des Uebers.

Diese Gleichungen (c) geben $s = h\,\frac{dy}{dx}$, wie oben; die zweite ist die Gleichung der Kettenlinie unter der einfachsten Form, sie zeigt, dafs diese krumme Linie auf beiden Seiten ihres tiefsten Punktes symmetrisch ist.

Der vorhergehende Werth von T wird

$$T = ph\,\frac{ds}{dx} = py,$$

so dafs die Spannung in irgend einem Punkte M durch das Gewicht einer Länge des Fadens ausgedrückt wird, die der von diesem Punkte auf die, durch den Punkt O gehende, horizontale Linie herabgefällten Senkrechten MP gleich ist. Im Punkte B ist diese Spannung am kleinsten und ihr Werth ist dort, wie angenommen wurde, gleich ph.

295.

Man mufs daher nur noch die Constante h bestimmen, die in diesen Formeln vorkommt. Der Werth von y giebt alsdann die Gestalt der Kettenlinie an; damit aber ihre Lage in der verticalen Ebene, die durch die Punkte A und C geht, bekannt sey, mufs man auch den Abstand der Axe Oy von einem dieser festen Punkte bestimmen.

Zu diesem Zwecke ziehe ich durch den Punkt A eine horizontale Linie, welche die Axe Oy im Punkte Q schneidet, und durch den Punkt C eine Verticale, die diese horizontale Linie im Punkte D schneidet. Da die Lage des Punktes C in Beziehung auf den Punkt A bekannt ist, so sind die Abstände AD und DC gegeben. Ich bezeichne sie durch a und b, und durch k den Abstand AQ, so dafs man

$$AD = a, \quad DC = b, \quad AQ = k, \quad OB = h$$

hat, wo a und b gegebene Gröfsen und k und h die beiden Unbekannten sind, die man bestimmen mufs.

Ich nenne k' den Abstand QD, l die gegebene Länge der krummen Linie ABC, g und g' ihre Theile AB und BC, f die Linie BQ, alsdann hat man

$$k + k' = a, \quad g + g' = l,$$

indem man k' und g' als positive oder negative Gröfsen ansieht, je nachdem der Punkt C der Verlängerung von AB oder AB selbst angehört. Die Ordinaten der Punkte A und C

sind $h + f$ und $h + f - b$, indem man auch die Gröfse b als positiv oder negativ ansieht, je nachdem C unter oder über der horizontalen Linie liegt, die durch den Punkt A gezogen ist.

Setzt man zuerst in den Gleichungen (c)

$$x = k, \quad s = g, \quad y = h + f,$$

und alsdann

$$x = -k', \quad s = -g', \quad y = h + f - b,$$

so folgt hieraus

$$g = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}} - e^{-\frac{k}{h}}\right), \; h + f = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}} + e^{-\frac{k}{h}}\right)$$

$$g' = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k'}{h}} - e^{-\frac{k'}{h}}\right), \; h + f - b = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k'}{h}} + e^{-\frac{k'}{h}}\right),$$

woraus man

$$l = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}} - e^{-\frac{k}{h}} + e^{\frac{k'}{h}} - e^{-\frac{k'}{h}}\right)$$

$$b = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}} + e^{-\frac{k}{h}} - e^{\frac{k'}{h}} - e^{-\frac{k'}{h}}\right)$$

erhält.

Hieraus und aus $k + k' = a$ findet man

$$l^2 - b^2 = h^2\left(e^{\frac{a}{h}} + e^{-\frac{a}{h}} - 2\right),$$

und daher

$$\frac{1}{2\alpha}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right) = n, \qquad (d)$$

indem man, zur Abkürzung,

$$\frac{a}{2h} = \alpha, \quad \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{a^2}} = n$$

setzt.

Diese Gröfse n ist aus gegebenen Gröfsen zusammengesetzt und die Gleichung (d) giebt daher den Werth von α und mithin auch den von h an. Im Allgemeinen kann diese Gleichung durch Versuche aufgelöfst werden, und man findet daraus vermittelst des Werthes von n den von α so genau als man will. Ist n nur wenig von der Einheit verschieden, so ist der Werth von α sehr klein, entwickelt man alsdann die Exponentialgröfsen und vernachlässigt die vierten Potenzen von α, so hat man einfach $\alpha^2 = 6\,(n - 1)$.

Setzen wir auch

$$\frac{k - k'}{h} = 2\beta,$$

so hat man

$$k = \tfrac{1}{2}a + h\beta, \quad k' = \tfrac{1}{2}a - h\beta,$$

und der vorhergehende Werth von b wird

$$b = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{a}{2h}} - e^{-\frac{a}{2h}}\right)\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right) \qquad (e)$$

wodurch man den Werth von β, vermöge des Werthes von h, und somit auch den der Gröfsen k und k' erfährt. Das Zeichen von k' entscheidet, auf welcher Seite von Oy der Punkt C liegen wird.

Der einfachste Fall findet dann statt, wenn die festen Punkte A und C auf derselben horizontalen Linie liegen. Alsdann hat man $b = o$; die Gleichung (e) giebt $\beta = o$ und daher $k = k' = \frac{1}{2}a$, wie dies auch seyn mufs. Zu gleicher Zeit hat man

$$h + f = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{a}{2h}} + e^{-\frac{a}{2h}}\right),$$

woraus man die Spannungen in den Punkten A und C, oder die Lasten, welche diese festen Punkte zu tragen haben, findet, nachdem man den Werth von h berechnet hat. In dem allgemeinen Falle kann man diese äufsersten Spannungen aus den Werthen von y ableiten, die $x = k$ und $x = -k'$ entsprechen.

296.

Unter allen gleich langen krummen Linien, die sich in den gegebenen krummen Linien A und C endigen, ist die Kettenlinie diejenige, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt.

Denn man ziehe durch den Punkt A (Fig. 75) eine horizontale Axe Ay' und eine verticale Axe Ax', die im Sinne der Schwere gerichtet ist. Seyen x' und y' die Coordinaten eines beliebigen Punktes M, die auf diese Axen bezogen sind. Nennt man x_1 den Abstand des Schwerpunktes einer beliebigen krummen Linie AMC von der Axe Ay', so hat man

$$l x_1 = \int_o^b x' \sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}\, dx',$$

wo b der Werth von x' ist, welcher dem Punkte C entspricht,

und l die gegebene Länge dieser krummen Linie bezeichnet, so dafs man

$$l = \int_0^b \sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}\, dx'$$

hat. Nach der Formel (e) des §. 201 wird aber die krumme Linie, in welcher das erste Integral unter allen krummen Linien von derselben Länge ein Maximum ist, durch die Differentialgleichung

$$dy' = \frac{c' dx'}{\sqrt{(x'+c)^2 - c'^2}}$$

ausgedrückt, wo c und c' willkührliche Constanten sind. Integriert man, und bemerkt, dafs die Veränderlichen x' und y' zu gleicher Zeit Null sind, so erhält man

$$y' = c' \log \frac{x'+c+\sqrt{(x'+c)^2 - c'^2}}{c+\sqrt{c^2 - c'^2}}$$

und daher

$$x'+c+\sqrt{(x'+c)^2 - c'^2} = \gamma e^{\frac{y'}{c'}}$$

indem man, zur Abkürzung,

$$c + \sqrt{c^2 - c'^2} = \gamma$$

setzt. Hieraus findet man

$$x'+c-\sqrt{(x'+c)^2 - c'^2} = \gamma' e^{-\frac{y'}{c'}}$$

indem man auch

$$c - \sqrt{c^2 - c'^2} = \gamma'$$

setzt.

Daher hat man

$$x'+c = \tfrac{1}{2}\gamma e^{\frac{y'}{c'}} + \tfrac{1}{2}\gamma' e^{-\frac{y'}{c'}} \qquad (f)$$

als Gleichung der krummen Linie, die die verlangte Eigenschaft besitzt. Im Punkte C hat man

$$b + c = \tfrac{1}{2}\gamma e^{\frac{a}{c'}} + \tfrac{1}{2}\gamma' e^{-\frac{a}{c'}},$$

wo a der gegebene Abstand dieses Punktes von der Axe Ax' ist, so dafs man zu gleicher Zeit $x' = b$ und $y' = a$ hat. Diese Gleichung und die Länge l der krummen Linie dienen dazu, die zwei Constanten c und c' zu bestimmen.

Um nun die Gleichung (f) auf die der Kettenlinie zurück zu führen, bezeichne man durch ε eine unbestimmte Con-

stante und verwandele die Coordinaten x' und y' in andere, so dafs man

$$x' + c = -y, \quad y' = \varepsilon - x$$

hat, so dafs diese neuen Coordinaten x und y den Coordinaten x' und y' entgegengesetzt gerichtet und auf einen anderen Anfangspunkt bezogen sind. Durch diese Aenderung wird die Gleichung (f)

$$y = -\tfrac{1}{2}\gamma e^{\frac{\varepsilon}{c'}} e^{-\frac{x}{c'}} - \tfrac{1}{2}\gamma' e^{-\frac{\varepsilon}{c'}} e^{\frac{x}{c'}}.$$

Man bestimme die Gröfse ε, indem man

$$\gamma e^{\frac{\varepsilon}{c'}} = \gamma' e^{-\frac{\varepsilon}{c'}}$$

setzt, und bezeichne durch $-h$ den gemeinschaftlichen Werth dieser zwei gleichen Gröfsen, so dafs man

$$\gamma e^{\frac{\varepsilon}{c'}} = -h, \quad \gamma' e^{-\frac{\varepsilon}{c'}} = -h$$

hat. Da $\gamma\gamma' = c'^2$ ist, so folgt daraus $h = c'$ und die vorhergehende Gleichung der krummen Linie wird

$$y = \tfrac{1}{2} h \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

was mit der zweiten Gleichung (c), die wir für die Kettenlinie gefunden haben, übereinstimmt.

297.

Wenn die verticale Kraft, die auf jedes Element des in den Punkten A und C aufgehängten Fadens (Fig. 74) wirkt, statt der Länge des Elementes ds proportional zu seyn, seiner horizontalen Projection dx proportional ist, so wird die zweite Gleichung (b)

$$d.\,T\frac{dy}{ds} = p\,dx,$$

wo p eine gegebene Constante bedeutet, die das Gewicht eines Prisma vorstellt, dessen Höhe die lineare Einheit ist. In Folge der ersten Gleichung (b), die sich nicht ändert, hat man immer

$$T = ph\frac{ds}{dx},$$

wenn man durch h eine Linie von unbekannter Länge und durch ph ein Gewicht bezeichnet, welches der Spannung p

des tiefsten Punktes B der krummen Linie gleich ist. Hieraus folgt also

$$hd.\frac{dy}{dx} = dx,$$

woraus man

$$h\frac{dy}{dx} = x, \quad 2hy = x^2$$

findet, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten x und y in den Punkt B verlegt. In diesem Falle ist die krumme Linie, wie man sieht, eine Parabel, deren Spitze im tiefsten Punkte liegt, und man hat

$$T = p\sqrt{h^2 + x^2}$$

für die Spannung in einem beliebigen Punkte.

Wendet man die Bezeichnungen des §. 295 an, so hat man in den Punkten A und C

$$2hf = k^2, \quad 2h(f-b) = k'^2,$$

und da $k + k' = a$ ist, so findet man daraus

$$2hb = a(k - k'),$$

wodurch man die Werthe von k, k', f erfährt, wenn man h bestimmt hat, dessen Werth man aus der Länge l des Fadens findet. Man hat nemlich

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h}\sqrt{h^2 + x^2}, \quad hl = \int_{-k'}^{k}\sqrt{h^2 + x^2}\,dx,$$

was, wenn man die Integration nach den gewöhnlichen Regeln ausführt,

$$2hl = h^2 \log\frac{\sqrt{h^2 + k^2} + k}{\sqrt{h^2 + k'^2} - k'} + k\sqrt{h^2 + k^2} + k'\sqrt{h^2 + k'^2}$$

giebt.

Nimmt man, der gröſseren Einfachheit wegen, an, daſs die zwei Punkte A und C in derselben horizontalen Linie liegen, so hat man

$$b = o, \quad k = k' = \tfrac{1}{2}a,$$

alsdann geht die vorhergehende Gleichung in

$$hl = h^2 \log\frac{k + \sqrt{h^2 + k^2}}{h} + k\sqrt{h^2 + k^2}$$

über, und man findet daraus, durch Versuche, den genäherten Werth von h, wenn die Werthe von l und k gegeben sind.

Diese unbekannte Gröfse h bestimmt sich weit leichter, wenn die Länge l der krummen Linie sehr wenig von ihrer Projection a verschieden ist, wodurch der Werth von h im Verhältnisse zu a sehr grofs wird. Alsdann hat man in sehr convergierenden Reihen

$$\sqrt{h^2+k^2} = h + \tfrac{1}{2}\frac{k^2}{h} - \tfrac{1}{8}\frac{k^4}{h^3} + \ldots$$

$$\log\frac{k+\sqrt{h^2+k^2}}{h} = \frac{k}{h} - \tfrac{1}{6}\frac{k^3}{h^3} + \ldots$$

Vermittelst dieser Werthe wird die vorhergehende Gleichung ungefähr

$$h^2(l-2k) = \tfrac{1}{3}k^3,$$

woraus man

$$h = \frac{a\sqrt{2a}}{4\sqrt{3(l-a)}}$$

findet.

Man hat dieses Beispiel gewählt, weil es eine sehr nützliche Anwendung bei der Construction der Hängebrücken hat, wo es wichtig ist, die Spannung der aufgehängten Kette und die Last der Stützpunkte zu finden.

298.

Man nehme nun an, es würden alle Punkte des Fadens durch beliebige Kräfte getrieben, so wird er im Allgemeinen eine Linie von doppelter Krümmung bilden. Die Anzahl der Gleichungen des Gleichgewichtes eines jeden der Elemente wird drei seyn, und wenn man noch immer annimmt, dafs der Faden völlig biegsam ist, so erhält man diese Gleichungen durch die Betrachtungen, die wir in §. 293 ausführlich erläutert haben. Auf diese Weise findet man

$$\left.\begin{aligned} d.T\frac{dx}{ds} + X\varepsilon ds &= o \\ d.T\frac{dy}{ds} + Y\varepsilon ds &= o \\ d.T\frac{dz}{ds} + Z\varepsilon ds &= o \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wo x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes M der krummen Linie sind, ds das Differentialelement seiner Länge ist, ε das Produkt aus der Dichtigkeit des

Fadens in den auf seiner Länge senkrechten Schnitt, welche im Punkte M statt haben, so daſs εds das Element der Masse des Fadens ist, T die Spannung in diesem Punkte, oder die unbekannte Kraft, welche das Element εds nach jeder seiner Verlängerungen zieht, X, Y, Z die auf die Einheit der Masse bezogenen Kräfte, welche den Axen der x, y, z parallel sind, dem Punkte M entsprechen und gegebene Functionen der drei Coordinaten sind.

In Folge der Spannung T erleidet das Element ds eine Ausdehnung und die Gröſse ε eine Verminderung, so daſs die Masse εds sich jedoch nicht ändert. Bezeichnet man daher durch ds' und ε' das, was diese Gröſsen im natürlichen Zustande des Fadens waren, so hat man

$$\varepsilon ds = \varepsilon' ds',$$

und wenn man annimmt, daſs die Ausdehnung der Kraft, die sie hervorbringt, proportional ist (§. 288), so hat man, zu gleicher Zeit,

$$ds = (1 + \omega T)\, ds', \tag{2}$$

wo ω einen sehr kleinen Coefficienten bedeutet, der von dem Stoffe und der Dicke des Fadens im Punkte M abhängt. Ist der Faden gleichartig und hat er in seiner ganzen Länge dieselbe Dicke, so sind ε' und ω beständige Gröſsen. Im Allgemeinen aber kann man diese zwei Gröſsen wie gegebene Functionen des Bogens s' betrachten, der von einem bestimmten Punkte des Fadens an genommen wird und bis zum Punkte M geht.

299.

Wenn der aus irgend einem Stoffe bestehende Faden nur von der Schwere getrieben wird und vertical an einem festen Punkte aufgehängt ist, den ich A nenne, so verschwinden die zwei letzten Gleichungen (1) und die dritte wird

$$dT + g\varepsilon dx = o,$$

wenn man die Axe der x vertical und im Sinne der Schwere gerichtet nimmt und diese Kraft durch g bezeichnet. Ich setze den Anfangspunkt der x in den Punkt A und nenne Q den Werth von T, der $x = o$ entspricht, d. h. die Last, die dieser Punkt tragen muſs. Für einen beliebigen Punkt M hat man

$$T = Q - g\int \varepsilon dx,$$

wo das Integral zu gleicher Zeit mit x Null wird.

Man bezeichne durch B das untere Ende des Fadens, bringe an diesen Punkt ein Gewicht P an und bezeichne durch l die Länge von AB. Alsdann ist offenbar P die Spannung im Punkte B; man hat daher, zu gleicher Zeit, $x = l$ und $T = P$, woraus sich

$$Q = P + g\int_o^l \varepsilon dx,$$

und daher

$$T = P + g\int_o^l \varepsilon dx - g\int \varepsilon dx$$

ergiebt. Das zweite und dritte Glied dieser Formel drückt aber das Gewicht des ganzen Fadens und des Theils AM aus; hieraus folgt also, dafs die Spannung im Punkte M das Gewicht des Theils BM, vermehrt um das Gewicht P, ist, was aufserdem einleuchtend ist.

Das Gesetz der Verlängerung des Fadens in seiner ganzen Ausdehnung hängt von seiner Natur und seiner Dicke ab. Ich nehme z. B. an, er sey gleichartig und habe überall dieselbe Dicke, wodurch der Coefficient ω constant wird. Nennt man x' die Länge des Theils AM, ehe der Faden gespannt worden ist, welche Länge durch die Wirkung der Spannung in x übergeht und setzt daher dx' und dx an die Stelle von ds' und ds, in die Gleichungen (2), so hat man

$$dx = (1 + \omega T)\, dx'.$$

Sey auch l' die ganze Länge des Fadens von seiner Ausdehnung und p sein ganzes Gewicht, so ist das Gewicht des Theils BM gleich $\frac{p(l'-x')}{l'}$, und die Spannung im Punkte M ist

$$T = P + \frac{p(l'-x')}{l'}.$$

Substituiert man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung, integriert und bemerkt, dafs $x' = o$ und $x = o$ im Punkte A ist, so hat man

$$x - x' = \omega P x' + \frac{\omega p(2l'x' - x'^2)}{2l'}$$

als Werth der Verlängerung des Theils AM. Hieraus findet

man die gänzliche Verlängerung, indem man $x' = l'$ und $x = l$ setzt, woraus sich

$$l - l' = \omega l' (P + \tfrac{1}{2} p)$$

ergiebt, so dafs man, um das Gewicht des Fadens bei der Berechnung dieser Verlängerung zu berücksichtigen, die Hälfte dieses Gewichtes zu demjenigen hinzufügen mufs, welches an sein unteres Ende befestigt ist.

300.

Im allgemeinen Falle addiert man die Gleichungen (1) nachdem man sie mit $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ multipliciert hat, hieraus folgt

$$dT + \varepsilon (X dx + Y dy + Z dz) = o,$$

da

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1$$

$$\frac{dx}{ds} d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d.\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d.\frac{dz}{ds} = o$$

ist. Nimmt man an, dafs der Faden gleichartig und seine Dicke constant ist, und vernachlässigt man die kleine Ausdehnung seiner Elemente, so ist die Gröfse ε constant; aufserdem ist die Formel $X dx + Y dy + Z dz$, im Allgemeinen, das genaue Differential einer Function dreier Veränderlichen x, y, z, die als von einander unabhängig angesehen werden. Setzt man daher

$$X dx + Y dy + Z dz = - d.\varphi (x, y, z),$$

so hat man

$$dT = \varepsilon d.\varphi (x, y, z),$$

und daher

$$T = \varepsilon \varphi (x, y, z),$$

indem man die willkührliche Constante in der Function φ begreift. Diese Constante verschwindet in dem Unterschiede der Werthe von T, die sich auf zwei Punkte des Fadens beziehen, und es folgt hieraus, dafs man, ohne die Gestalt des Gleichgewichtes bestimmt zu haben, den Zuwachs der Spannung von einem Punkte zum anderen kennen wird, so dafs man, sobald die Spannung in einem Punkte bekannt ist, hieraus die Spannung für alle übrigen Punkte des Fadens berechnen kann.

Was die durch den Faden gebildete krumme Linie betrifft, so bestimmt sie sich durch zwei der drei Gleichungen (1), oder durch zwei beliebige Verbindungen dieser drei Gleichungen, in welche man den vorhergehenden Werth von T substituiert, so daſs man, im Allgemeinen, ein System von zwei Differentialgleichungen der zweiten Ordnung integrieren muſs, um diese krumme Linie zu kennen. Ihr Krümmungshalbmesser in einem beliebigen Punkte M wird durch folgende Differentialformel ausgedrückt, die nur von der ersten Ordnung ist und nur die Richtung der Tangente in diesem Punkte als bekannt voraussetzt.

Die Gleichungen (1) können durch folgende ersetzt werden:

$$\frac{dx}{ds}d.T\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}d.T\frac{dx}{ds}=\varepsilon(Xdy-Ydx)$$

$$\frac{dz}{ds}d.T\frac{dx}{ds}-\frac{dx}{ds}d.T\frac{dz}{ds}=\varepsilon(Zdx-Xdz).$$

$$\frac{dy}{ds}d.T\frac{dz}{ds}-\frac{dz}{ds}d.T\frac{dy}{ds}=\varepsilon(Ydz-Zdy),$$

welche dasselbe wie

$$\left.\begin{aligned} dxd^2y-dyd^2x &= (Xdy-Ydx)\frac{\varepsilon ds^2}{T} \\ dzd^2x-dxd^2z &= (Zdx-Xdz)\frac{\varepsilon ds^2}{T} \\ dyd^2z-dzd^2y &= (Ydz-Zdy)\frac{\varepsilon ds^2}{T} \end{aligned}\right\} \quad (4).$$

sind, indem man die Differentiation ausführt und den Bogen s für die unabhängige Veränderliche nimmt. Nennt man aber ϱ den Krümmungshalbmesser im Punkte M, so hat man (§. 18)

$$\varrho=\frac{ds^3}{[(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dyd^2z-dzd^2x)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Vermöge der vorhergehenden Gleichungen und des Werthes von T hat man daher

$$\varrho=\frac{\varphi(x,y,z)\,ds}{[(Xdy-Ydx)^2+(Zdx-Xdz)^2+(Ydz-Zdy)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (5)$$

Im Falle der Kettenlinie hat man

$$X=o,\quad Y=-g,\quad Z=o,\quad \varphi=gy,$$

indem man die Axen und den Anfangspunkt der Coordinaten

so nimmt, wie die Gleichungen (c) des §. 294 sie voraussetzen. Man hat daher

$$\varrho = y\frac{ds}{dx},$$

was sich, vermöge dieser Gleichungen, leicht nachweisen läfst.

301.

Wir wollen nun diese Formeln auf den Fall anwenden, wenn ein Faden auf der Oberfläche eines festen Körpers ausgespannt ist, und zur gröfseren Einfachheit annehmen, dafs er von keiner gegebenen Kraft getrieben werde, so dafs die einzige Kraft, welche auf seine verschiedenen Punkte wirkt, der unbekannte Widerstand des Körpers ist, auf welchen er sich stützt.

An einem beliebigen Punkte M des Fadens sey Nds die Gröfse dieser Kraft, die an das Element εds des Fadens angebracht ist und deren drei Seitenkräfte $X\varepsilon ds$, $Y\varepsilon ds$, $Z\varepsilon ds$ sind; ihre Richtung steht auf der Oberfläche des festen Körpers senkrecht und geht von aufsen nach innen. Der Druck, welcher in dem ds entsprechenden Theile des festen Körpers statt hat, ist der Kraft Nds gleich und entgegengesetzt, so dafs N das Maafs des auf die Einheit der Länge bezogenen Druckes ist.

Nennt man λ, μ, ν die Winkel, welche der äufsere Theil der Normalen in M mit den Linien, die den durch diesen Punkt gezogenen Axen der x, y, z parallel sind, einschliefst, so hat man

$$\varepsilon X = N\cos\lambda,\quad \varepsilon Y = N\cos\mu,\quad \varepsilon Z = N\cos\nu.$$

Ferner hat man auch, wenn $L = o$ die Gleichung der Oberfläche des festen Körpers ist, und man, der Kürze halber,

$$V = \left(\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

setzt, nach §. 21,

$$\cos\lambda = V\frac{dL}{dx},\quad \cos\mu = V\frac{dL}{dy},\quad \cos\nu = V\frac{dL}{dz},$$

wenn man für V das passende Zeichen nimmt.

Dies vorausgesetzt, hat man

$$Xdx + Ydy + Zdz = NVdL = o,$$

wodurch der, durch die Gleichung (3) gegebene, Werth von dT Null wird. Die Spannung ist daher in der ganzen Länge des Fadens dieselbe, wie auch die Gestalt des festen Körpers beschaffen seyn mag. Ich nehme an, der Werth derselben sey gegeben und bezeichne ihn durch k. Ist der Faden an einem seiner Enden an einen Punkt des Körpers befestigt und ist ein Gewicht, welches, im Verhältnifs zu dem des Fadens, das man vernachlässigt, beträchtlich ist, am anderen Ende vertical aufgehängt, so ist dieses Gewicht die Spannung k und der Druck, welchen der feste Punkt erleidet. Ist der Faden an seinen beiden Enden frei, und hängen beträchtliche Gewichte an denselben, so drücken diese die äufsersten Spannungen aus; daher müssen sie gleich seyn, und jedes derselben ist die Spannung k. Sind endlich beide Enden des Fadens fest, so kann man die Spannung k aus der Ausdehnung finden, die in der ganzen Länge constant seyn wird.

302.

Ich bezeichne durch λ', μ', ν' die Winkel, welche die auf der Krümmungsebene im Punkte M senkrechte Linie mit Linien einschliefst, die den Axen der x, y, z parallel sind. Ist der Krümmungshalbmesser in diesem Punkte ϱ, so hat man (§. 19)

$$\frac{dxd^2y - dyd^2x}{ds^3} = \varrho \cos\nu',$$

$$\frac{dzd^2x - dxd^2z}{ds^3} = \varrho \cos\mu',$$

$$\frac{dyd^2z - dzd^2y}{ds^3} = \varrho \cos\lambda'.$$

Addiert man daher die Gleichungen (4), nachdem man sie mit $\cos\nu$, $\cos\mu$, $\cos\lambda$ multipliciert hat, und berücksichtigt man die Werthe von X, Y, Z, welche in dem Falle, den wir betrachten, statt haben, so folgt daraus

$$\cos\nu\cos\nu' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\lambda\cos\lambda' = o,$$

daher sind die Linien, welche auf der Oberfläche des festen Körpers und der Krümmungsebene der Linie, die durch den Faden gebildet wird, senkrecht stehen, in jedem Punkte M, auf einander senkrecht, was die charakteristische Eigenschaft der Linie ist, deren Länge auf einer gegebenen Oberfläche

ein Minimum oder ein Maximum ist (§. 161). Hieraus folgt, dafs ein auf einen festen Körper ausgespannter Faden, im Allgemeinen, den kürzesten Abstand zwischen zwei Punkten der Oberfläche angiebt. Genau genommen kann dieser Abstand auch ein Maximum seyn; so z. B. sind zwei gegebene Punkte auf einer Kugel die gemeinschaftlichen Endpunkte zweier Bogen eines grofsen Kreises, von welchen der eine den kürzesten Abstand, der andere die längste ebene krumme Linie angiebt. Es ist aber einleuchtend, dafs das Gleichgewicht eines gespannten Fadens, auf diesen zwei Bogen, streng möglich ist, weil, wenn man ihn auf einen derselben legt, kein Grund vorhanden ist, weswegen er sich mehr nach der einen als nach der anderen Seite bewegen sollte. Auf dem kleinen Bogen ist aber das Gleichgewicht dauernd, während es auf dem grofsen nur augenblicklich ist, so dafs es physisch nicht bestehen kann, wenn nicht der Faden eine Reibung an der Oberfläche der festen Körpers erleidet.

Substituiert man die Werthe von εX, εY, εZ des vorhergehenden §., in die Formel (5), so hat man

$$N\left[\left(\frac{dy}{ds}\cos\lambda-\frac{dx}{ds}\cos\mu\right)^2+\left(\frac{dx}{ds}\cos\nu-\frac{dz}{ds}\cos\lambda\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\cos\mu-\frac{dy}{ds}\cos\nu\right)^2\right]=\frac{k}{\varrho},$$

da $\varepsilon\varphi(x, y, z) = k$ ist. Zu gleicher Zeit hat man

$$\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}+\frac{dz^2}{ds^2}=1$$

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1,$$

und da die Normale der Oberfläche des Körpers und die Tangente der krummen Linie, die der Faden bildet, auf einander senkrecht stehen, so hat man auch

$$\frac{dx}{ds}\cos\lambda+\frac{dy}{ds}\cos\mu+\frac{dz}{ds}\cos\nu=o.$$

Vermittelst der drei letzten Gleichungen, reduciert man aber den Coefficienten von N in der vorhergehenden, ohne Schwierigkeit, auf die Einheit. Man hat daher einfach

$$N=\frac{k}{\varrho},$$

woraus hervorgeht, dafs der auf die Einheit der Länge bezo-

gene Druck, den ein gespannter Faden auf die Oberfläche eines festen Körpers ausübt, in jedem Punkte M der Spannung, dividiert durch den Krümmungshalbmesser des Fadens, d. h. den Halbmesser des Schnittes, welcher auf der Oberfläche senkrecht steht, und die durch den Faden gebildete Linie berührt, gleich ist.

303.

Diese Resultate werden durch die Reibung des Fadens gegen die Oberfläche des Körpers, auf welcher er sich stützt, modificiert. Um zu zeigen, wie man auf diese Kraft, beim Gleichgewichte eines biegsamen Fadens, Rücksicht nehmen mufs, will ich das Gleichgewicht eines Seils $ABMCD$ (Fig. 76) betrachten, dessen Theil BMC in der Rinne einer festen Rolle liegt und welches, nach den Verlängerungen BA und CD dieses Theils, durch gegebene Kräfte, gezogen wird. Es wird vorausgesetzt, dafs die Rolle und die Linie AB vertical sind; die Kraft, welche nach AB wirkt, ist ein Gewicht k, und ich bezeichne durch F diejenige, die nach CD wirkt. Die Spannungen, die in den Punkten B und C, nach den Tangenten BA und CD statt haben, sind bezüglich gleich k und F. Ich nehme auch, um die Frage zu vereinfachen, an, dafs die Rolle kreisrund sey, nenne ihren Halbmesser c und nehme ihren Mittelpunkt O als Anfangspunkt der Coordinaten. Die Axe der z steht auf der Rolle senkrecht, die Axe der y ist vertical und von unten nach oben gerichtet, die Axe der x ist horizontal und geht durch den Punkt B. Endlich setze ich den Anfang des Bogens s, welcher bis zu irgend einem Punkte M des Seils reicht, in C, so dafs man $CM = s$ hat.

Wäre nun die Reibung Null, so müfste man, im Falle des Gleichgewichtes, $k = F$ haben. Wegen der Reibung kann aber das Gleichgewicht bestehen, so lange der Unterschied dieser zwei Kräfte k und F nicht über eine gewisse Gränze hinaus geht. Man denke sich daher, dafs das Gleichgewicht in einem gewissen Momente aufgehoben werden sollte, so dafs eine Bewegung im Sinne des Gewichtes k erfolgt, was voraussetzt, dafs man $k > F$ hat. In diesem Augenblicke ist die Reibung des Seils gegen die Rolle, in diesem Punkte, nach

dem Theile MH der Tangente gerichtet. Ich bezeichne ihre Intensität durch μ, und, wie vorher, durch N den normalen Widerstand, welcher in demselben Punkte M, nach der Verlängerung MO' von MO, statt hat, so daſs μds und Nds die berührende und normale Kraft sind, die auf das Element εds des Seils, das bis zum Punkte M reicht, wirken, und μ und N dieselben Kräfte, auf die Einheit der Länge bezogen, darstellen. Zieht man durch diesen Punkt M die mit den Axen Ox und Oy parallelen Linien Mx' und My', so hat man

$$\cos x'MH = -\frac{y}{c}, \; \cos y'MH = \frac{x}{c}$$

$$\cos x'MO' = \frac{x}{c}, \; \cos y'MO' = \frac{y}{c},$$

woraus man

$$\varepsilon X = \frac{Nx}{c} - \frac{\mu y}{c}, \quad \varepsilon Y = \frac{Ny}{c} + \frac{\mu x}{c}$$

für die Werthe von εX und εY findet, die man in die Gleichungen (1) substituieren muſs. Die Kraft εZ ist offenbar Null, die dritte Gleichung (1) verschwindet und die zwei ersten werden

$$d.T\frac{dx}{ds} + \frac{Nxds}{c} - \frac{\mu y ds}{c} = o$$

$$d.T\frac{dy}{ds} + \frac{Nyds}{c} + \frac{\mu x ds}{c} = o.$$

Da der Punkt M in dem Umringe der Rolle liegt, so hat man

$$x^2 + y^2 = c^2, \quad xdx + ydy = o,$$

wodurch die zwei vorhergehenden Gleichungen in folgende übergehen:

$$\left.\begin{aligned} xd.\frac{Tdx}{ds} + yd.T\frac{dy}{ds} + Ncds = o \\ \frac{dx}{ds}d.\frac{Tdx}{ds} + \frac{dy}{ds}d.\frac{Tdy}{ds} - \frac{\mu}{c}(ydx - xdy) = o \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Aber $\frac{1}{2}(ydx - xdy)$ ist das Differential des Ausschnittes, der durch den Halbmesser OM, von einer festen Linie aus, die z. B. OC seyn soll, beschrieben wird. Da dies ein Kreisausschnitt ist, der dem Bogen s entspricht, so ist sein Werth $\frac{1}{2}cs$, daher hat man

$$ydx - xdy = cds.$$

Aufserdem hat man auch

$$x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} = o, \quad xd.\frac{dx}{ds} + yd.\frac{dy}{ds} = -ds$$

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1, \quad \frac{dx}{ds}d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d.\frac{dy}{ds} = o,$$

wodurch die Gleichungen (6) in

$$T = cN, \quad dT = \mu ds$$

übergehen, woraus man

$$cdN = \mu ds$$

findet.

Der Druck, der im Punkte M auf die Rinne der Rolle ausgeübt wird, ist der Kraft N gleich und entgegengesetzt; nimmt man daher an, dafs die Reibung dem Drucke proportional ist (§. 269), so hat man

$$\mu = fN,$$

wo f einen beständigen Coefficienten bedeutet, der von der Natur der beiden Oberflächen, die in Berührung sind, abhängt. Daher hat man

$$cdN = fNds,$$

und, wenn man integriert,

$$N = Ae^{\frac{fs}{c}},$$

wo A die willkührliche Constante und e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Zu gleicher Zeit hat man

$$T = Ace^{\frac{fs}{c}}, \quad \mu = Afe^{\frac{fs}{c}}.$$

Im Punkte C hat man $s = o$ und $T = F$, daher ist $A = \frac{F}{c}$, und, wenn man l die Länge des Bogens CMB nennt, so hat man $s = l$ und $T = k$ am anderen Ende B.

Wir haben also zuletzt

$$N = \frac{F}{c}e^{\frac{fs}{c}}, \quad T = Fe^{\frac{fs}{c}}, \quad \mu = \frac{fF}{c}e^{\frac{fs}{c}}$$

in einem beliebigen Punkte M, und aufserdem

$$K = Fe^{\frac{fl}{c}}$$

als Gleichung des Gleichgewichtes.

Bezeichnet man durch F' die ganze Reibung, die in der ganzen Länge von CMB statt hat, so findet man

$$F' = \int_0^l \mu ds = F\left(e^{\frac{fl}{c}} - 1\right),$$

und man kann die Gleichung des Gleichgewichtes auf folgende Weise schreiben:

$$k = F + F'.$$

Setzt man

$$e^{\frac{fl}{c}} - 1 = f',$$

so hat man

$$F' = f'F, \quad f' = \frac{k}{F} - 1,$$

woraus sich ergiebt, daſs die ganze Reibung F' der kleinsten der zwei Kräfte k und F, multipliciert durch einen Coefficienten f', der sich nicht blos mit der Gröſse f, sondern auch mit der Länge l der Berührung und dem Halbmesser c der Rolle ändert, gleich ist. Der Unterschied, der zwischen den Kräften k und F, in dem Augenblicke, wo das Gleichgewicht aufhört, statt findet, giebt den Werth von F' an, und ihr Verhältniſs, wenn es um die Einheit vermindert wird, ist der Werth des Coefficienten f', aus welchem man den Werth von f alsdann ableiten kann. Ist F, ebenso wie k, ein Gewicht, so muſs man, der gröſseren Genauigkeit halber, unter diesen Gewichten k und F, die der verticalen Theile BA und CD des Seils begreifen.

304.

Vermöge der drei Gleichungen (1) ist es leicht zu zeigen, daſs die sechs allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichtes (§. 261) in dem Falle, wenn ein Faden völlig biegsam ist, statt haben.

Zu diesem Zwecke nenne ich K und K' die beiden Enden des Fadens und l seine Länge, und setze den Anfangspunkt des Bogens s in K. Integriert man die ersten Glieder der Gleichungen (1) vom Punkte K bis zum Punkte K', so hat man

$$\left(T\frac{dx}{ds}\right) - \left[T\frac{dx}{ds}\right] + \int_0^l X\varepsilon ds = 0$$

$$\left(T\frac{dy}{ds}\right) - \left[T\frac{dy}{ds}\right] + \int_0^l Y\varepsilon ds = 0$$

$$\left(T\frac{dz}{ds}\right) - \left[T\frac{dz}{ds}\right] + \int_o^l Z\varepsilon ds = o,$$

wo die in eckigen Klammern eingeschlossenen Ausdrücke dem Punkte K, und die in runden Klammern enthaltenen dem Punkte K' entsprechen. Ich nehme an, daſs, unabhängig von den Kräften X, Y, Z, die in der ganzen Länge des Fadens wirken, noch besondere Kräfte, die der Gröſse und Richtung nach gegeben sind, an die beiden Enden angebracht sind. Ich nenne k diejenige, die auf den Punkt K wirkt, und α, β, γ die Winkel, welche ihre Richtung mit Linien, die, den Axen der x, y, z parallel, durch diesen Punkt gezogen sind, einschlieſst, und bezeichne durch k', α', β' γ' die analogen Gröſsen in Beziehung auf den Punkt K'. Diese Kräfte k und k' sind, der Gröſse und Richtung nach, die äuſsersten Spannungen, und vermöge der Theile der Berührungslinien in k und k', mit welchen ihre Richtungen zusammen fallen müssen, hat man

$$\left.\begin{aligned} \left[T\frac{dx}{ds}\right] = -k\cos\alpha, \left[T\frac{dy}{ds}\right] = -k\cos\beta, \left[T\frac{dz}{ds}\right] = -k\cos\gamma \\ \left(T\frac{dx}{ds}\right) = k'\cos\alpha', \left(T\frac{dy}{ds}\right) = k'\cos\beta', \left(T\frac{dz}{ds}\right) = k'\cos\gamma' \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

die vorhergehenden Gleichungen werden daher

$$\left.\begin{aligned} k\cos\alpha + k'\cos\alpha' + \int_o^l X\varepsilon ds = o \\ k\cos\beta + k'\cos\beta' + \int_o^l Y\varepsilon ds = o \\ k\cos\gamma + k'\cos\gamma' + \int_o^l Z\varepsilon ds = o \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

und sie drücken, wie man sieht, die Bedingungen des Gleichgewichtes aus, die in den drei ersten Gleichungen (1) des §. 261 enthalten sind.

Bemerkt man, daſs man identisch

$$xd.T\frac{dy}{ds} - yd.T\frac{dx}{ds} = d.T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right)$$

$$zd.T\frac{dx}{ds} - xd.T\frac{dz}{ds} = d.T\left(z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right)$$

$$yd.T\frac{dz}{ds} - zd.T\frac{dy}{ds} = d.T\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right)$$

hat, so findet man aus den Gleichungen (1) des §. 298,

$$d.T\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)+(xY-yX)\varepsilon ds=o,$$

$$d.T\left(z\frac{dx}{ds}-x\frac{dz}{dx}\right)+(zX-xZ)\varepsilon ds=o,$$

$$d.T\left(y\frac{dz}{ds}-z\frac{dy}{ds}\right)+(yZ-zY)\varepsilon ds=o.$$

Integriert man diese Gröfsen von K bis zum Punkte K' und bezeichnet man durch a, b, c die Werthe von x, y, z, die sich auf K beziehen, und durch a', b', c' diejenigen, die sich auf K' beziehen, so hat man, indem man auf die Gleichungen (7) Rücksicht nimmt,

$$\left.\begin{array}{l} k(a\cos\beta-b\cos\alpha)+k'(a'\cos\beta'-b'\cos\alpha')+\int_o^l(xY-yX)\varepsilon ds=o \\ k(c\cos\alpha-a\cos\gamma)+k'(c'\cos\alpha'-a'\cos\gamma')+\int_o^l(zX-xZ)\varepsilon ds=o \\ k(b\cos\gamma-c\cos\beta)+k'(b'\cos\gamma'-c'\cos\beta')+\int_o^l(yZ-zY)\varepsilon ds=o \end{array}\right\}(9)$$

was die Gleichungen des Gleichgewichtes, in Beziehung auf die Momente der gegebenen Kräfte, ausdrückt, die in den drei letzten Gleichungen (1) des §. 261 enthalten sind.

305.

Die Gleichungen (8) und (9) dienen im Allgemeinen dazu, die Coordinaten a, b, c, a', b', c' der zwei äufsersten Punkte K und K' zu bestimmen; es giebt jedoch Fälle, in welchen ein Theil dieser Gröfsen unbestimmt bleiben mufs. Sind z. B. die gegebenen Kräfte, welche auf den Faden wirken, die Schwere und andere Kräfte, die von den Coordinaten ihrer Angriffspunkte unabhängig sind, so ist es einleuchtend, dafs die absolute Lage des Fadens im Raume nicht bestimmt seyn kann. Man kann alsdann die drei Coordinaten eines der Punkte K und K' willkührlich nehmen; die Gleichungen (9) bestimmen die drei Coordinaten des anderen Punktes, und damit das Gleichgewicht möglich sey, müssen die gegebenen Kräfte den Gleichungen (8) Genüge leisten.

Ist einer der Punkte K und K' fest, z. B. der erste, so haben die Gleichungen (8) und (9) noch immer statt, so-

bald man die Kraft k wie eine, der Grôfse und Richtung nach, unbekannte ansieht, die den Druck, welchen der Punkt K erleidet, darstellt. In diesem Falle sind die Werthe von a, b, c gegeben; die Gleichungen (9) bestimmen die von a', b', c' und die Gleichungen (8) geben die drei Seitenkräfte der Kraft k an. Wenn die beiden Punkte K und K' fest sind und ihre Lage gegeben ist, so kennt man ihre Coordinaten, und die Gleichungen (8) und (9) dienen dazu, die Drucke k und k', welche die Punkte K und K' erleiden, der Gröfse und Richtung nach, zu bestimmen.

In allen Fällen, sey es nun, dafs die Coordinaten von K und K' gegeben sind, oder dafs man sie aus den Gleichungen (8) und (9) abgeleitet hat, unterwirft man die krumme Linie, welche der Faden bildet, der Bedingung, dafs sie durch diese zwei Punkte gehen mufs; hierdurch bestimmt man die vier willkührlichen Constanten, welche die vollständigen Integrale dieser zwei Differentialgleichungen der ersten Ordnung enthalten. Was die willkührliche Constante betrifft, welche die Function φ in §. 300 enthält, so kann man ihren Werth aus der gegebenen Länge des Fadens, d. h. aus der Gleichung

$$\int_a^{a'} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}\, dx = l$$

ableiten, in welcher man y und z als Functionen von x betrachtet. Auf diese Weise ist die Aufgabe vollständig gelöfst.

III. Gleichgewicht eines elastischen Stabes.

306.

Wir verstehen hierunter einen geraden oder krummen Stab, dessen Krümmung man nicht ändern kann, ohne eine oder mehrere Kräfte an denselben anzubringen und welcher seine ursprüngliche Gestalt wieder annimmt, sobald diese aufhören zu wirken, während, im Gegentheile, ein vollkommen biegsamer Faden, ohne Hülfe irgend einer Kraft, die Krümmung, die man ihn annehmen läfst, behält und nur im Sinne der Länge elastisch ist. Damit ein Stab, in Beziehung auf die Biegung, elastisch sey, mufs er aus einem Stoffe bestehen,

der sich nur wenig ausdehnen oder zusammenziehen läſst. Dies ist jedoch nicht hinreichend; es müssen auch die Dimensionen seiner Dicke, wenn sie auch im Verhältnisse zu seiner Länge sehr klein sind, eine passende Gröſse haben. Denn wie auch der Stoff, aus welchem der Stab besteht, beschaffen sey, so kann man immer seine Dicke so vermindern, daſs er gar kein merkliches Bestreben mehr hat, die Gestalt, von welcher man ihn entfernt hat, wieder anzunehmen, wodurch er also auf den Zustand eines völlig biegsamen Fadens zurück geführt wird.

Wird ein elastischer Stab von seiner natürlichen Gestalt durch gegebene Kräfte entfernt, so kann jeder der longitudinalen Streifen, aus welchen er besteht, drei verschiedene Wirkungen erleiden. Jeder Theil, sey seine Länge auch noch so klein, kann zusammen gezogen oder ausgedehnt werden, seine natürliche Krümmung kann vermindert oder vermehrt werden und dieser Theil kann um sich selbst gewunden werden. Das Bestreben eines jeden Theils, seine ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen, hängt von den wechselseitigen Anziehungen oder Abstoſsungen ab, die zwischen den Moleculen aller Körper statt haben und sich nur auf unmeſsbare Abstände ausdehnen. Die Berechnung aller Kräfte, die sich hieraus ergeben und den gegebenen Kräften das Gleichgewicht halten, gehört in die mathematische Physik; ich verweise wegen dieses Gegenstandes auf meine Abhandlung über das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer Körper*). In diesem Lehrbuche werde ich die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Stabes bilden, indem ich von allgemein angenommenen Grundsätzen ausgehe.

Man nennt insbesondere eine elastische Platte, ein rechtwinkliges Parallelopipedum von geringer Dicke, das man im Sinne seiner Länge biegt, so daſs es zwischen zwei cylindrischen Oberflächen enthalten ist, deren Kanten seiner Breite gleich sind. Diese Dimension kann eine beliebige Gröſse haben; theilt man sie durch sehr nahe Ebenen, die auf ihrer Richtung senkrecht stehen, so wird die Platte in elastische rechtwinklige Stäbe getheilt. Jakob Bernouilli hat zuerst die

*) Mémoires de l'académie des sciences, T. VIII.

Gestalt der elastischen Platte, die im Gleichgewichte ist, vermöge der Betrachtungen, die wir entwickeln werden, bestimmt, und welche alsdann zur vollständigen Auflösung der Aufgabe, für den Fall eines beliebigen elastischen Stabes, dienen werden.

307.

Man betrachte eine elastische Platte, welche an einem ihrer Enden eingeklemmt, d. h. so befestigt ist, dafs eines der beiden kleinen Rechtecke, die sie, senkrecht auf ihre Länge, begränzen, keine Bewegung annehmen kann. Man nehme auch an, sie werde im Sinne ihrer Länge durch eine Kraft gebogen, die an das andere Ende angebracht wird, und die einzige ist, welche auf die Platte wirkt. Damit die Platte eine cylindrische Gestalt annimmt, wie eben gesagt wurde, mufs sie, an ihrem freien Ende, durch ein unbiegsames Rechteck begränzt werden, in dessen Mitte man die gegebene Kraft, in einer Ebene, welche auf der Breite der Platte senkrecht steht, anbringt. Alle longitudinalen Schnitte, oder diejenigen, welche auf der Breite senkrecht stehen, sind gleich; derjenige, welcher die Richtung der gegebenen Kraft enthält, wird durch die Figur 77 dargestellt, und die krummen Linien AMB und $A'M'B'$ sind die Schnitte der zwei cylindrischen Oberflächen der Platte, welche ihre beiden ebenen Flächen in ihrem ursprünglichen Zustande bildeten.

Man nimmt an, dafs alle Punkte, welche, in diesem Zustande, einer Linie angehörten, die auf diesen beiden Flächen der Platte senkrecht stand, noch, nachdem die Platte gebogen wurde, auf einer und derselben Linie, die auf beiden cylindrischen Oberflächen senkrecht steht, liegen, was man auch wirklich in der Erfahrung beobachtet. Hieraus folgt, dafs, wenn MM' auf der krummen Linie AMB senkrecht steht, diese Linie auch auf $A'M'B'$ senkrecht stehen und alle Punkte der Platte enthalten wird, die ursprünglich auf einer der Linien, die auf beiden Flächen senkrecht stand, lagen. Hieraus folgt auch, dafs, wenn man die Platte, in ihrem natürlichen Zustande, in longitudinale Streifen zerlegt und die krumme Linie CND einen dieser Streifen, nachdem die Gestalt der Platte verändert worden ist, darstellt, sie die Normale MM' rechtwinklig in N schneidet.

Sey m ein Punkt der krummen Linie AMB, der unendlich nahe bei M liegt; man ziehe die Linie mnm', die auf den drei Linien AMB, CND, $A'M'B'$ senkrecht steht und sie in m, n, m' schneidet. Die Verlängerungen von MNM' und mnm' treffen sich in einem Punkte O, der der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Krümmung für diese drei krummen Linien ist. Man nenne ϱ den Krümmungshalbmesser des mittleren Streifens, d. h. desjenigen, der gleichweit von AMB und $A'M'B'$ entfernt ist, σ den Theil dieses Streifens, der zwischen den zwei senkrechten Linien MNM' und mnm' enthalten ist, u den Abstand eines beliebigen Streifens CND vom mittleren Streifen und σ' die Länge von Nn. Betrachtet man diesen Abstand u als eine positive oder negative Gröfse, je nachdem CND sich, in Beziehung auf den mittleren Streifen, auf der Seite der Convexität AMB der Platte oder auf der Seite der Concavität $A'M'B'$ befindet, so ist der Krümmungshalbmesser NO von CND gleich $\varrho + u$, und die unendlich kleinen Längen σ' und σ verhalten sich wie $\varrho + u$ zu ϱ, so dafs man

$$\sigma' = \sigma + \frac{u\sigma}{\varrho}$$

hat.

Die longitudinalen Streifen erleiden, wenn sie sich krümmen, sehr kleine Ausdehnungen und Zusammenziehungen, und die Längen σ' und σ, welche früher gleich waren, werden ungleich geworden seyn. Man bezeichne durch γ ihre ursprüngliche Gröfse und setze

$$\sigma = \gamma(1 + \delta), \quad \sigma' = \gamma(1 + \delta'),$$

wo δ und δ' sehr kleine, positive oder negative, Gröfsen sind, je nachdem der mittlere Streifen und der Streifen CND sich verlängert oder verkürzt haben. Der Bruch $\frac{u}{\varrho}$ soll ebenfalls sehr klein seyn, vernachläfsigt man daher das Produkt von δ und $\frac{u}{\varrho}$, so hat man

$$\delta' = \delta + \frac{u}{\varrho},$$

woraus hervorgeht, dafs, wenn der mittlere Streifen seine anfängliche Länge behalten hat, sich die Streifen, welche auf

der Seite der Convexität liegen, alle verlängert, und die, welche auf der Seite der Concavität liegen, alle verkürzt haben werden, und zwar alle ihren Abständen vom mittleren Streifen proportional.

Dies vorausgesetzt, mache man die Gestalt eines jeden der beiden Theile der Platte, die $AMM'A'$ und $Bmm'B'$ entsprechen, unveränderlich, sie sollen, zur Abkürzung, H und K heifsen. Der Theil H ist unbeweglich, der Theil K wird nach H gezogen, oder von H abgestofsen, indem sich der mittlere Theil $Mmm'M'$ bestrebt, seinen natürlichen Zustand wieder anzunehmen und eine Schichte von der beständigen Dicke γ zu werden. Der Streifen Nn dieser Schichte sucht sich zusammen zu ziehen oder auszudehnen, je nachdem er verlängert oder verkürzt worden ist, d. h. je nachdem die Gröfse δ' positiv oder negativ ist. Im ersten Falle wird daher der Theil K durch eine an den Punkt n angebrachte Kraft angezogen, und im zweiten durch eine solche abgestofsen. Man nimmt aber an, dafs diese Kraft, die von der Wirkung von Nn herrührt, der Gröfse δ' proportional ist und auf mnm' senkrecht steht, als wenn dieser Streifen Nn isoliert wäre.

Nimmt man diese Voraussetzung an, so bezeichne ich durch $\alpha\delta'$ die Kraft, von welcher die Rede ist, auf die Einheit der Oberfläche bezogen, und daher durch $\alpha\delta'\lambda du$ die senkrechte Kraft, welche auf das transversale Element der Oberfläche K, das dem Punkte n entspricht, wirkt, wo α eine Constante, die von dem Stoffe der Platte abhängt, λ ihre Breite und λdu die Fläche dieses Elementes bedeutet. Bezeichnet man daher durch 2ε die Dicke der Platte und durch T die ganze Kraft, welche K anzieht, oder abstöfst, je nachdem sie positiv oder negativ ist, so hat man

$$T = \alpha\lambda \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta' du,$$

und, wenn man statt δ' seinen Werth setzt,

$$T = 2\alpha\lambda\varepsilon\delta.$$

Sey aufserdem μ das Moment der Kräfte, die auf der Oberfläche K senkrecht stehen, in Beziehung auf die transversale Axe genommen, die gleich weit von beiden Flächen der Platte entfernt ist; so haben wir auch

$$\mu = \alpha\lambda \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta' u du,$$

und daher

$$\mu = \frac{2\alpha\lambda\varepsilon^3}{3\rho}.$$

Hieraus sieht man

Erstens: daſs die Kraft T, welche eine beliebige Schichte der Platte zusammen zu ziehen oder auszudehnen strebt, der positiven oder negativen Ausdehnung des mittleren Streifens proportional ist und nicht von seiner Krümmung abhängt.

Zweitens: daſs das Moment μ, im Gegentheile, unabhängig von dieser Ausdehnung ist und im umgekehrten Verhältnisse des Krümmungshalbmessers steht.

Drittens: daſs, wenn der Stoff und die Breite der Platte dieselben bleiben, der Werth von T seiner Dicke, und der von μ der dritten Potenz dieser Dimension proportional ist.

Wenn der mittlere Streifen dieselbe Länge behält, so hat man $\delta = o$ und $T = o$, die parallelen Kräfte, welche K anziehen oder abstoſsen, reducieren sich auf zwei gleiche und entgegengesetzte, deren Moment, in Beziehung auf die transversale Axe, die auf diesen Kräften senkrecht steht, immer gleich μ ist. Diese Gröſse μ ist das, was man das **Moment der Elasticität** nennt, welches in jedem Punkte, der Krümmung der Platte, oder dem Contingenzwinkel des mittleren Streifens proportional ist.

308.

Man kann jetzt leicht die Gleichungen des Gleichgewichtes dieser Platte bilden. Nennt man zuerst T' das, was T im Punkte M wird, so sieht man, daſs die unendlich kleine Schichte, die $Mmm'M'$ entspricht, einerseits durch diese Kraft T' angezogen oder abgestoſsen wird, und andererseits durch eine Kraft, die T gleich und entgegengesetzt ist; und da, nach der Voraussetzung, keine gegebene Kraft auf diese Schichte wirkt, so muſs man $T' = T$ haben. Die Kraft T ist daher in der ganzen Länge der Platte constant, und daher der nach dieser Länge wirkenden Seitenkraft der gegebenen Kraft,

die an dem freien Ende wirkt, proportional. Die Ausdehnung δ ist ebenfalls constant, dieser Kraft proportional und positiv oder negativ, je nachdem diese Kraft die longitudinalen Streifen zu verlängern oder zu verkürzen strebt. Sie hat auf die Gestalt der Platte gar keinen Einfluſs; hat man sie aber gemessen, so kann sie dazu dienen, den Werth der Constanten a, in Beziehung auf den Stoff der Platte, zu bestimmen. Bezeichnet man durch Π ein Gewicht, welches der Kraft gleich ist, die die Platte im Sinne der Länge fortzieht, und durch ω die Fläche jedes transversalen Schnittes der Platte, so hat man

$$\omega = 2\lambda\varepsilon, \quad T = \Pi = a\omega\delta, \quad a = \frac{\Pi}{\omega\delta}.$$

Um die Gestalt der Platte zu bestimmen, ziehe man durch den Punkt A, in der Ebene des mittleren Streifens, zwei rechtwinklige Axen Ax und Ay, von welchen die erste die krumme Linie AMB berührt und die Richtung der Platte in ihrem natürlichen Zustande darstellt, und die zweite nach ihrer Concavität gerichtet ist. Seyen x und y die auf diese beiden Axen bezogenen Coordinaten eines Punktes des mittleren Fadens; a und b die seines freien Endes, welches wir für den Angriffspunkt der gegebenen Kraft nehmen, die die Platte im Gleichgewichte hält, P und Q die Seitenkräfte dieser Kraft nach den Verlängerungen von a und b. Durch den Punkt, der x und y entspricht, ziehe man die auf der Ebene der Figur senkrecht stehende Axe, welcher das durch μ bezeichnete Moment entspricht, und mache einen Schnitt, der auf dem mittleren Streifen senkrecht steht. Damit der Theil der Platte, welcher zwischen diesem Schnitte und dem freien Ende enthalten ist, im Gleichgewichte sey, muſs das Moment μ, mit den Momenten von P und Q, die sich auf dieselbe Axe beziehen, eine Summe geben, die gleich Null ist, indem man auf die Richtung Rücksicht nimmt, in welcher die Kräfte, deren Moment μ ist, und die Kräfte P und Q, diesen Theil der Platte zu drehen streben. Auf diese Weise hat man

$$\mu + P(b-y) - Q(a-x) = o.$$

Nimmt man die Abscisse x für die unabhängige Veränderliche, und bemerkt, daſs die Platte gegen die Axe Ax convex ist, so hat man

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2} : \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

wo man die Wurzelgröfse als positiv betrachtet.

Substituiert man diesen Werth in den von μ, und diesen wieder in die vorhergehende Gleichung, und setzt, zur Abkürzung,

$$\tfrac{2}{3}\,\alpha\lambda\epsilon^3 = \beta,$$

so folgt hieraus

$$\beta\,\frac{d^2y}{dx^2} = [Q(a-x) - P(b-y)]\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad (1)$$

als Gleichung der krummen Linie, die durch die elastische Platte, im Zustande des Gleichgewichtes, gebildet wird.

Ihr Integral enthält zwei willkührliche Constanten, die man durch die Bedingungen $y = \epsilon$ und $\frac{dy}{dx} = o$, wenn $x = o$ ist, oder, wenn man will, $y = o$ und $\frac{dy}{dx} = o$, für diesen Werth von x, da ϵ sehr klein ist, bestimmt. Setzt man nachher, in diesem Integrale, $x = a$ und $y = b$, so hat man eine Gleichung in a und b, die man mit derjenigen verbindet, welche sich aus der gegebenen Länge der Platte ergiebt. Alsdann hat man die zwei erforderlichen Gleichungen, um diese Unbekannten a und b zu bestimmen, und die sogenannte elastische Linie ist vollkommen bestimmt.

309.

Wenn die Platte, statt eingeklemmt zu seyn, an ihrem Ende A völlig frei ist, so mufs man, um sie im Gleichgewichte zu halten, an dieses Ende eine Kraft anbringen, deren Seitenkräfte P und Q gleich und entgegengesetzt sind. Nimmt man das entsprechende Ende des mittleren Streifens für seinen Angriffspunkt, so mufs aufserdem die Mittelkraft von P und Q durch diesen Punkt gehen; dies erfordert, dafs man

$$Qa = P(b - \epsilon)$$

habe.

Diese Gleichung ist hinreichend, wenn die Platte durch eine feste Axe gehalten wird, die durch diesen Endpunkt des mittleren Streifens geht und im Sinne der Breite gerichtet ist.

Liegt sie blos auf einer Ebene, die auf ihrer Länge senkrecht ist, wodurch sie nicht verhindert wird, sich um die Kante einer ihrer beiden Flächen zu drehen, so mufs die Reibung dieser Kante gegen die Ebene, oder eine andere Kraft, die Platte am Gleiten verhindern.

Ist die Platte nicht eingeklemmt, so ist die Richtung der Ebene, die sie in A berührt, nicht bekannt; setzt man noch immer in diesen Punkt den Anfangspunkt der Coordinaten x und y, so hat man noch immer $y = \varepsilon$, oder $y = o$, wenn $x = o$ ist; man kann aber alsdann die Axe der x nicht mehr auf der Tangente in A nehmen, deren Richtung nicht a priori gegeben ist. Diese Axe ist alsdann die gegebene Richtung der Kraft P, und die Gleichung $\frac{dy}{dx} = o$ für $x = o$, mufs, um die willkührlichen Constanten zu bestimmen, durch die vorhergehende Gleichung ersetzt werden, die sich auf die Momente der Kräfte P und Q bezieht, welche man auf $Qa = Pb$ reducieren kann.

310.

Man nehme an, es sey $P = o$, so dafs die Platte durch eine Kraft Q gebogen wird, die auf der ursprünglichen Richtung senkrecht steht. Dies ist z. B. der Fall bei einer horizontalen Platte, die an einem Ende eingeklemmt ist, und an deren anderem Ende man ein gegebenes Gewicht Q aufhängt.

Ich setze in diesem Falle

$$\beta = c^2 Q,$$

wo c eine Linie ist, deren gegebene Länge im Allgemeinen sehr grofs ist, wofern das Gewicht Q nicht ebenfalls sehr beträchtlich ist. Die Gleichung (1) wird

$$c^2 \frac{d^2y}{dx^2} : \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = a - x, \tag{2}$$

und, wenn man integriert, so dafs $\frac{dy}{dx} = o$ ist, wenn $x = o$, so hat man

$$2 c^2 \frac{dy}{dx} : \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = 2ax - x^2.$$

Hieraus findet man

$$dy = \frac{(2ax - x^2)\,dx}{\sqrt{4c^4 - (2ax - x^2)^2}}$$

$$ds = \frac{2c^2 dx}{\sqrt{4c^4 - (2ax - x^2)^2}},$$

wo ds das Differentialelement der krummen Linie ist. Diese Formeln lassen sich, vermittelst der elliptischen Functionen, genau integrieren, wegen der Gröfse von c hat man aber beinahe $s = x$ und man kann den Werth von dy auf

$$dy = \frac{1}{2c^2}(2ax - x^2)\,dx$$

reducieren, woraus man

$$6c^2 y = 3ax^2 - x^3$$

als Gleichung der krummen Linie findet.

Die Platte wird sich nur wenig von der horizontalen Richtung entfernen, die Abscisse a kann daher für ihre Länge genommen werden und die Ordinate b wird ihre gröfste Entfernung ausdrücken. Da

$$3Qc^2 = \alpha\omega\varepsilon^2$$

ist, wenn man $2\varepsilon\lambda = \omega$, wie vorher, setzt, so hat man

$$\alpha\omega\varepsilon^2 b = a^3 Q,$$

wenn $x = a$ und $y = b$ ist. Hieraus folgt, dafs, wenn die Natur der Platte dieselbe bleibt, die Gröfse b, um welche sie sich biegt, dem Gewichte Q und dem Cubus der Länge a proportional ist, und im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Dicke ε und der Fläche ω des transversalen Schnittes steht.

Substituiert man statt $\alpha\omega$ seinen Werth $\frac{\Pi}{\delta}$ des §. 308, und nennt h die ganze Verlängerung $a\delta$ der Platte, die durch das Gewicht Π hervorgebracht wird, so hat man

$$b = \frac{h a^2 Q}{\varepsilon^2 \Pi}.$$

Setzt man $\Pi = Q$, so findet man daraus, dafs, wenn ein Gewicht Q, das an das freie Ende einer elastischen Platte angebracht wird, in dem Sinne der Länge und dann senkrecht auf diese Länge wirkt, die Ausdehnung h und die Biegung b, welche im Verhältnisse zur Länge a sehr klein angenom-

men werden, sich zu einander verhalten, wie die Quadrate der Dicke und dieser Länge.

311.

Wie auch die Kräfte P und Q beschaffen sind, immer erhält man ein erstes Integral der Gleichung (1), wenn man sie auf die Form der Gleichung (2), durch Umbildung der Coordinaten, zurück bringt. Wir beschränken uns darauf, den Fall zu betrachten, wo die Platte, die sich auf eine Ebene stützt, aber nicht eingeklemmt ist, sich nur wenig von ihrer natürlichen Gestalt entfernt. Dies ist z. B. der Fall bei einer Feder, die mit ihrem unteren Ende A auf einer horizontalen Ebene liegt und an ihrem oberen Ende B mit einem gegebenen Gewichte belastet ist. Man setzt voraus, dafs die Feder, wenn sie sich unter diesem Gewichte biegt, sich nur wenig von der verticalen Linie AB entfernt, und dafs die Tangente der krummen Linie, welche sie im Zustande des Gleichgewichtes bildet, in der ganzen Länge nur einen sehr kleinen Winkel mit dieser geraden Linie macht. Die Figur 78 zeigt verschiedene Gestalten, welche sie, in diesem Zustande, annehmen kann.

Man nehme als Axe der x und y die verticale Linie Ax, die der Schwere entgegengesetzt gerichtet ist und die horizontale Ay. Die Gröfse $\frac{dy}{dx}$ wird, der Voraussetzung nach, sehr klein seyn; wir vernachlässigen ihr Quadrat in der Gleichung (1), auch hat man $Q = o$, weil die Kraft, die an dem Ende B wirkt, vertical ist. Hieraus folgt, vermöge der Gleichung $Qa = Pb$ des §. 309, $b = o$, und da das Gewicht P von B nach A gerichtet ist, so mufs man das Zeichen dieser Kraft in der Gleichung (1) ändern, welche voraussetzt, dafs sie in entgegengesetzter Richtung wirkt. Auf diese Weise wird diese Gleichung einfach

$$c^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -n^2 y,$$

indem man, zur Abkürzung,

$$\beta = \tfrac{1}{3} \alpha \omega \varepsilon^2 = \frac{c^2}{n^2} P$$

setzt. Man bezeichnet hier durch ω die Fläche des Schnittes

der Feder, der senkrecht auf ihrer Länge steht, durch ε seine halbe Dicke, in dem Sinne, in welchem sie gebogen ist und durch α eine Gröſse, die von dem Stoffe, aus welchem sie gebildet ist, abhängt. Diese drei Gröſsen sind, nach der Voraussetzung, constant, und daher ist c eine Linie von constanter und gegebener Gröſse.

Da $y = o$ ist, wenn $x = o$ ist, so findet man aus dieser Gleichung

$$y = k \sin \frac{\pi x}{c}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\pi k}{c} \cos \frac{\pi x}{c},$$

wo k eine willkührliche Constante ist, die Null oder im Verhältnisse zu c sehr klein ist.

Wenn man $k = o$ hat, so bleibt die Feder gerade und die Länge AB wird ein wenig durch den Druck des Gewichtes P vermindert seyn. Ist dieser Coefficient k nicht Null, so biegt sich die Feder; im Punkte B hat man $x = a$ und $y = b = o$; bezeichnet man durch i eine ganze Zahl, so muſs man daher

$$a = ic$$

als Werth von a oder AB haben. Nennt man l die Länge der Feder, so hat man auch

$$l = \int_o^a \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx = \int_o^a \sqrt{1 + \frac{\pi^2 k^2}{c^2} \cos^2 \frac{\pi x}{c}}\, dx;$$

wenn man die vierte Potenz von $\frac{k}{c}$ vernachlässigt und für a seinen Werth setzt, so erhält man

$$l = ic\left(1 + \frac{\pi^2 k^2}{4c^2}\right),$$

woraus sich

$$k = \frac{2c}{\pi} \sqrt{\frac{l}{ic} - 1} \qquad (3)$$

ergiebt. Der Coefficient von k ist daher Null oder wird durch diese Formel ausgedrückt.

312.

Aus diesem Resultate ergiebt sich Folgendes:

1) So lange l kleiner als c ist, ist die Formel (3) für alle Werthe der ganzen Zahl i imaginär, man kann also für den Werth des Coefficienten k nichts Anderes als Null

nehmen und die Feder wird durch das Gewicht P gar nicht gebogen.

2) Man nehme nun an, l übertreffe c, sey es nun, dafs man die Länge der Feder vermehrt, oder die Gröfse c vermindert hat, indem man das Gewicht P wachsen liefs, so wird der Werth von k, der von Null verschieden ist und $i = 1$ entspricht, reell seyn und die Feder kann durch dieses Gewicht gebogen werden. Bezeichnet man durch f einen sehr kleinen Bruch und zetzt

$$l = c\left(1 + \frac{\pi^2 f^2}{4}\right),$$

so hat man

$$i = 1, \quad a = c, \quad k = fa,$$

und die Gleichung der krummen Linie, welche die Feder bildet, ist daher

$$y = fa \sin\frac{\pi x}{a},$$

woraus man sieht, dafs sie die verticale Linie nicht zwischen den zwei Punkten A und B schneiden wird.

3) Wächst das Verhältnifs von $\frac{l}{c}$ immer fort, bis es gröfser als 2 wird, so ist der Werth von k, der $i = 2$ entspricht, reell und die Feder kann eine Gestalt annehmen, die von der vorhergehenden verschieden ist. Bezeichnet man durch f' einen sehr kleinen Bruch und setzt

$$l = 2c\,(1 + \pi^2 f'^2),$$

so hat man

$$i = 2, \quad a = 2c, \quad k = f'a,$$

also

$$y = f'\, a \sin\frac{2\pi x}{a},$$

woraus hervorgeht, dafs, in diesem Falle, die krumme Linie die Verticale in der Mitte von AB schneidet, welche $x = \frac{1}{2} a$ entspricht.

4) Fährt man so fort, so sieht man, dafs, wenn l ic ein wenig übertrifft und man durch φ einen sehr kleinen Bruch bezeichnet,

$$l = ic\left(1 + \frac{i^2 \pi^2 \varphi^2}{4}\right)$$

ist, man kann daher

$$a = ic, \quad k = \varphi a$$

nehmen, woraus sich

$$y = \varphi a \sin \frac{i\pi x}{a}$$

ergiebt; dies ist die Gleichung einer krummen Linie, die die gerade AB in einer Anzahl von $i + 1$ gleichweit abstehender Punkte schneidet, wenn man die Punkte A und B mitzählt.

Uebertrifft l ein Vielfaches von c, um eine Gröfse, die nicht sehr klein ist, so hört der Werth von k, der durch die Formel (3) gegeben ist, auf, sehr klein im Verhältnisse zu c zu seyn, und da der Werth von $\frac{dy}{dx}$ alsdann kein sehr kleiner Bruch mehr ist, so kann die Gestalt der Feder nicht mehr durch die vorhergehende Analyse bestimmt werden. Man bemerke, dafs die geradlinige Figur, die $k = o$ entspricht, möglich ist; sie ist aber nur dann dauernd und nothwendig, wenn l kleiner als c ist.

313.

Unter der Kraft einer Feder, die man sich, um einen bestimmten Fall zu betrachten, vertical denken mag, versteht man das gröfste Gewicht, das sie, ohne sich zu biegen, tragen kann. Dieses Gewicht P ist durch die Gleichung $c = l$ bestimmt, woraus sich

$$P = \frac{\pi^2 \alpha \omega \varepsilon^2}{3 l^2}$$

ergiebt, und man sieht hieraus, dafs, wenn sonst alles gleich ist die Kraft einer Feder im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates ihrer Länge steht. Ist die Feder ein rechtwinkliges Parallelopipedum, so sieht man auch, dafs, wenn man den Versuch macht, allmälich die zusammenstofsenden Flächen zu biegen, die Kraft dem Quadrate der Dicke, die die Feder senkrecht auf der Fläche, die man biegen will, hat, proportional ist. Was die absolute Gröfse von P betrifft, so berechnet man sie, indem man in die vorhergehende Formel den Werth von α setzt, den man entweder aus der Ausdehnung h dieser Feder, oder aus der Biegung c, die ein Gewicht Π hervorbringt, ableitet; nach §. 308 und §. 310, und weil $\alpha\delta = h$ und $a = l$ ist, sind diese Werthe

$$\alpha = \frac{\Pi l}{\omega h}, \quad \alpha = \frac{\Pi l^3}{\omega \varepsilon^2 b},$$

daher hat man

$$P = \frac{\pi \Pi \varepsilon^2}{3lh}, \quad P = \frac{\pi \Pi l}{3b}.$$

314.

Die Resultate des §. 307 lassen sich leicht auf einen elastischen Stab ausdehnen, wenn man annimmt, dafs er im natürlichen Zustande gerade oder einfach gekrümmt ist und, wenn man ihn biegt, noch immer einfach gekrümmt bleibt und keine Windung erleidet.

Man nimmt, in diesem Falle, für den mittleren Streifen, denjenigen, der durch die Schwerpunkte aller Schnitte geht, die auf seiner Länge senkrecht stehen, welche constant oder veränderlich seyn können, sobald ihre Dimensionen, in Beziehung auf den Krümmungshalbmesser des Stabes, sehr klein sind. Sey ω die Fläche eines dieser Schnitte, der durch einen beliebigen Punkt des mittleren Streifens gelegt ist. Man zerlege ω in Elemente, die auf der Ebene dieses Streifens senkrecht stehen; sey $v du$ die Fläche des Elementes, das dem Abstande u dieses Streifens entspricht. Die Veränderliche u kann hier positiv oder negativ seyn und v bezeichnet eine gegebene Function von u. Seyen auch k und $-k'$ die äufsersten Werthe von u, so haben wir

$$\int_{-k'}^{k} v du = \omega, \quad \int_{-k'}^{k} v u du = o,$$

indem die zweite Gleichung daraus entsteht, dafs der Anfangspunkt der Veränderlichen u der Schwerpunkt von ω ist.

Man bezeichne durch σ, σ', δ, δ', ϱ dieselben Gröfsen, wie in §. 307, und durch γ, γ', r das, was σ, σ', ϱ im natürlichen Zustande des elastischen Stabes waren; man hat, für die zwei Zustände dieses Stabes,

$$\gamma' = \gamma + \frac{u\gamma}{r}, \quad \sigma' = \sigma + \frac{u\sigma}{\varrho},$$

und, wenn man von einem zum anderen übergeht,

$$\sigma = \gamma\,(1 + \delta), \quad \sigma' = \gamma'\,(1 + \delta').$$

Vernachlässigt man daher die Produkte $\frac{\delta u}{r}$ und $\frac{\delta u}{\varrho}$, so findet man daraus

$$\delta' = \delta + u\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right),

welcher Werth mit dem des angeführten §. zusammenfällt, für den Fall, wenn der Stab im natürlichen Zustande gerade ist, wo man $r = \infty$ hat.

Sey auch T die Summe der auf ω senkrecht stehenden Kräfte, welche einen der zwei Theile des Stabes, die durch diesen senkrechten Schnitt getrennt sind, anziehen oder abstofsen. Man nenne μ das Moment dieser Kräfte, welche senkrecht auf der Ebene des mittleren Streifens stehen, in Beziehung auf die Axe, die durch den Schwerpunkt von ω geht, so hat man, nach der in §. 307 gemachten Voraussetzung,

$$T = \alpha \int_{-k'}^{k} \delta' v\, du, \quad \mu = \alpha \int_{-k_1}^{k} \delta' v u\, du,$$

wo α eine Gröfse ist, die vom Stoffe des Stabes abhängt, welche in der Ausdehnung eines jeden Schnittes ω dieselbe bleibt, aber von einem Punkte des mittleren Streifens zum anderen sich ändern kann. Substituiert man für δ' seinen vorhergehenden Werth und setzt, zur Abkürzung,

$$\int_{-k'}^{k} v u^2 du = \tfrac{1}{3} \omega q^2,$$

so folgt hieraus

$$T = \alpha \omega \delta, \quad \mu = \frac{\alpha \omega q^2}{3} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} \right).$$

Ist der elastische Stab in seinem natürlichen Zustande, oder nachdem er seine Gestalt geändert hat, doppelt gekrümmt, so hat die Kraft T noch immer diesen Werth. Da aufserdem der mittlere Streifen derjenige ist, welcher durch die Schwerpunkte aller senkrechten Schnitte geht, und bezeichnet man durch r und ϱ seine Krümmungshalbmesser, für einen und denselben Punkt, vor und nach dieser Aenderung, so kann man diesen Werth von μ für das Moment der Elasticität in Beziehung auf eine Axe nehmen, die durch diesen Punkt geht und auf der Krümmungsebene des mittleren Fadens senkrecht steht. Aufserdem mufs man aber auf die Windung des Stabes Rücksicht nehmen, wie wir es sogleich thun wollen.

315.

Vergleicht man diesen Werth von μ mit dem des §. 307, so sieht man, dafs die zweite Differentialgleichung der ebenen krummen Linie, welche der mittlere Streifen eines elastischen

Stabes bildet, der keine Windung erlitten hat, sich nur darin von derjenigen unterscheidet, die der elastischen Platte, im eigentlichen Sinne, entspricht, dafs sie $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}$ statt $\frac{1}{\varrho}$ und die Gröfse q statt der halben Dicke ε enthält. Ist der Stab gleichartig, und bildet er, in seinem natürlichen Zustande, ein Prisma oder einen Cylinder, so sind die drei Gröfsen α, ω, q constant und man hat $r = \infty$. Hieraus findet man, dafs die Biegung eines Stabes, der im natürlichen Zustande gerade ist, welche durch ein Gewicht Q, das senkrecht auf seine Richtung wirkt, hervorgebracht wird, und die Kraft dieser Feder, sich aus den Werthen von b und P ergeben, die in den §§. 310 und 313 gefunden worden sind, wenn man q an die Stelle von ε setzt. Durch diese Substitution ergiebt sich, wenn l die Länge des Stabes bedeutet,

$$b = \frac{l^3 Q}{\alpha \omega q^2}, \quad P = \frac{\pi^2 \alpha \omega q^2}{3 l^2},$$

oder, was dasselbe ist,

$$b = \frac{\pi^2 l Q}{3 P}, \quad P = \frac{\pi^2 \alpha}{l^2} \int_{-k'}^{k} v u^2 du.$$

Für zwei verschiedene Stäbe, welche dieselbe Länge haben, stehen daher die Biegungen, die dasselbe Gewicht hervorbringt, im umgekehrten Verhältnisse der Kräfte der Feder, so dafs es hinreicht, die Gröfsen dieser Kräfte, für jede Voraussetung, die man über den Umring des senkrechten Schnittes macht, zu vergleichen.

Man nehme an, der senkrechte Schnitt sey ein gleichseitiges Dreieck und man wolle den Stab biegen, so dafs die Fläche, welche der Grundlinie dieses Dreiecks entspricht, eine cylindrische Oberfläche wird, die concav oder convex seyn kann. Seyen a und c die Grundlinie und Höhe dieses Dreiecks. Im Falle der Convexität, nach welcher die positiven Werthe von u gerichtet sind (§. 307), hat man

$$k = \tfrac{1}{3} c, \quad k' = \tfrac{2}{3} c, \quad v = \frac{a}{c} (\tfrac{2}{3} c + u),$$

und es folgt daraus

$$P = \frac{\pi^2 \alpha a c^3}{36 l^2}.$$

Im Falle der Concavität hat man

$$k = \tfrac{2}{3}c, \quad k' = \tfrac{1}{3}c, \quad v = \frac{a}{c}\,(\tfrac{1}{3}c + u)$$

woraus sich

$$P = \frac{\pi^2 \alpha a c^2}{12\, l^2}$$

ergiebt; dies zeigt, dafs, in diesem zweiten Falle, die Kraft der Feder das Dreifache von dem ist, was sie im ersten Falle war.

Ist der senkrechte Schnitt ein Quadrat, welches durch f^2 dargestellt wird, und will man die Feder so biegen, dafs zwei ihrer entgegengesetzten Flächen cylindrische Oberflächen werden, so hat man

$$k = k' = \tfrac{1}{2}f, \quad v = f, \quad P = \frac{\pi^2 \alpha f^4}{12\, l^2}.$$

Ist er ein Kreis, dessen Halbmesser k ist, so hat man

$$k' = k, \quad v = 2\sqrt{k^2 - u^2}, \quad P = \frac{\pi^3 \alpha k^4}{4\, l^2},$$

und wenn man annimmt, dafs der Flächeninhalt des senkrechten Schnittes in beiden Fällen derselbe ist, so dafs man $f^2 = \pi k^2$ hat, so sieht man, dafs die Kraft der Feder, welche im ersten Falle statt hat, diejenige, die im zweiten statt findet, im Verhältnisse von π zu 3 übertrifft.

Man nehme ferner an, dafs die cylindrische Feder eine hohle Röhre sey, deren concentrische Oberflächen, die innere und äufsere nemlich, die Halbmesser g und g' haben. Um die Kraft dieser Feder zu bestimmen, mufs man allmälich g und g' an die Stelle von k in den letzten Werth von P setzen und die Resultate von einander abziehen, woraus sich

$$P = \frac{\pi^3 \alpha (g'^2 + g^2)(g'^2 - g^2)}{4\, l^2}$$

ergiebt. Ist die Fläche $\pi\,(g'^2 - g^2)$ des senkrechten Schnittes gleich πk^2, so hat man daher

$$P = \frac{\pi^3 \alpha k^2 (k^2 + 2g^2)}{4\, l^2},$$

woraus man findet, dafs, wenn das Volumen, die Länge und der Stoff dieselben sind, die Kraft einer hohlen Feder gröfser ist, als die einer ausgefüllten, und zwar im Ver-

hältnisse von $1 + \frac{2g^2}{k^2}$ zur Einheit; wo $2g$ der innere Durchmesser und πk^2 der Flächeninhalt des normalen Schnittes ist.

316.

Man bilde jetzt die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Stabes, dessen Punkte alle durch gegebene Kräfte getrieben werden.

Man nenne A und B die beiden Endpunkte des mittleren Streifens. Seyen x, y, z die drei rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes M dieser krummen Linie, s der Bogen AM; ω der senkrechte Durchschnitt des Stabes, der durch den Punkt M geht, γ seine Dichtigkeit in diesem Punkte und daher $\gamma\omega ds$ die Masse einer unendlich dünnen Schichte des Stabes. Man bezeichne durch $X\gamma\omega ds$, $Y\gamma\omega ds$, $Z\gamma\omega ds$ die gegebenen Kräfte, welche auf diese Masse, parallel mit den Axen der x, y, z wirken, so daſs X, Y, Z diese Kräfte, auf die Einheit der Massen bezogen, sind. Die Summe ihrer Seitenkräfte, die nach der Linie, welche in M den mittleren Streifen berührt, gerichtet sind und den Bogen s zu vergröſsern streben, ist

$$\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)\gamma\omega ds.$$

Man bezeichne auch durch T die Kraft, die von der Wirkung eines Theils des Stabes auf den anliegenden Theil herrührt, welche an eine der Flächen der Schichte $\gamma\omega ds$, senkrecht auf ω angebracht ist und den Bogen s zu vermindern oder zu vergröſsern strebt, je nachden sie positiv oder negativ ist. Die andere Fläche von $\gamma\omega ds$ wird, in entgegengesetztem Sinne, durch eine Kraft, die gleich $T + dT$ ist, angezogen oder abgestoſsen; damit also diese Schichte im Gleichgewichte sey, muſs die Kraft dT der gegebenen Tangentialkraft gleich und entgegengesetzt seyn, oder es muſs

$$dT + \gamma\omega\,(Xdx + Ydy + Zdz) = o \qquad (a)$$

seyn, was mit der Gleichung (3) des §. 300 übereinstimmt.

Da der Stoff der Platte nur wenig ausdehnbar ist, so kann man in dieser Gleichung (a), für γ und ω die Dichtigkeit und den senkrechten Schnitt des Stabes im Punkte M wie

sie im natürlichen Zustande sind, nehmen. Sind diese beiden Gröfsen constant und ist die in Klammern eingeschlossene Formel ein vollständiges Differential, so erhält man durch die Integration sogleich den Werth von T, und da man $T = \alpha\omega\delta$ (§. 307) hat, so findet man daraus die positive oder negative Ausdehnung des Elementes ds, welches sich in dem Verhältnisse von $1 + \delta$ zur Einheit verlängert haben wird. Hierdurch erfährt man aber weder die Ausdehnung des senkrechten Schnittes ω, noch die Aenderung der Dichtigkeit des Stabes im Punkte M. Nach dem, was ich aber in der im Anfange dieses Abschnittes angeführten Abhandlung gezeigt habe, ist die Verlängerung oder Verkürzung von ds immer von einer Verminderung oder Vermehrung von ω begleitet, die aber so beschaffen ist, dafs das Volumen ωds in demselben Sinne wie ds und die Dichtigkeit γ in entgegengesetztem Sinne sich ändert. Hieraus folgt, dafs, wenn ein gleichartiger, prismatischer oder cylindrischer Stab, an einem Ende befestigt ist, und an dem anderen durch eine Kraft gezogen wird, die nach der Verlängerung seiner Länge gerichtet ist, er zugleich eine Ausdehnung und Vermehrung des Volumens erleidet, die dieser Kraft proportional ist, was wirklich durch die Erfahrung bestätigt ist. Liegt dagegen dieser Stab senkrecht auf einer horizontalen Ebene, und ist er in seinem oberen Theile mit einem Gewichte beladen, welches ihn nicht biegt, so wird er sich verkürzen und zugleich wird sein Volumen, der Gröfse dieses Gewichtes proportional, vermindert werden.

317.

Man nehme auf dem Bogen AM des mittleren Streifens einen Punkt m, der unendlich nahe bei M ist; durch diesen Punkt m lege man einen senkrechten Schnitt, und denke sich, dafs der zwischen diesem Schnitte und dem Endpunkte A enthaltene Theil des Stabes völlig unbeweglich gemacht worden sey, und dafs der Theil, welcher zwischen dem anderen Ende B und dem Schnitte, der durch den Punkt M gelegt ist, enthalten ist, blos seine Gestalt nicht ändern kann. Dies angenommen, suche man die Bedingungen des Gleichgewichtes dieses zweiten Theils, den wir K nennen. In Folge der Windung des Stabes werden die Punkte der Schichte,

die zwischen den zwei durch M und m gelegten senkrechten Schnitten enthalten ist, durch Kräfte getrieben, welche die verschiedenen longitudinalen Streifen wieder auf zu winden streben und in Ebenen wirken, die auf Mm, d. h. auf der Linie, die in M den mittleren Streifen berührt, senkrecht stehen. Diese Kräfte werden K um diese gerade Linie zu drehen streben, und zwar in entgegengesetztem Sinne der Windung. Sey T ihr Moment in Beziehung auf diese gerade Linie, das man das Windungsmoment des Stabes, für den Punkt M, nennen kann. Zieht man durch diesen Punkt Linien, die mit den Axen der x, y, z parallel sind, und bemerkt man, daſs die Axe dieses Momentes, mit diesen Geraden, Winkel einschlieſst, deren Cosinus $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sind, so findet man daraus (§. 281)

$$-\tau\frac{dx}{ds},\quad -\tau\frac{dy}{ds},\quad -\tau\frac{dz}{ds}$$

für die Momente der Kräfte, welche auf K im Sinne der Drehung wirken, in Beziehung auf diese drei Parallelen.

Man bezeichne durch μ das Moment der Elasticität in Beziehung auf den Punkt M, d. h. das Moment der Kräfte, deren Summe T ist, in Beziehung auf eine Axe, die durch diesen Punkt gezogen ist und auf der Krümmungsebene des mittleren Streifens senkrecht steht; r und ϱ seyen die Krümmungshalbmesser in diesem Punkte, im natürlichen Zustande und nachdem die Platte ihre Gestalt geändert hat, und β bezeichne eine positive Gröſse, welche vom Stoffe und dem senkrechten Schnitte im Punkte M abhängt, so haben wir (§. 314)

$$\mu = \beta\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right),$$

und wenn man f, g, h die Winkel nennt, welche die Axe dieses Momentes mit den Linien macht, die, den Axen der x, y, z parallel, durch den Punkt M gezogen sind, so sind die Momente der Elasticität in Beziehung auf diese drei geraden Linien

$$\mu\cos f,\quad \mu\cos g,\quad \mu\cos h.$$

Sey M' ein beliebiger Punkt des Bogens MB, x', y', z' seine drei Coordinaten, s' der Bogen AM' und γ', ω', X', Y', Z'

das, was γ, ω, X, Y, Z in Beziehung auf den Punkt M' werden. Nennt man l die Länge des mittleren Streifens und setzt

$$\int_s^l [Y'(x'-x) - X'(y'-y)]\,\gamma'\omega' ds' = Z_1,$$

$$\int_s^l [X'(z'-z) - Z'(x'-x)]\,\gamma'\omega' ds' = Y_1,$$

$$\int_s^l [Z'(y'-y) - Y'(z'-z)]\,\gamma'\omega' ds' = X_1,$$

so sind diese drei Gröfsen X_1, Y_1, Z_1 die Momente der gegebenen Kräfte, die auf K wirken, in Beziehung auf die Axen, welche durch den Punkt M, nach den Richtungen der x, y, z gezogen sind.

Endlich nehme man an, es wirkten noch besondere Kräfte auf das freie Ende von K; man bezeichne durch M, Q, R die Summen ihrer Seitenkräfte, die mit den Axen der x, y, z parallel sind und durch a', b', c' die Coordinaten des Angriffspunktes ihrer Mittelkraft, so sind ihre Momente in Beziehung auf dieselben Axen wie Z_1, Y_1, X_1,

$$Q(a'-x) - P(b'-y)$$
$$P(c'-z) - R(a'-x)$$
$$R(b'-y) - Q(c'-z),$$

und wenn man durch a, b, c, die Coordinaten des Endpunktes B des mittleren Streifens bezeichnet, so kann man diese Momente durch

$$Q(a-x) - P(b-y) + R'$$
$$P(c-z) - R(a-x) + Q'$$
$$R(b-y) - Q(c-z) + P'$$

ersetzen, indem man, zur Abkürzung,

$$Q(a'-a) - P(b'-b) = R'$$
$$P(c'-c) - R(a'-a) = Q'$$
$$R(b'-b) - Q(c'-c) = P'$$

setzt.

Im Allgemeinen sind die Coordinaten a', b', c' von a, b, c verschieden, weil die äufsersten Kräfte P, Q, R nicht unmittelbar an den elastischen Stab angebracht sind und an den Endpunkten eines Hebelarmes wirken. Mögen nun diese Kräfte eine einzige Mittelkraft haben oder nicht, immer sind

die Gröfsen P', Q', R' ihre Momente in Beziehung auf Axen, die durch den Punkt B, mit denen der x, y, z parallel, gezogen sind. Nimmt man daher an, dafs in diesem Punkte

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha', \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta', \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma'$$

ist, und setzt man

$$P'\cos\alpha' + Q'\cos\beta' + R'\cos\gamma' = L,$$

so drückt diese Gröfse L das Moment der äufsersten Kräfte in Beziehung auf die Tangente am Punkte B (§. 281) aus, woraus man schon schliefsen kann, dafs L das Moment der äufsersten Windung, oder der Werth von τ in Beziehung auf denselben Punkt seyn wird.

Dies vorausgesetzt, so ist es für das Gleichgewicht des Theils K des elastischen Stabes hinreichend, dafs die Summe der Momente aller Kräfte, die auf seine verschiedenen Schichten und an den Endpunkten wirken, in Beziehung auf jede Axe, Null sey, was die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mu\cos f - \tau\frac{dx}{ds} + X_1 + P' + R(b-y) - Q(c-z) &= o \\ \mu\cos g - \tau\frac{dy}{ds} + Y_1 + Q' + P(c-z) - R(a-x) &= o \\ \mu\cos h - \tau\frac{dz}{ds} + Z_1 + R' + Q(a-x) - P(b-y) &= o \end{aligned}\right\} (b)$$

giebt.

318.

Nach den Formeln des §. 19 hat man

$$\cos f = \frac{dyd^2z - dzd^2y}{\lambda ds^3}$$

$$\cos g = \frac{dzd^2x - dxd^2z}{\lambda ds^3}$$

$$\cos h = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{\lambda ds^3},$$

wo λds^3 die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der drei Zähler ist. Hieraus folgt

$$d.\mu\cos f = dy\, d.\frac{\mu d^2z}{\lambda ds^3} - dz\, d.\frac{\mu d^2y}{\lambda ds^3}$$

$$d.\mu\cos g = dz\, d.\frac{\mu d^2x}{\lambda ds^3} - dx\, d.\frac{\mu d^2z}{\lambda ds^3}$$

$$d.\mu\cos h = dx\,d.\frac{\mu d^2y}{\lambda ds^3} - dy\,d.\frac{\mu d^2x}{\lambda ds^3},$$

und daher

$$\frac{dx}{ds}\,d.\mu\cos f + \frac{dy}{ds}\,d.\mu\cos g + \frac{dz}{ds}\,d.\mu\cos h = o.$$

Aufserdem hat man

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1$$

$$\frac{dx}{ds}\,d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d.\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d.\frac{dz}{ds} = o.$$

Addiert man daher die Differentiale der Gleichungen (b), nachdem man sie mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ multipliciert hat, so hat man, wenn man reduciert,

$$d\tau = \frac{dx}{ds}dX_1 + \frac{dy}{ds}dY_1 + \frac{dz}{ds}dZ_1,$$

da aber die der Integration unterworfenen Gröfsen in den Werthen von X_1, Y_1, Z_1, an der Gränze $s' = s$ verschwinden, so ist es hinreichend (§. 14), unter dem Integrationszeichen in Beziehung auf x, y, z zu differentiieren, um die Werthe von dX_1, dY_1, dZ_1 zu erhalten. Man hat daher einfach

$$dX_1 = dz\int_s^l Y'\gamma'\omega' ds' - dy\int_s^l Z'\gamma'\omega' ds'$$

$$dY_1 = dx\int_s^l Z'\gamma'\omega' ds' - dz\int_s^l X'\gamma'\omega' ds'$$

$$dZ_1 = dy\int_s^l X'\gamma'\omega' ds' - dx\int_s^l Y'\gamma'\omega' ds'$$

und wenn man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung substituiert, so reduciert sie sich auf $d\tau = o$.

Das Moment der Windung ist daher, in der ganzen Länge des im Gleichgewichte befindlichen Stabes, constant, wie auch die an denselben angebrachten Kräfte beschaffen seyen.

Sein Werth ist daher überall derselbe, wie an den beiden Enden des Stabes, und es ist leicht zu zeigen, dafs man am Punkte B, wie früher gesagt wurde, $\tau = L$ hat. Denn in diesem Punkte hat man $x = a$, $y = b$, $z = c$; die

Integrale X_1, Y_1, Z_1 verschwinden, und die Gleichungen (b) werden

$$\tau \cos\alpha' = \mu \cos f + P'$$
$$\tau \cos\beta' = \mu \cos g + Q'$$
$$\tau \cos\gamma' = \mu \cos h + R'.$$

Da die auf der Krümmungsebene des mittleren Streifens senkrecht stehende Linie und die Berührungslinie dieser krummen Linie auf einander senkrecht stehen, so hat man in demselben Punkte B

$$\cos\alpha' \cos f + \cos\beta' \cos g + \cos\gamma' \cos h = o;$$

wenn man die vorhergehenden Gleichungen zusammen addiert, nachdem man sie mit $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ multipliciert hat, so wird die Gröfse μ verschwinden, und, vermöge des Werthes von L, hat man $\tau = L$.

Nur das Moment der Windung kann aus den Gleichungen des Gleichgewichtes gefunden werden; was aber die Windung selbst betrifft, so ist ihre Gröfse, in der Länge des Stabes, veränderlich, wenn sich der Stoff oder der senkrechte Schnitt von einem Punkte zum anderen ändern. Ist der Stab gleichartig und der senkrechte Schnitt constant, so ist der Unterschied der Windungswinkel an den Endpunkten beider Theile des Stabes derselbe, wenn diese gleich lang sind, und den Längen proportional, wenn sie verschieden sind. Man nehme, um einen bestimmten Fall zu betrachten, an, es werde ein gleichartiger prismatischer oder cylindrischer Stab an einem Ende eingeklemmt, und man bringe an das andere Ende zwei gleiche Kräfte an, die parallel und entgegengesetzt sind und in gleichen Abständen auf zwei verschiedenen Seiten wirken. Dieser Stab wird gerade bleiben, er wird sich aber um sich selbst winden, der Länge und dem Momente dieser zwei Kräfte, in Beziehung auf den mittleren Streifen proportional, welches Moment der Werth der Gröfse L ist. Ich habe aufserdem in der schon (§. 306) angeführten Abhandlung gefunden, dafs, wenn der senkrechte Schnitt dieses Stabes ein Kreis ist, die Gröfse der Windung, bei sonst gleichen Umständen, der vierten Potenz des Durchmessers proportional ist, was auch durch die Erfahrung bestätigt wird.

319.

Zwei der Gleichungen (b) oder zwei beliebige Verbindungen dieser Gleichungen, in welche man den Werth von μ substituiert und L an die Stelle von τ gesetzt hat, dienen dazu, die Figur des Stabes, für den Zustand des Gleichgewichtes, zu bestimmen. Ist er ursprünglich gerade, und sind alle angebrachten Kräfte in derselben Ebene enthalten, so reducieren sich die drei Gleichungen (b) auf eine einzige, welche die der ebenen krummen Linie, die durch den mittleren Streifen gebildet wird, seyn wird.

Man nehme die Ebene dieser Kräfte für die der x und y, so hat man

$$z = o, \quad \cos f = o, \quad \cos g = o$$
$$c = o, \quad c' = o, \quad R = o, \quad \cos \gamma' = o,$$

woraus sich

$$X_1 = o, \quad Y_1 = o, \quad P' = o, \quad Q' = o, \quad \tau = L = o$$

ergiebt, und die zwei ersten Gleichungen (b) verschwinden.

Da $r = \infty$ ist, so reduciert sich der Werth von μ auf $\frac{\beta}{\varrho}$, auch hat man $\cos h = \pm 1$; berücksichtigt man aber die Richtung der Wirkung von T auf den Theil K des Stabes (§. 314), so ist es leicht zu sehen, daſs man $\cos h = -1$, in der dritten Gleichung (b) nehmen muſs, welche, auf diese Weise,

$$\left.\begin{array}{l} \int_s^l [Y'(x'-x) - X'(y'-y)]\,\gamma'\omega' ds' \\ + R' + Q(a-x) - P(b-y) = \frac{\beta}{\varrho} \end{array}\right\} \quad (c)$$

wird, und man bemerkt, daſs, wenn man die Bezeichnungen des §. 314 beibehält, der Werth des Coefficienten β

$$\beta = \alpha \int_{-k'}^{k} v u^2 du$$

seyn wird.

Sind die Kräfte X und Y Null, so fällt diese Gleichung (c) mit der Gleichung (1) des §. 308 zusammen, indem man bemerkt, daſs in dieser die Kräfte P und Q an dem Endpunkte des Stabes selbst wirken, wodurch ihr Moment R' Null wird. In allen Fällen kann man bewirken, daſs durch

die Differentiationen die Integrale, die in der Gleichung (c) enthalten sind, verschwinden, wodurch diese Gleichung in eine Differentialgleichung der vierten Ordnung übergeht.

Ist die Gestalt des Stabes durch die Gleichung (c) bestimmt, so müssen noch aufserdem die daran angebrachten gegebenen Kräfte den Bedingungen des Gleichgewichtes des §. 261 genügen, welche sich, da alle Kräfte in derselben Ebene enthalten sind, auf drei reducieren. Man bezeichne daher durch D und E die Summen der besonderen Kräfte, die auf den Endpunkt A des Stabes, parallel mit den Axen der x und y, wirken, und durch F' ihr Moment in Beziehung auf diesen Punkt A, so dafs D, E, F', in Beziehung auf diesen Punkt das sind, was P, Q, R' in Beziehung auf den anderen Endpunkt B sind. Die drei erwähnten Gleichungen sind alsdann

$$\left.\begin{aligned}
&D + P + \int_o^l X'\gamma'\omega' ds' = o \\
&E + Q + \int_o^l Y'\gamma'\omega' ds' = o \\
&F' + R' + Q(a - x) - P(b - y) \\
&\qquad + \int_o^l [Y'(x' - x) - X'(y' - y)]\,\gamma'\omega' ds' = o
\end{aligned}\right\} (d)$$

wo man statt x und y die Coordinaten des Punktes A setzen mufs.

Sind die beiden Endpunkte des Stabes völlig frei, so sind die äufsersten Kräfte und ihre Momente gegeben. Ist der Stab an seinem Ende A eingeklemmt, so sind die Kräfte D und E und ihr Moment F' unbestimmt, man kennt aber alsdann die Werthe von x, y, $\frac{dy}{dx}$, in Beziehung auf diesen Punkt A. Wird der Stab nur durch den festen Punkt A gehalten, so sind die Kräfte D und E noch immer unbestimmt; ihre Mittelkraft drückt den Widerstand dieses Stützpunktes aus, und ist dem Drucke, den derselbe erleidet, gleich und entgegengesetzt und ihr Moment ist $F' = o$. Man kennt alsdann die Werthe von x und y, aber nicht mehr den von $\frac{dy}{dx}$. Dieselben Bemerkungen gelten für den Punkt B.

320.

Man nehme z. B. an, der Stab sey gleichartig, und ursprünglich prismatisch oder cylindrisch, so dafs die drei Gröfsen γ, ω, β constant sind. Man nehme aufserdem an, dafs nur solche Kräfte auf ihn wirken, die auf seiner Länge senkrecht stehen und ihn nur sehr wenig von seiner anfänglichen Lage entfernen, und nehme, für die Axe der x, den mittleren Streifen in dieser Lage, so hat man alsdann

$$D = o, \quad X = o, \quad P = o,$$

wodurch die erste Gleichung (d) verschwindet. Vernachlässigt man das Quadrat von $\frac{dy}{dx}$, so hat man auch

$$ds = dx, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

und die Gleichung (c) reduciert sich auf

$$\beta \frac{d^2y}{dx^2} = R' + Q(a - x) + \gamma\omega \int_s^l Y'(x' - x)ds'. \quad (e)$$

Differentiiert man einmal, so hat man

$$\beta \frac{d^3y}{dx^3} = - Q - \gamma\omega \int_s^l Yds.$$

Auch hat man (§. 14)

$$d.\int_s^l Y'ds' = - Yds;$$

differentiiert man zum zweiten Male und setzt dx statt ds, so hat man daher

$$\beta \frac{d^4y}{dx^4} = \gamma\omega Y. \quad (f)$$

Die vier willkührlichen Constanten, welche das vollständige Integral dieser letzten Gleichung enthält, kann man durch die Bedingungen, welche sich auf die beiden Enden des Stabes beziehen, bestimmen, indem man bemerkt, dafs der aus dieser Gleichung abgeleitete Werth von y den zwei vorhergehenden Gleichungen, für alle Werthe von x, Genüge leisten mufs. Da aber die Gleichung (f) durch Differentiation aus den beiden anderen abgeleitet ist, so ist es hinreichend, wenn dieser Werth von y diesen Gleichungen für einen bestimmten Werth von x Genüge leistet. Man braucht also nur

$$\beta \frac{d^2y}{dx^2} = R', \quad \beta \frac{d^3y}{dx^3} = - Q \quad (g)$$

für $x = a$ zu haben, welche Bedingungen sich aus der Gleichung (e) und ihrem ersten Differentiale ergeben, wenn man in denselben statt x diesen besonderen Werth setzt. Giebt man x den Werth, der sich auf den Punkt A bezieht, und berücksichtigt die Gleichungen (d), so hat man

$$\beta \frac{d^2 y}{dx^2} = -F', \quad \beta \frac{d^3 y}{dx^3} = E. \qquad (h)$$

Diese Gleichungen geben aber keine neuen Bedingungen, welche von denen, die in den Gleichungen (d) und (g) enthalten sind, verschieden wären, und die man daher, wenn man will, durch das System der Gleichungen (g) und (h) ersetzen kann.

321.

Diese Formeln enthalten auch den Fall, wenn das Gewicht des Stabes berücksichtigt wird. Alsdann nehme ich an, dafs der Punkt A fest ist, und betrachte ihn als Anfangspunkt der Coordinaten x und y, ferner setze ich voraus, dafs die Axe der x, welche die ursprüngliche Richtung des Stabes angiebt, horizontal sey; ich nehme die Axe der positiven y im Sinne der Schwere und bezeichne diese Kraft durch g. Alsdann hat man $Y = g$, und das Integral der Gleichung (f) ist

$$\beta y = \frac{g \gamma \omega}{24} x^4 + C x^3 + C' x^2 + C'' x, \qquad (1)$$

wo C, C', C'' drei willkührliche Constanten bedeuten und die vierte Null ist, weil man am Punkte A, $x = o$ und $y = o$ hat.

Man nehme an, der Stab sey an diesem Endpunkte eingeklemmt, so mufs auch $\frac{dy}{dx} = o$ seyn, wenn $x = o$ ist, woraus $C'' = o$ folgt. Aufserdem sey das Gewicht Q unmittelbar an den anderen Endpunkt B angebracht, so dafs sein Moment R' Null sey. In Folge der Gleichungen (g), die diesem Punkte, oder $x = o$, entsprechen, hat man

$$\tfrac{1}{2} g \gamma \omega a^2 + 6 C a + 2 C' = o$$
$$g \gamma \omega a + 6 C = -Q.$$

Ich finde hieraus die Werthe von C und C', substituiere sie in die Gleichung (1), in welcher ich das Glied $C'' x$ weg-

lasse, nenne q das Gewicht des Stabes, so dafs man $q = g\gamma\omega a$ hat, so ergiebt sich

$$\beta y = \frac{q x^4}{24 a} - \tfrac{1}{6}(Q + q) x^3 + \tfrac{1}{2}(Q + \tfrac{1}{2} q) a x^2,$$

welche Gleichung mit der des §. 310 zusammenfällt, wenn man das Gewicht des Stabes vernachlässigt und Qc^2 statt β setzt. In den beiden Fällen, wenn $Q = o$ und $q = o$ ist, hat man

$$b = \frac{q a^3}{8 \beta}, \quad b = \frac{Q a^3}{3 \beta}$$

für die Ordinate des Punktes B, welche die ganze Biegung des Stabes ausdrückt. Setzt man $Q = q$, so sieht man, dafs die Biegungen, welche ein Gewicht Q hervorbringt, das an dem freien Ende eines horizontalen an seinem anderen Ende eingeklemmten Stabes aufgehängt, oder gleichförmig über die ganze Länge dieses Stabes vertheilt ist, sich wie 8 zu 3 zu einander verhalten.

322.

Wenn der Punkt B ebenso wie der Punkt A fest ist, und auf derselben horizontalen Linie liegt, so mufs $y = o$ seyn, wenn $x = a$ ist, wodurch die Gleichung (1) in folgende

$$\beta y = \frac{q x}{24 a}(x^3 - a^3) + Cx(x^2 - a^2) + C'x(x - a) \quad (2)$$

übergeht, wo q noch immer das Gewicht des Stabes ist. Die Bestimmung der beiden Constanten C und C' bietet folgende Fälle dar:

1) Wenn der Stab an seinen beiden Enden eingeklemmt ist, so mufs man $\frac{dy}{dx} = o$ haben, wenn $x = o$ oder $x = a$ ist; hieraus findet man

$$C = -\tfrac{1}{12} q, \quad C' = \tfrac{1}{24} a q,$$

und die Gleichung (2) wird

$$\beta y = \frac{q x^2 (x - a)^2}{24 a}.$$

Nennt man f den Werth von y, der der Mitte der krummen Linie, die durch den Stab gebildet wird, d. h. dem Werthe $x = \frac{1}{2} a$ entspricht, so hat man

$$f = \frac{q a^3}{16.24.\beta}.$$

2) Wird der Stab nur durch die festen Punkte A und B gehalten, so sind die Lasten dieser Stützpunkte die Kräfte E und Q, wenn man sie in dem, ihrer Richtung entgegengesetzten Sinne, nimmt, und ihre Momente F und R' sind Null (§. 319). In Folge der ersten Gleichungen (g) und (h) hat man $\frac{d^2 y}{d x^2} = o$ für die Werthe $x = o$ und $x = a$, woraus man

$$C = -\tfrac{1}{12} q, \quad C' = o$$

findet. Alsdann hat man

$$\beta y = \frac{q x (a - x)(a^2 + a x - x^2)}{24 a},$$

und der Werth von f ist

$$f = \frac{5 q a^3}{16.24.\beta},$$

d. h. das Fünffache von dem, welcher im ersten Falle statt fand. Vermöge der ersten Gleichungen (g) und (h) hat man auch

$$E = Q = -\tfrac{1}{2} q,$$

welche Werthe auch im ersten Falle statt finden und von selbst einleuchten.

3) Endlich, wenn der Stab an dem Ende A eingeklemmt ist, am anderen Ende nur zurückgehalten wird, hat man $\frac{dy}{dx} = o$, wenn $x = o$ ist, und $\frac{d^2 y}{d x^2} = a$, wenn $x = a$ ist, woraus sich

$$C = -\frac{5q}{48}, \quad C' = \frac{q a}{16}$$

ergiebt, wodurch die Gleichung (2)

$$\beta y = \frac{q x^2 (a - x)(3 a - 2 x)}{48 a}$$

wird. Die zweiten Gleichungen (g) und (h) geben zu gleicher Zeit

$$Q = -\tfrac{3}{8} q, \quad E = \tfrac{5}{8} q,$$

woraus hervorgeht, dafs sich das Gewicht des Stabes auf ungleiche Weise zwischen den zwei Stützpunkten vertheilt

und die Last des eingeklemmten Endes, im Verhältnisse von 5 zu 3, grüfser ist, als die des anderen.

323.

Man nehme noch immer an, dafs die Punkte A und B fest sind und auf derselben horizontalen Linie liegen und dafs der Stab gleichartig und prismatisch ist, und betrachte nun den Fall, wenn die anderen Punkte mit Gewichten beladen sind, die über die ganze Länge ungleich vertheilt sind.

Sey daher

$$\gamma \omega Y = \frac{q}{a} \varphi x,$$

wo φx eine gegebene Function ist, die verschwindet, wenn $x = o$ und wenn $x = a$ ist und q das ganze Gewicht bedeutet, was voraussetzt, dafs man

$$\int_o^a \varphi x d x = a$$

hat.

Diese Function φx kann eine continuierliche oder discontinuierliche seyn, d. h. ihr analytischer Ausdruck kann sich zwischen den äufsersten Werthen $x = o$ und $x = a$ mehrmals ändern, oder, mit anderen Worten, wenn man sie durch die Ordinate einer Linie darstellt, deren Abscisse x ist, so kann diese Linie aus mehreren Stücken, die zu verschiedenen krummen Linien gehören, bestehen. Bezeichnet man durch δ eine Linie, die so klein ist als man will, so kann man z. B. annehmen, dafs φx zwischen den Gränzen $x = o$ und $x = \frac{1}{2} a - \delta$ und zwischen $x = \frac{1}{2} a + \delta$ und $x = a$ Null sey, so dafs die Werthe dieser Function, die nicht Null sind, nur in einer kleinen Ausdehnung δ auf beiden Seiten von $x = \frac{1}{2} a$ statt haben. Dieser Fall findet bei einem Gewichte q statt, das auf die Mitte eines elastischen Stabes wirkt, welchen wir sogleich besonders untersuchen werden.

Mag nun die Function φx eine continuierliche oder discontinuierliche seyn, sobald sie für die Werthe $x = o$ und $x = a$ Null ist, so hat man von $x = o$ bis $x = a$, diesen Werth mit inbegriffen,

$$\varphi x = \frac{2}{a} \Sigma \left(\int_o^a \sin \frac{n \pi x'}{a} \varphi x' d x' \right) \sin \frac{n \pi x}{a}, \quad (a)$$

wo n eine ganze positive Zahl bedeutet, und die Charakteristik Σ eine Summe bezeichnet, die sich auf alle Werthe von n, von $n = 1$ bis $n = \infty$ erstreckt. Diese Formel verdankt man Lagrange, der sie in den älteren Abhandlungen der Turiner Akademie *) mitgetheilt hat; wir werden sie später beweisen. Wenden wir dieselbe an, so wird die Gleichung (f)

$$\beta \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{2q}{a^2} \Sigma \left(\int_o^a \sin \frac{n\pi x'}{a} \varphi x' dx' \right) \sin \frac{n\pi x}{a},$$

und wenn man integriert, und bemerkt, dafs $y = o$ für die Werthe $x = o$ und $x = a$ ist, so hat man

$$\beta y = \frac{2qa^2}{\pi^4} \Sigma \frac{1}{n^4} \left(\int_o^a \sin \frac{n\pi x'}{a} \varphi x' dx' \right) \sin \frac{n\pi x}{a}$$
$$+ x(a-x)\,[Cx + C'(a-x)],$$

wo C und C' willkührliche Constanten sind, die man, wie in den drei Fällen des vorhergehenden Paragraphen, bestimmt.

324.

Man untersuche insbesondere den Fall, wenn das Gewicht q in der Mitte des Stabes aufgehängt ist, d. h. den Fall, wo, wie eben gesagt wurde, die Function $\varphi x'$ für alle Werthe von x', die, wenn auch noch so wenig, von $\frac{1}{2}a$ verschieden sind, Null ist.

Alsdann kann man in dem Factor $\sin \frac{n\pi x'}{a}$, welchen das Integral, in Beziehung auf x', enthält, $x' = \frac{1}{2}a$ setzen, woraus sich

$$\int_o^a \sin \frac{n\pi x'}{a} \varphi x' dx' = \sin \frac{n\pi}{2} \int_o^a \varphi x' dx' = a \sin \frac{n\pi}{2}$$

ergiebt, und wodurch alle Glieder der Summe Σ, welche geraden Zahlen n entsprechen, verschwinden. Ich bezeichne durch i eine gerade oder ungerade Zahl, setze $n = 2i - 1$ und dehne die Summe Σ auf alle Werthe von i, zwischen $i = 1$ und $i = \infty$ aus. Da $\sin \frac{(2i-1)}{2}\pi = -(-1)^i$ ist, so wird die Gleichung (b)

*) T. 3. pg. 261.

$$\beta y = x(a-x)\,[Cx + C'(a-x)] - \frac{2qa^3}{\pi^4}\,\Sigma\,\frac{(-1)^i}{(2i-1)^4}\,\sin\frac{(2i-1)\pi x}{a}.$$

Nach einer bekannten Formel hat man aber, wie man später sehen wird,

$$\Sigma\,\frac{(-1)^i}{(2i-1)^4}\,\sin(2i-1)\,\omega = \frac{\pi\omega^3}{24} - \frac{\pi^3\omega}{32}$$

für alle Werthe von ω von $\omega = o$ bis $\omega = \frac{1}{2}\pi$. Hat man daher $x < \frac{1}{2}a$, so setzt man $\omega = \frac{\pi x}{a}$ und hat

$$\Sigma\,\frac{(-1)^i}{(2i-1)^4}\,\sin\frac{(2i-1)\pi x}{a} = \frac{\pi^4}{96a^3}\,(4x^3 - 3a^2x);$$

ist dagegen $x > \frac{1}{2}a$, so setzt man $\omega = \frac{\pi(a-x)}{a}$ und da man

$$\sin\frac{(2i-1)\pi(a-x)}{a} = \sin\frac{(2i-1)\pi x}{a}$$

hat, so findet man daraus

$$\Sigma\,\frac{(-1)^i}{(2i-1)^4}\,\sin\frac{(2i-1)\pi x}{a} = \frac{\pi^4}{96a^3}\,[4(a-x)^3 - 3a^2(a-x)].$$

Auf diese Weise erhalten wir die eine oder die andere der beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\beta y &= x(a-x)\,[Cx + C'(a-x) - \frac{q}{48}(4x^3 - 3a^2x)\\ \beta y &= x(a-x)\,[Cx + C'(a-x) - \frac{q}{48}[4(a-x)^3 - 3a^2(a-x)]\end{aligned}\right\}(1)$$

Es müssen daher nur noch die Constanten C und C' in den drei folgenden Fällen bestimmt werden.

1) Die Bedingung $\frac{dy}{dx} = o$ für $x = o$ und $x = a$, welche statt hat, wenn der Stab an seinen beiden Enden eingeklemmt ist, giebt

$$C' = C = -\frac{q}{16}.$$

Die Gleichungen (1) werden

$$\beta y = \frac{q}{48}\,(3ax^2 - 4x^3)$$

$$\beta y = \frac{q}{48}\,[3a(a-x)^2 - 4(a-x)^3];$$

in der Mitte des Stabes hat man $\frac{dy}{dx} = o$, wie an den Endpunkten, und f, d. h. die Ordinate, welche $x = \frac{1}{2}a$ entspricht, wird

$$f = \frac{qa^3}{4.48.\beta},$$

d. h. das Doppelte von dem Werthe, welcher im ersten Falle des §. 322 statt hatte. In Folge der zweiten Gleichungen (g) und (h) hat man auch

$$Q = E = -\frac{1}{2}q,$$

wie dies seyn muſs.

2) Im Falle, wenn der Stab in seinen Endpunkten nur einfach festgehalten wird, wo man also $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ für $x = o$ und $x = a$ haben muſs, folgt daraus

$$C = o \quad C' = o,$$

und daher

$$\beta y = \frac{q}{48}(3a^2x - 4x^3)$$

$$\beta y = \frac{q}{48}[3a^2(a-x) - 4(a-x)^3].$$

In der Mitte der krummen Linie ist die Tangente horizontal und die Werthe von Q und E sind $-\frac{1}{2}q$, wie im ersten Falle; der Werth der Ordinate f ist aber

$$f = \frac{qa^3}{48\beta},$$

so daſs er das Vierfache des Vorhergehenden ist und im Verhältnisse von 8 zu 5 gröſser ist, als der des zweiten Falles des §. 322. Zieht man durch einen oder den anderen der Punkte A und B eine Tangente an die elastische krumme Linie, bezeichnet ihre Neigung durch α und durch f' die verticale Ordinate des Punktes dieser geraden Linie, der der Abscisse $\frac{1}{2}a$ entspricht, so hat man

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{qa^2}{16\beta}, \quad f' = \frac{1}{2}a\,\text{tang}\,\alpha,$$

woraus sich

$$f' = \frac{3}{2}f$$

ergiebt. Im zweiten Falle des §. 322 ist das Verhältniſs von f' zu f gleich $\frac{8}{5}$.

3) Ist endlich der Stab an dem Endpunkte A eingeklemmt und an dem anderen Ende B blos angelehnt, so hat man $\frac{dy}{dx} = o$ für $x = o$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ für $x = a$; hieraus findet man

$$C' = -\frac{q}{16}, \quad C = -\frac{q}{32},$$

und die Gleichungen (1) werden

$$\beta y = \frac{q}{96}(9ax^2 - 11x^3)$$

$$\beta y = \frac{q}{96}(5x^3 - 15ax^2 + 12a^2x - 2a^3).$$

Sie geben für $x = \frac{1}{2}a$ denselben Werth von y, nemlich

$$y = \frac{7qa^3}{8.96.\beta};$$

dies ist aber nicht die gröſste Ordinate. Auch hat man

$$E = -\frac{11q}{16}, \quad Q = -\frac{5q}{16},$$

so daſs das Gewicht q sich im Verhältnisse von 11 zu 5 zwischen den Stützpunkten A und B vertheilt.

325.

Ich werde nun die früher angeführte Lagrange'sche Formel beweisen.

Zu diesem Ende betrachte man die Gröſse

$$\frac{1 - h^2}{1 - 2h\cos\vartheta + h^2},$$

welche in Beziehung auf h ein rationaler Bruch ist und in welcher ϑ einen reellen Winkel bedeutet. Entwickelt man sie nach den Potenzen von h, so erhält man

$$1 + 2h\cos\vartheta + 2h^2\cos 2\vartheta + 2h^3\cos 3\vartheta + 2h^4\cos 4\vartheta + \ldots,$$

wie sich leicht beweisen läſst. Denn wenn man diese unendliche Reihe durch den Nenner $1 - 2h\cos\vartheta + h^2$ des Bruches multipliciert, so findet man den Zähler wieder, wenn man bemerkt, daſs man

$$2\cos n\vartheta\cos\vartheta = \cos(n+1)\vartheta + \cos(n-1)\vartheta$$

hat, was auch die Zahl n sey. Ist h kleiner als die Einheit, ohne Rücksicht auf das Zeichen, so ist diese Reihe eine con-

vergierende und der Bruch ist genau seiner ins Unendliche verlängerten Entwickelung gleich. Da

$$1 - 2h\cos\vartheta + h^2 = (1-h)^2 + 4h\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta$$

ist, so hat man daher, in dieser Voraussetzung,

$$\frac{1-h^2}{(1-h)^2 + 4h\sin^2\frac{1}{2}\vartheta} = 1 + 2\Sigma h^n \cos n\vartheta,$$

wo die Summe Σ sich auf alle Werthe der ganzen Zahl n von $n = 1$ bis $n = \infty$ erstreckt. Wie auch daher die Function $f\vartheta$ und die reelle Constante α beschaffen seyen, so hat man immer

$$\int_o^\pi \frac{(1-h^2)f\vartheta\, d\vartheta}{(1-h)^2 + 4h\sin^2\frac{1}{2}(\vartheta-\alpha)}$$

$$= \int_o^\pi f\vartheta\, d\vartheta + 2\Sigma h^n \int_o^\pi f\vartheta \cos n(\vartheta-\alpha)\, d\vartheta.$$

Sey g eine positive unendlich kleine Gröfse, so wird diese Gleichung noch immer bestehen, wenn man $h = 1 - g$ setzt, weil sie für alle Werthe von h, die kleiner als die Einheit sind, statt hat. Für alle endlichen Werthe von n hat man

$$h^n = (1-g)^n = 1;$$

für unendliche Werthe dieses Exponenten kann h^n von der Einheit verschieden seyn, integriert man aber theilweise, so hat man

$$\int f\vartheta \cos n(\vartheta-\alpha)\, d\vartheta = \frac{1}{n} f\vartheta \sin n(\vartheta-\alpha)$$

$$- \frac{1}{n}\int \frac{df\vartheta}{d\vartheta} \sin n(\vartheta-\alpha)\, d\vartheta,$$

so dafs, wenn $f\vartheta$ nicht zwischen den Gränzen $\vartheta = o$ und $\vartheta = \pi$ und nicht für diese Gränzen Null wird, das Integral $\int_o^\pi f\vartheta \cos n(\vartheta-\alpha)\, d\vartheta$, welches mit h^n multipliciert wird, für den Werth $n = \infty$ verschwindet, woraus sich ergiebt, dafs man immer unter dem Zeichen Σ die Einheit statt h^n setzen kann. Im Zähler des Bruches, der unter dem Integrationszeichen enthalten ist, hat man $1 - h^2 = 2g$, wenn man g^2 gegen $2g$ vernachlässigt; im zweiten Gliede des Nenners kann man die Einheit statt h oder $1 - g$ setzen und auf diese Weise hat man

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f\vartheta\, d\vartheta + \Sigma\int_0^\pi f\vartheta \cos n(\vartheta-\alpha)\, d\vartheta \qquad (1)$$
$$= \int_0^\pi \frac{g f\vartheta\, d\vartheta}{g^2 + 4\sin^2\tfrac{1}{2}(\vartheta-\alpha)}$$

Der Coefficient von $d\vartheta$ unter diesem letzten Integrale ist unendlich klein, ausgenommen für die Werthe von ϑ, die unendlich wenig von α verschieden sind, wodurch der Nenner unendlich klein wird. Dieses Integral ist daher unendlich klein oder Null, so lange $\vartheta - \alpha$ eine endliche Gröſse ist, was in der ganzen Ausdehnung der Integration statt hat, so lange man $\alpha < o$ oder $\alpha > \pi$ setzt. So oft also die Constante α auſserhalb der Gränzen Null und π fällt, so hat man die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f\vartheta\, d\vartheta + \Sigma\int_0^\pi f\vartheta \cos n(\vartheta-\alpha)\, d\vartheta = o. \qquad (2)$$

Ist dagegen $\alpha > o$ und $< \pi$, so giebt es Werthe von ϑ, die unendlich wenig von α verschieden sind; setzt man daher

$$\vartheta = \alpha + u, \quad d\vartheta = du,$$

so verschwindet zwar das in Rede stehende Integral für die endlichen Werthe von u, aber nicht mehr für die positiven oder negativen unendlich kleinen Werthe dieser Veränderlichen. In Beziehung auf diese hat man

$$f\vartheta = f\alpha, \quad \sin\tfrac{1}{2}(\vartheta-\alpha) = \tfrac{1}{2}u;$$

der zweite Theil der Gleichung wird daher

$$f\alpha \int \frac{g\, du}{g^2 + u^2},$$

wenn α zwischen Null und π fällt. Da aber dieses Integral für jeden Werth von u, der nicht unendlich klein ist, Null wird, so können wir es jetzt, ohne seinen Werth zu ändern, auf beliebige positive oder negative Werthe von u ausdehnen, und es, wenn wir wollen, von $u = -\infty$ bis $u = \infty$ nehmen, alsdann hat man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g\, du}{g^2 + u^2} = \pi,$$

und zuletzt

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f\vartheta\, d\vartheta + \Sigma\int_0^\pi f\vartheta \cos n(\vartheta-\alpha)\, d\vartheta = \pi f\alpha. \qquad (3)$$

Diese Schlufsfolge pafst auch noch für den Fall, wenn α mit einer der beiden Gränzen o oder π zusammenfällt; hat man aber $\alpha = o$, so darf man u nur positive Werthe geben, und hat man $\alpha = \pi$, so darf man ihm nur negative Werthe geben, damit die Veränderliche ϑ, die man gleich $\alpha + u$ gesetzt hat, nicht die Gränzen der Integration, in diesen beiden Fällen, überschreitet. Auf diese Weise ist das Integral, in Beziehung auf u, auf die Hälfte seines Werthes oder auf $\frac{1}{2}\pi$ reduciert und wenn man durch β und γ die Werthe von $f\alpha$ bezeichnet, die $\alpha = o$ und $\alpha = \pi$ entsprechen, so ergiebt sich hieraus

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\int_o^\pi f\vartheta\, d\vartheta + \Sigma\int_o^\pi f\vartheta \cos n\vartheta\, d\vartheta &= \tfrac{1}{2}\pi\beta \\ \tfrac{1}{2}\int_o^\pi f\vartheta\, d\vartheta + \Sigma(-1)^n\int_o^\pi f\vartheta \cos n\vartheta\, d\vartheta &= \tfrac{1}{2}\pi\gamma \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Man setze jetzt

$$\vartheta = \frac{\pi x'}{a}, \quad d\vartheta = \frac{\pi dx'}{a},$$

und sey auch

$$f\left(\frac{\pi'}{a}\right) = \varphi x'.$$

Da die Gröfse x positiv und kleiner als die Constante a ist, so setze man $-\frac{\pi x}{a}$ an die Stelle von α in die Gleichung (2) und $\frac{\pi x}{a}$ in die Gleichung (3). Bemerkt man, dafs die Gränzen in Beziehung auf x' Null oder a sind, so hat man

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2a}\int_o^a \varphi x' dx' + \frac{1}{a}\Sigma\int_o^a \varphi x' \cos\frac{n\pi(x'+x)}{a} dx' &= o \\ \frac{1}{2a}\int_o^a \varphi x' dx' + \frac{1}{a}\Sigma\int_o^a \varphi x' \cos\frac{n\pi(x'-x)}{a} dx' &= \varphi x \end{aligned}\right\} (5)$$

und wenn man diese zwei Gleichungen von einander abzieht, so erhält man

$$\frac{2}{a}\Sigma\left(\int_o^a \varphi x' \sin\frac{n\pi x'}{a} dx'\right) \sin\frac{n\pi x}{a} = \varphi x,$$

was gefunden werden sollte.

326.

Diese Formel giebt die Werthe der Function φx, für alle Werthe der Veränderlichen x, die positiv und kleiner als a sind, und selbst für $x=o$ und $x=a$, wenn φx für diese äufsersten Werthe Null ist. Es ist wichtig zu bemerken, dafs die durch Σ angedeutete Reihe immer zuletzt convergiert; denn für sehr grofse Werthe von n wird das Integral in Beziehung auf x' eine sehr geringe Gröfse, die immer kleiner wird, so wie n zunimmt, und die für $n=\infty$ völlig Null wird, wie sich oben mit Hülfe der theilweisen Integration gezeigt hat. Diese Bemerkung ist nothwendig und hinreichend, um den Gebrauch zu rechtfertigen, den wir von der vorhergehenden Formel machen werden.

Die verschiedenen Formeln, durch welche man auf diese Weise Theile von willkührlichen Functionen, die continuierliche oder discontinuierliche seyn können, durch Reihen periodischer Gröfsen darstellen kann, die immer convergieren, ergeben sich aus den Gleichungen (5), die im Vorigen gefunden worden sind. Ich beschränke mich hier darauf, zwei von diesen Formeln zu geben, die uns in der Folge nützlich seyn werden. Ausführlichere Entwickelungen findet man in meinen Abhandlungen über die Integralrechnung, die im Journal de l'école polytechnique abgedruckt sind, wo man eine vollständge Theorie dieser Klasse von Umbildungen findet.

Ich addiere die Gleichungen (5) zusammen und ziehe alsdann die erste von der zweiten ab, setze $2l$ statt a, und $x+l$, und $x'+l$ an die Stelle von x und x', und ferner φx und $\varphi x'$ an die Stelle von $\varphi(x+l)$ und $\varphi(x'+l)$; die Gränzen der auf x' bezüglichen Integrale werden $\pm l$ und diese Gleichungen werden durch folgende ersetzt

$$\varphi x=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\varphi x'dx'+\frac{1}{l}\Sigma\left(\int_{-l}^{l}\varphi x'\cos\frac{n\pi(x'+l)}{2l}dx'\right)\cos\frac{n\pi(x+l)}{2l}$$

$$\varphi x=\frac{1}{l}\Sigma\left(\int_{-l}^{l}\varphi x'\sin\frac{n\pi(x'+l)}{2l}dx\right)\sin\frac{n\pi(x+l)}{2l}.$$

Man theile jede Summe Σ in zwei andere, von welchen die eine sich auf die geraden Zahlen n, die andere auf die ungeraden Zahlen n bezieht. Zu diesem Ende sey i eine ganze beliebige Zahl, und man setze allmälich $n=2i$, $n=2i-1$, so hat man

Eindruck auf unsere Sinne machen kann. Dem sey nun wie ihm wolle, so ist das Insensible noch durchaus von dem unendlich Kleinen geschieden. Der Verf. gesteht auch selbst, dafs die Integralformeln streng genommen nur auf das unendlich Kleine passen, dafs man sie aber ohne merklichen Fehler (sans erreur appréciable) auf die insensiblen Gröfsen anwenden dürfe, wiewohl es auch, wie er hinzu setzt, einzelne Ausnahmen giebt, bei welchen dies nicht erlaubt ist. Das Resultat aller dieser Bemerkungen ist nun, dafs nach des Verf. eigener Ansicht dem materiellen Punkte keine Realität zukommt, dafs er vielmehr, ebenso wie der mathematische eine blofse Abstraction ist, dafs daher alle Betrachtungen, die der Verf. in der Statik anstellt, sich nicht direct auf die Wirklichkeit beziehen, und folglich in dieser Beziehung von der rein mathematischen Bewegungslehre Nichts voraus haben. Und dies war es gerade, was ich zeigen wollte.

Ich will hieran noch eine Bemerkung über die Ansicht des Verf. vom unendlich Kleinen knüpfen. Der Streit über die Nützlichkeit und Nothwendigkeit des Begriffes des unendlich Kleinen in der höheren Analysis ist schon zu häufig besprochen, als dafs ich es für passend halten sollte, hier Etwas für oder gegen die Darstellung des Verf., der sich überall dieses Begriffes bedient, zu sagen. Alle geometrischen Lehren, die man in der Einleitung findet, sind schon in hinlänglich bekannten Werken, auch ohne Hülfe des unendlich Kleinen, abgeleitet worden, auf welche ich daher nur verweisen darf; über die mechanischen Sätze, die seltener ohne diese Beihülfe dargestellt worden sind, werde ich noch gelegentlich Einiges sagen. Nur die Art, wie der Verf. hier diesen Begriff in die Mathematik einführen will, kann ich nicht unberührt lassen. "Das unendlich Kleine, sagt er §. 12, ist eine „Gröfse, die kleiner ist, als jede gegebene Gröfse derselben „Art. Man wird mit **Nothwendigkeit** auf die **Idee** des „unendlich Kleinen geführt, wenn man die auf einander fol-„genden Aenderungen einer Gröfse betrachtet, die dem Gesetze „der Stätigkeit unterworfen ist. So z. B. wächst die Zeit „durch Stufen, die kleiner sind als jeder angebbare Zeitraum, „mag dieser auch noch so klein seyn. Die Räume, welche „durch die verschiedenen Punkte eines Körpers durchlaufen

$$\varphi x = \frac{2}{l}\,\Sigma\left(\int_o^l \varphi x' \sin\frac{(2i-1)\pi x'}{2l}\,dx'\right)\sin\frac{(2i-1)\pi x}{2l}. \quad (7)$$

Ist dagegen die Function φx der Art, dafs man $\varphi(-x) = \varphi x$ hat, so ist

$$\int_{-l}^{l} \varphi x' \sin\frac{(2i-1)\pi x'}{2l}\,dx' = o, \quad \int_{-l}^{l} \varphi x' \sin\frac{i\pi x'}{l}\,dx' = o,$$

und die anderen Integrale brauchen nur von $x = o$ bis $x = l$ ausgedehnt zu werden, indem man die Resultate doppelt nimmt. Die zweite Gleichung (6) kommt auf die Gleichung (7) zurück, wenn man in derselben $l - x$ statt x und φx statt $\varphi\,(l - x)$ setzt. Die erste Gleichung (6) wird

$$\varphi x = \frac{1}{l}\int_o^l \varphi x' dx' + \frac{2}{l}\,\Sigma\left(\int_o^l \varphi x' \cos\frac{i\pi x'}{l}\,dx'\right)\cos\frac{i\pi x}{l}. \quad (8)$$

Diese Formeln (7) und (8) geben die Werthe von φx zwischen den Gränzen $x = o$ und $x = l$ an; die Formeln, welche man aus ihnen ableiten kann, indem man in Beziehung auf x differentiiert, drücken, zwischen denselben Gränzen, die Werthe von $\frac{d\varphi x}{dx}$ aus. Die Formel (7) setzt voraus, dafs $\varphi x = o$ ist, wenn $x = o$ ist, und $\frac{d\varphi x}{dx} = o$ ist, wenn $x = l$ ist; die Formel (8) erfordert, dafs man $\frac{d\varphi x}{dx} = o$ für $x = o$ und $x = l$ habe. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so haben diese Formeln, oder ihre Differentiale, für die Gränzwerthe von x nicht statt.

327.

Umgekehrt geben die Formeln dieser Art die Summen vieler periodischen Reihen an, die man auf verschiedenen Wegen gefunden hat. So z. B. findet man daraus die Summe der Reihe, die in §. 324 angewandt worden ist, wenn man die Gleichungen (2) und (3) addiert, nachdem man in der ersten $-\alpha$ an die Stelle von α gesetzt hat; hieraus ergiebt sich

$$\int_o^\pi f\vartheta\, d\vartheta + 2\,\Sigma\left(\int_o^\pi f\vartheta \cos n\vartheta\, d\vartheta\right)\cos n\alpha = \pi f\alpha.$$

Ich nehme alsdann $f\vartheta = \vartheta$, so hat man

$$\int_o^\pi f\vartheta \cos n\vartheta\, d\vartheta = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2},$$

welche Gröfse für alle geraden Zahlen Null ist und für $n = 2i - 1$ den Werth $-\frac{2}{(2i-1)^2}$ hat. Die vorhergehende Gleichung wird daher

$$\Sigma \frac{\cos(2i-1)\alpha}{(2i-1)^2} = \frac{\pi}{8}(\pi - 2\alpha),$$

wo sich die Summe Σ auf alle Werthe der ganzen Zahl i, von $i = 1$ bis $i = \infty$ erstreckt.

Multipliciert man durch $d\alpha$ und integriert, so findet man

$$\Sigma \frac{\sin(2i-1)\alpha}{(2i-1)^3} = \frac{\pi}{8}(\pi - \alpha)\alpha.$$

Man setzt keine willkührliche Constante hinzu, weil beide Theile dieser Gleichung sowohl für $\alpha = o$ als für $\alpha = \pi$ Null sind, so dafs diese Gleichung für alle Werthe von α, von $\alpha = o$ bis $\alpha = \pi$ einschliefslich, statt hat. Setzt man $\alpha = \frac{1}{2}\pi + \omega$ so hat man

$$\sin(2i-1)\alpha = -(-1)^i \cos(2i-1)\omega,$$

und daher ist

$$\Sigma \frac{(-1)^i \cos(2i-1)\omega}{(2i-1)^3} = \frac{\pi}{8}(\omega^2 - \tfrac{1}{4}\pi^2)$$

zwischen $\omega = -\frac{1}{2}\pi$ und $\omega = \frac{1}{2}\pi$.

Ich multipliciere mit $d\omega$, und integriere noch einmal, so ergiebt sich

$$\Sigma \frac{(-1)^i \sin(2i-1)\omega}{(2i-1)^4} = \frac{\pi\omega^3}{24} - \frac{\pi^3\omega}{32},$$

was gefunden werden sollte.

328.

Nimmt man $2a$ statt a und $x' + a$ und $x + a$ statt x und x' in der zweiten Gleichung (5) und setzt $\varphi(a + x) = Fx$, so hat man

$$Fx = \frac{1}{4a}\int_{-a}^{a} Fx'dx' + \frac{1}{2a}\Sigma\int_{-a}^{a} Fx' \cos\frac{n\pi(x'-x)}{2a}dx'.$$

für alle Werthe von x, die zwischen $\pm a$ enthalten sind.

Setzt man

$$\frac{\pi}{2a} = \varepsilon, \quad \frac{n\pi}{2a} = n\varepsilon = u,$$

so kann man diese Gleichung wie folgt schreiben:

$$Fx = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-a}^{a} Fx'dx' + \frac{1}{\pi}\Sigma\left[\int_{-a}^{a} Fx'\cos u(x'-x)\right]\varepsilon,$$

wo u ein Vielfaches von ε ist und die Summe Σ sich auf alle Werthe von u, von $u = \varepsilon$ bis $u = \infty$, erstreckt. Ist aber die Constante a unendlich groſs, so wird der Unterschied ε, der auf einander folgenden Werthe von u, unendlich klein, und die Summe Σ geht in ein Integral über, welches von $u = \varepsilon$ oder $u = o$ bis $u = \infty$ genommen wird. Setzt man daher $a = \infty$ und $\varepsilon = du$, nimmt das Zeichen $\int$ statt Σ und läſst das erste Glied der vorhergehenden Formel weg, so hat man

$$Fx = \frac{1}{\pi}\int_{o}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} Fx'\cos u(x'-x)dx'\right]du.$$

Fourier hat zuerst diese wichtige Formel gegeben, die sich auf alle reellen positiven oder negativen Werthe der Veränderlichen x erstreckt, und, wie die vorhergehenden, aus welchen sie abgeleitet ist, auf eine beliebige continuierliche oder discontinuierliche Function Fx paſst.

Viertes Kapitel.

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

329.

In den einfachsten Fällen des Gleichgewichtes der Maschinen sind die Kraft und der Widerstand den Räumen, die ihre Angriffspunkte zu gleicher Zeit beschreiben, umgekehrt proportional, wenn das Gleichgewicht unterbrochen wird. Damit dieses Verhältnifs immer statt habe, mufs man die unendlich kleinen Räume nehmen, die im ersten Augenblicke beschrieben werden, und sie durch ihre Projectionen auf die Richtungen der Kräfte ersetzen. Dies Verhältnifs ist schon sehr lange bei den einfachen Maschinen bemerkt worden, Johann Bernoulli hat es später, durch Induction, auf ein beliebiges System materieller Punkte, das von gegebenen Kräften getrieben wird, ausgedehnt, und es ist, unter dem Namen des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, das allgemeine Princip des Gleichgewichtes geworden. Wir werden es in seiner ganzen Allgemeinheit beweisen, wenn wir es an folgenden Beispielen bewahrheitet haben.

1) Seyen (Fig. 79) A, A', A'',... eine Reihe von Rollen, die in demselben Gehäuse enthalten sind und eine feste Flasche bilden, und B, B', B''... eine andere Reihe von Rollen, die ebenfalls in einem Gehäuse enthalten sind und eine bewegliche Flasche bilden. Man nehme an, es werde ein Faden an die untere Rolle der festen Flasche angebracht, der sich allmälich um alle Rollen schlingt, indem er abwechselnd von einer Flasche zur anderen geht Am freien Ende dieses Fadens hänge man ein Gewicht P auf, das einem Gewichte R, welches an der unteren Rolle der beweglichen Flasche aufgehängt ist, das Gleichgewicht hält. Die Spannung des Fadens wird in seiner ganzen Länge dieselbe und dem Gewichte P gleich seyn; sind aufserdem die Durchmesser der Rollen sehr klein, mit Rücksicht auf den Abstand, der die beiden Flaschen trennt, so sind die Seile, welche von einer zur anderen gehen, beinahe parallel und vertical. Daher ist die Kraft, welche das

Gewicht R hält, der Summe ihrer Spannungen oder dem n fachen des Gewichtes P gleich, wenn man n die Anzahl dieser Seile nennt. Im Zustande des Gleichgewichtes hat man daher

$$R = nP.$$

Wird aber das Gleichgewicht aufgehoben, und steigt oder senkt sich das Gewicht R um die Gröfse α, so werden sich alle Seile, die nach derselben beweglichen Flasche gehen, um dieselbe Gröfse verkürzen. Da aber die ganze Länge des Fadens dieselbe bleiben mufs, so wird sich der Theil, an welchen das Gewicht P befestigt ist, um n mal diese Gröfse α verlängern oder verkürzen. Bezeichnet man daher durch β die Gröfse, um welche sich das Gewicht P erhebt oder senkt, so hat man $\beta = n\alpha$, und daher

$$R\alpha = P\beta,$$

welche Gleichung das eben ausgesprochene Princip enthält.

2) ABC (Fig. 80) bezeichne das Rad eines Rades an der Welle und $A'B'C'$ den Durchschnitt der verticalen Ebene dieses Rades und der Fläche des Cylinders. O ist der gemeinschaftliche Mittelpunkt dieser beiden Kreise und AOC, $A'OC'$ ihre horizontalen Durchmesser. Ein Faden schlingt sich um das Rad und ist an einen Punkt desselben befestigt; ein anderer Faden, der an einen Punkt des Cylinders befestigt ist, schlingt sich ebenso um seine Oberfläche. Man hängt ein Gewicht P am ersten Faden auf, ein Gewicht R am zweiten. Diese beiden Gewichte sollen die Maschine in entgegengesetzter Richtung zu drehen streben und im Gleichgewichte seyn. Dies vorausgesetzt, bringe man an den Punkt C' zwei Kräfte R' und R'' an, die vertical, gleich und entgegengesetzt sind, so wird das Gleichgewicht hierdurch nicht gestört; sind aufserdem diese Kräfte gleich R, so werden sich die Kraft R'' und das Gewicht R im Gleichgewichte halten, weil kein Grund vorhanden ist, weswegen ihre gleichzeitige Wirkung die Maschine eher nach der einen als nach der entgegengesetzten Seite drehen sollte. Daher müssen auch das Gewicht P und die Kraft R', die senkrecht auf AOC' stehen, und an den Endpunkten des Hebels wirken, dessen Stützpunkt O ist, sich im Gleichgewichte halten. Nennt man daher r den Halbmesser AO

des Rades und r' den Halbmesser OC' des Cylinders, so ist die Gleichung des Gleichgewichtes

$$Pr = Rr',$$

da $R' = R$ ist. Wird nun das Gleichgewicht aufgehoben und steigt oder sinkt das Gewicht R um eine Gröfse α, während das Gewicht P um die Gröfse β sinkt oder steigt, so hat man, nach der Natur der Maschine, $\beta r' = \alpha r$, woraus sich

$$P\beta = R\alpha$$

ergiebt, was mit dem angegebenen Principe übereinstimmt.

3) Man nehme an, eine verticale Schraube sey mit einem Gewichte R an ihrem oberen Ende belastet; ein horizontales Rad, dessen Mittelpunkt in der Axe dieser Schraube liegt, sey an ihr unteres Ende befestigt und es sey ein Faden um dieses Rad geschlungen und an einem Ende an seine Peripherie befestigt. An das andere Ende desselben soll eine horizontale Kraft F angebracht seyn, die nach der Tangente des Rades wirkt und dem Gewichte R das Gleichgewicht hält. Man kann, wenn man will, in der Richtung dieser Tangente eine feste verticale Rolle anbringen, den Faden um diesen Theil schlingen und F durch ein Gewicht P ersetzen, welches dieser Kraft gleich und an das freie Ende des verticalen Theils des Fadens angeknüpft ist. Nennt man h die Höhe des Schraubenganges und c die Peripherie des Rades, so hat man

$$Pc = Rh$$

nach der bekannten Bedingung des Gleichgewichtes bei dieser Maschine. Die beiden Gewichte R und P werden die Schraube nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben; wird das Gleichgewicht unterbrochen, so steigt das eine Gewicht und das andere sinkt, und zwar wird das Gewicht P um eine Höhe, die der Peripherie c des Rades gleich ist, steigen oder sinken, je nachdem das Gewicht R um die Höhe eines Schraubenganges sinkt oder steigt. Hieraus folgt, dafs, wenn man, im Allgemeinen, α und β die Räume nennt, welche die beiden Gewichte R und P gleichzeitig durchlaufen, man $\alpha c = \beta h$ und daher

$$P\beta = R\alpha$$

hat, übereinstimmend mit dem Principe, mit welchem wir uns jetzt beschäftigen.

4) Man betrachte ferner zwei Gewichte P und R, die auf zwei schiefen Ebenen liegen und durch einen Faden mit einander verbunden sind, der über eine feste Rolle geht, die auf den beiden, gegen einander gelehnten Ebenen angebracht ist. Die Figur 81 stellt einen verticalen Durchschnitt dieses Systems dar; AC ist die Länge der Ebene, auf welcher das Gewicht R liegt, BC die der Ebene, die das Gewicht P trägt, AB eine horizontale gerade Linie und CD eine verticale, welche die gemeinschaftliche Höhe der beiden Ebenen darstellt. Man setze

$$AC = a, \quad BC = b, \quad CD = h,$$

die Seitenkraft von R nach CA ist $R\,\frac{h}{a}$ und die von P nach CB ist $P\,\frac{h}{b}$. Zum Gleichgewichte ist es erforderlich, daſs diese zwei Seitenkräfte gleich seyen, so daſs man

$$Pa = Rb$$

hat. Hört das Gleichgewicht auf und gleitet das Gewicht R um die Gröſse γ auf der Ebene CA fort, so gleitet das Gewicht P um dieselbe Gröſse, aber in entgegengesetztem Sinne, auf der Ebene BC fort, und wenn man α die verticale Höhe nennt, um welche das Gewicht R steigt oder sinkt, und β die, um welche das Gewicht P sinkt oder steigt, so sieht man leicht, daſs man

$$\alpha = \frac{\gamma h}{a}, \quad \beta = \frac{\gamma h}{b}$$

hat, woraus sich

$$P\beta = R\alpha,$$

wie in den vorhergehenden Beispielen, ergiebt. Hier aber sind α und β die verticalen Projectionen der Räume, die gleichzeitig durch die Gewichte R und P beschrieben werden, während in dem vorhergehenden Falle, α und β diese Räume selbst waren.

330.

Nach dem, was man in §. 49. gesehen hat, verhalten sich zwei Kräfte, die an einem Hebel im Gleichgewichte sind,

umgekehrt, wie die unendlich kleinen Räume, die auf ihre Richtungen projiciert sind und welche ihre Angriffspunkte zu gleicher Zeit beschreiben können. Diese Behauptung pafst für alle Fälle. Nennt man daher P und R die Kraft und den Widerstand, die vermittelst irgend einer Maschine im Gleichgewichte sind, nimmt man an, dafs man dieser Maschine eine unendlich kleine Bewegung mittheilt, und bezeichnet man durch β und α die Projectionen der Räume, die zu gleicher Zeit durch ihre Angriffspunkte beschrieben werden, auf die Richtungen dieser Kräfte, so hat man immer

$$P\beta = Q\alpha;$$

wozu man noch das hinzufügen mufs, dafs eine der Projectionen auf die Richtung der entsprechenden Kraft selbst, die andere aber auf deren Verlängerung fallen mufs, wie dies auch beim Hebel der Fall ist.

In der Ausübung ist es hinreichend, wenn die der Maschine mitgetheilte Bewegung nur sehr klein ist. Mifst man die Längen der Projectionen β und α, so kann man daraus unmittelbar das Verhältnifs der Kraft zum Widerstande finden, ohne etwas Besonderes über die Einrichtung der Maschine zu wissen.

331.

Diese Behauptung pafst aber nicht blos auf jede Maschine, sondern erstreckt sich auf eine beliebige Anzahl von Kräften, die im Gleichgewichte sind. Seyen daher, im Allgemeinen, M, M', M''... (Fig. 82) ein System von materiellen Punkten, die auf irgend eine Weise mit einander verbunden sind. Man nehme an, dafs die Kräfte P, P', P''... auf diese Punkte, nach den Richtungen MA, $M'A'$, $M''A''$..., wirken, und verrücke diese Punkte unendlich wenig, und auf eine Weise, die sich mit den Bedingungen des Systems verträgt, so dafs sie nach N, N', N''... kommen. Man projiciere N, N', N''... auf die Linien MA, $M'A'$, $M''A''$... in a, a', a''... und setze

$$Ma = p, \quad M'a' = p', \quad M''a'' = p''....$$

Betrachtet man diese Projectionen p, p', p''... als positive oder negative Gröfsen, je nachdem sie auf die Richtungen der entsprechenden Kräfte oder ihre Verlängerungen fallen, so hat man

$$Pp + P'p' + P''p'' + ... = o,$$

wenn das Gleichgewicht statt hat, und umgekehrt wird das Gleichgewicht statt finden, wenn diese Gleichung, bei allen Verrückungen der Punkte, die sich mit den Bedingungen des Systems vertragen, besteht.

Die unendlich kleinen geraden Linien MN, $M'N'$, $M''N''$... sind das, was man die virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte M, M', M''... nennt, welche Benennung daher rührt, daſs man sie als die Räume betrachtet, die, zu gleicher Zeit, durch die Punkte des Systems, im ersten Augenblicke, in welchem das Gleichgewicht aufgehoben wird, durchlaufen würden.

Man bemerke, daſs das in der eben mitgetheilten Formel enthaltene Princip der virtuellen Geschwindigkeit blos die Bedingungen des Gleichgewichtes angiebt, die durch Gleichungen ausgedrückt werden können, nicht aber diejenigen, welche sich auf die Richtung gewisser Kräfte beziehen und auf den Raum, innerhalb dessen sie eine feste Ebene schneiden müssen (§. 266). Die mit den Bedingungen des Systems verträglichen Bewegungen, welche die Gleichungen des Gleichgewichtes angeben, sind diejenigen, deren gerade entgegengesetzte Bewegungen gleich möglich sind. Wenn dagegen z. B. ein materieller Punkt auf einer festen Ebene liegt, so wird die Bewegung in dieser Ebene nach jeder Richtung und der entgegengesetzten möglich seyn. Dagegen ist senkrecht auf diese Ebene nur nach einer einzigen Richtung eine Bewegung möglich. Die Betrachtung der Bewegungen in der Ebene bietet aber Bedingungen des Gleichgewichtes dar, die durch Gleichungen ausgedrückt werden können, und die Betrachtung der senkrechten Bewegung bestimmt blos die Richtung der senkrechten Kraft, die der der möglichen Bewegung entgegengesetzt seyn muſs. Bei dem Principe der virtuellen Geschwindigkeit setzt man stillschweigend voraus, daſs jede mit den Bedingungen vereinbare Bewegung und die ihr gerade entgegengesetzte gleich möglich seyen. Wendet man allmälich die vorhergehende Gleichung auf diese zwei Bewegungen an, so ändern die Gröſsen p, p', p''... sämmtlich ihr Zeichen, und es folgt daher hieraus nur eine Gleichung der Bewegung.

Ist die Kraft P die Mittelkraft mehrerer gegebener Kräfte Q, Q', Q''... und bezeichnet man durch q, q', q''... die

Projectionen von MN auf ihre Richtungen, so hat man (§. 34)

$$Pp = Qq + Q'q' + Q''q'' + \dots$$

so dafs man in der vorhergehenden Gleichung das Glied Pp, das sich auf die Kraft P bezieht, durch diese Summe von Gliedern, die ihren Seitenkräften entspricht, ersetzen mufs; ebenso verhält es sich mit den Kräften P', $P''\dots$, wenn sie ebenfalls die Mittelkraft mehrerer anderer Kräfte sind.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ist, in dem Falle, wenn ein isolierter Punkt im Gleichgewichte ist, wie man in §. 39 gesehen hat, eine Folge dieser letzten Gleichung, sey es nun, dafs der Punkt völlig frei ist, oder dafs er auf einer gegebenen Oberfläche oder krummen Linie bleiben mufs. Es soll nun dieses allgemeine Princip für den Fall bewiesen werden, wenn ein beliebiges System materieller Punkte M, M', M'' u. s. w. gegeben ist.

332.

Man nehme an, es seyen diese Punkte durch unbiegsame Stäbe oder durch biegsame Fäden verbunden, die theilweise an diese Punkte befestigt sind, während andere, wie durch bewegliche Ringe, durch dieselben gehen. Im letzteren Falle haben diese Punkte oder Ringe die Freiheit, längs der Fäden, welche durch sie gehen, zu gleiten, und man denkt sich zu diesem Zwecke die Fäden vollkommen biegsam.

Hat man die gegebenen Kräfte $P, P', P''\dots$ an die Punkte $M, M', M''\dots$ angebracht und ist das Gleichgewicht hergestellt, so ist es klar, dafs von den Fäden, welche diese Punkte paarweise verbinden, jeder eine besondere Spannung erleiden wird, d. h. dafs jeder dieser Fäden an seinen beiden Endpunkten durch gleiche und entgegengesetzte Kräfte gezogen wird, die nach seinen Verlängerungen gerichtet sind, so wie dies schon bei dem Seilpolygonen (§. 285) gesagt worden ist. Die Intensität dieser Kraft ist das Maafs der unbekannten Spannung, die der Faden erleidet. Ein Faden der nicht gespannt wäre, würde Nichts zum Gleichgewichte beitragen und könnte daher unberücksichtigt bleiben.

Die Spannung kann sich von einem Faden zum anderen ändern; hat man es aber mit zwei Fäden zu thun, von wel-

chen einer die durch einen Ring gehende Verlängerung des anderen ist, so ist die Spannung in diesen beiden Theilen desselben Fadens dieselbe, welcher daher in seiner ganzen Länge eine gleiche Spannung erleiden muſs (§. 289). Ist z. B. M ein Ring, durch welchen der Faden $M'MM''$ geht, so ist die Spannung von MM' der von MM'' gleich.

Kreuzen sich mehrere Fäden in demselben Ringe, so ist die Spannung, in beiden Theilen jedes Fadens, dieselbe und kann sich von einem Faden zum anderen ändern. Geht nun, auſser dem Faden $M'MM''$ noch ein Faden $M'''MM^{iv}$ durch den Ring M, so ist die Spannung in beiden Theilen MM''' und MM^{iv} des letzten Fadens dieselbe, und wird im Allgemeinen von der der beiden Theile MM' und MM'' des ersten Fadens verschieden seyn. Geht dagegen ein anderer Faden wie MM^{v} bis zu demselben Ringe M, an welchen er befestigt ist, so hat dieser Faden seine besondere Spannung, die im Allgemeinen von allen den Spannungen der anderen Fäden, die nach demselben Punkte M gehen, verschieden ist.

Man bemerke noch, daſs, wenn M', ebenso wie M, ein Ring ist und der Faden $M''MM'$, nachdem er durch den Ring M gegangen ist, auch noch durch den Ring M' geht, um nach dem Punkte M''' hin zu gehen, die Spannung in den drei Fäden $M''M$, MM', $M'M'''$ dieselbe seyn wird; denn alsdann machen die drei Fäden nur einen einzigen $M''MM'M'''$ aus. Ist, im Allgemeinen, ein Faden durch bewegliche Ringe in mehrere Theile getheilt, so ist die Spannung in allen diesen Theilen dieselbe.

Was die unbiegsamen Stäbe, im Falle des Gleichgewichtes, betrifft, so werden sie, nach ihrer Länge, durch gleiche und entgegengesetzte Kräfte, die an ihren Endpunkten wirken, getrieben. Die gemeinschaftliche Stärke dieser beiden Kräfte ist, für jeden Stab, das Maaſs der Ausdehnung oder Zusammenziehung, die er erleidet. Ist einer oder sind einige in dem System enthalten, die weder ausgedehnt noch zusammen gezogen werden, so sind sie für das Gleichgewicht unnütz und können unbeachtet bleiben. Wir werden daher im Folgenden annehmen, daſs alle physischen Verbindungen, die in dem

Systeme vorhanden sind, nach ihren Längen, durch unbekannte Kräfte ausgedehnt oder zusammen gezogen werden.

Der Vortheil des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten besteht darin, daſs es in jedem besonderen Falle die Gleichung des Gleichgewichtes giebt, ohne daſs man nöthig hat, diese inneren Kräfte zu berechnen. Da aber der Beweis, den wir geben werden, auf der Betrachtung dieser Kräfte, deren Gröſse unbekannt ist, beruht, so werden wir, um sie darzustellen, folgende Bezeichnung anwenden.

Wir bezeichnen durch $[m, m']$ die Ausdehnung oder die Zusammenziehung des biegsamen oder unbiegsamen Fadens, der zwei beliebige Punkte des Systems M und M' verbindet. Auf diese Weise bezeichne $[m, m'']$, $[m', m'']$ u. s. w. die Ausdehnungen oder Zusammenziehungen der Fäden, die M und M'', M' und M'' u. s. w. verbinden.

333.

Wir müssen auch die unendlich kleinen Veränderungen betrachten, welche die Abstände der Punkte M, M', M''..., paarweise genommen, erleiden, sey es nun, daſs nur einer dieser Punkte seine Lage ändert, oder daſs sie beide eine andere Lage einnehmen. In diesem Falle bezeichnen wir durch (m, m') den Abstand der beiden Punkte M und M', so daſs (m, m''), (m', m'') u. s. w. ebenso die Abstände von M und M'', M' und M'' u. s. w. bezeichnen. Wir gebrauchen das Zeichen δ_1, um die Veränderungen dieser Abstände, in Beziehung auf die Veränderung des Punktes M anzudeuten, das Zeichen δ_1', um dasselbe in Beziehung auf den Punkt M' zu bezeichnen, das Zeichen δ_1'', um die Veränderungen anzudeuten, die von M'' herrühren u. s. w. Endlich wenden wir das Zeichen δ an, um die Veränderung des Abstandes zweier Punkte zu bezeichnen, die von ihren gleichzeitigen Ortsveränderungen herrührt.

Da man z. B. annimmt, daſs M von M nach N, und M' von M' nach N' gebracht worden ist, so hat man

$$\delta\,(m, m') = MM' - NN'$$
$$\delta_1\,(m, m') = MM' - NM'$$
$$\delta_1'\,(m, m') = MM' - MN'.$$

Es ist eine wichtige Bemerkung, daſs die ganze durch δ

bezeichnete Aenderung, der Summe der partiellen Aenderungen, die durch δ_1 und δ_1' bezeichnet worden sind, gleich ist, so dafs man für zwei beliebige Punkte

$$\delta(m,m') = \delta_1(m,m') + \delta_1'(m,m')$$

hat, welche Gleichung daher rührt, dafs die Ortsveränderungen von M und M' unendlich klein sind, und die nur unter dieser Voraussetzung statt hat. Es ist nemlich (m, m') eine Function der Coordinaten dieser zwei Punkte; diese Veränderlichen erhalten unendlich kleine Zuwächse, die positiv oder negativ seyn können, wenn die Punkte M und M' nach N und N' gebracht werden. Vernachlässigt man aber die Potenzen dieser Zuwächse, die höher als die erste sind, so ist es offenbar, dafs der ganze Zuwachs einer beliebigen Function dieser Coordinaten, der Summe der theilweisen Zuwächse gleich ist, die von der Veränderung jeder besonderen Coordinate herrühren, die ganze Aenderung von (m, m'), die durch das Zeichen δ angedeutet wird, mufs der Summe der theilweisen Aenderungen, die den Zeichen δ_1 und δ_1' entsprechen, gleich seyn.

334.

Alles Vorhergehende vorausgesetzt, betrachte man den beliebigen Punkt M', an welchen die gegebene Kraft P angebracht ist. Dieser Punkt ist mit den anderen durch die Fäden MM', MM'' u. s. w. verbunden; er wird daher, im Sinne eines jeden dieser Fäden, durch eine Kraft gezogen oder gestofsen, die der Zusammenziehung oder Ausdehnung, welche dieser Faden erleidet, gleich ist, so dafs der Punkt M nicht blos der gegebenen Kraft P, sondern auch der Wirkung von eben so viel anderen Kräften unterworfen ist, als es Fäden giebt, die nach diesem Punkte hingehen. Hat man auf diese inneren Kräfte Rücksicht genommen, so mufs man die Fäden, welche M mit den übrigen Punkten des Systems verbinden, unberücksichtigt lassen und ihn wie einen isolierten Punkt betrachten, um welchen sich die Kräfte $[m, m']$, $[m, m'']$ u. s. w. und die Kraft P im Gleichgewichte halten müssen. Ist M ein fester Punkt, so folgt hieraus gar keine Gleichung des Gleichgewichtes; ist er aber ganz frei, oder soll er nur auf einer gegebenen Oberfläche oder krummen Linie bleiben, so findet zwischen diesen Kräften die Gleichung der virtuellen

Geschwindigkeiten statt, die schon für das Gleichgewicht eines materiellen isolierten Punktes bewiesen worden ist.

Um diese Gleichung zu bilden, nehme man einen Punkt N, der unendlich nahe bei M ist und der Oberfläche oder krummen Linie angehört, auf welcher dieser Punkt M bleiben mufs, wenn er nicht völlig frei ist. Seyen p, t, t', t''... die Projectionen von MN auf die Richtungen der Kräfte P, $[m, m']$, $[m, m'']$, $[m, m''']$ u. s. w., so hat man (§. 39)

$$Pp + [m, m']\, t + [m, m'']\, t' + [m, m''']\, t'' + \ldots = o.$$

Da aber die Linie MN unendlich klein ist, so ist es leicht einzusehen, dafs ihre Projection auf die Linie MM' nichts Anderes ist, als der Unterschied der beiden Abstände MM' und NM'. Denn fällt man vom Punkte N (Fig. 83) die senkrechte NH auf MM', so ist die Linie MH diese Projection und man hat

$$MH = MM' - HM'.$$

Man hat aber auch

$$HM' = \sqrt{(NM')^2 - (NH)^2} = NM',$$

wenn man die unendlich kleinen Gröfsen der zweiten Ordnung vernachlässigt. Man hat daher

$$MH = MM' - NM'.$$

Nach den angenommenen Bezeichnungen ist diese Gleichung

$$t = \delta_1\,(m, m')$$

und ebenso hat man

$$t' = \delta_1\,(m, m''), \quad t'' = \delta_1\,(m, m''') \text{ u. s. w.}$$

Daher wird die Gleichung des Gleichgewichtes

$$Pp + [m, m']\,\delta_1\,(m, m') + [m, m'']\,\delta_1\,(m, m'') + [m, m''']\,\delta_1\,(m, m''') + \ldots = o.$$

Betrachtet man die übrigen Punkte M', M'', M''' u. s. w. des Systems, so hat man für jeden derselben eine Gleichung, die der vorhergehenden ähnlich ist. Diese Gleichungen sind

$$P'p' + [m', m]\,\delta_1'\,(m', m) + [m', m'']\,\delta_1'\,(m', m'') + (m', m''')\,\delta_1'\,(m', m''') + \ldots = o$$

$$P''p'' + [m'', m]\,\delta_1''\,(m'', m) + [m'', m']\,\delta_1''\,(m'', m') + (m'', m''')\,\delta_1''\,(m'', m''') + \ldots = o$$

$$P'''p''' + [m''', m]\,\delta_1'''\,(m''', m) + [m''', m]\,\delta_1'''\,(m''', m') + (m''', m'')\,\delta_1'''\,(m''', m'') + \ldots = o,$$

wo p', p'', p''' u. s. w. die virtuellen Geschwindigkeiten von M', M'', M''' u. s. w., auf die Richtungen der gegebenen Kräfte P', P'', P'''... projiciert, welche auf diese materiellen Punkte wirken, sind.

Man addiere alle diese Gleichungen. Bemerkt man, dafs $[m, m']$ und (m, m') dasselbe sind, wie $[m', m]$ und (m', m), und dafs es ebenso bei den anderen ähnlichen Bezeichnungen ist, und substituiert man die ganze Aenderung jedes Abstandes statt der Summe der theilweisen Aenderungen, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \ldots \\ +[m,m']\delta(m,m') + [m,m'']\delta(m,m'') + [m,m''']\delta(m,m''') + \ldots \\ + [m',m'']\,\delta(m',m'') + [m',m''']\,\delta(m',m''') \ldots \\ + [m'',m''']\,\delta(m'',m''') + \ldots \\ \quad + \ldots = o \end{array}\right\} (a)$$

335.

Bisher waren die Verrückungen MN, $M'N'$, $M''N''$ u. s. w. (Fig. 82) unabhängig von einander, und die Gleichung (a) setzt blos voraus, dafs diese Punkte die gegebenen Oberflächen oder krummen Linien nicht verlassen haben, auf welchen sie bleiben müssen. Nimmt man aber aufserdem an, dafs, in Folge dieser Verrückungen, die Punkte des Systems, die durch einen Stab oder ausgespannten Faden verbunden sind, dieselben bezüglichen Abstände behalten haben, so hat man

$$\delta(m,m') = o, \quad \delta(m,m'') = o, \quad \delta(m',m'') = o \ \ldots$$

und die Gleichung (a) reduciert sich auf

$$Pp + P'p' + P''p'' + P'''p''' \ldots = o, \qquad (b)$$

welche genau die des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ist (§. 331).

Wenn bei den Verrückungen der Punkte M, M', M''... diejenigen, welche Ringe sind, längs der Fäden, welche durch sie gehen, gegleitet sind, so hat die Gleichung (b) noch immer statt, sobald sich die ganzen Längen dieser Fäden nicht geändert haben. Man nehme z. B. an, es sey M ein Ring, der längs des Fadens $M'MM''$ gegleitet ist, so hat man nicht mehr einzeln $\delta(m, m') = o$ und $\delta(m, m'') = o$, aber man hat noch immer

$$\delta(m,m') + \delta(m,m'') = o,$$

weil die ganze Länge des Fadens dieselbe bleibt. In diesem Falle sind aber die Spannungen $[m, m']$ und $[m, m'']$ der beiden Theile dieses Fadens gleich. Daher kann man die Glieder, welche diese Spannungen in der Gleichung (a) enthalten, auf folgende Weise schreiben:

$$[m, m'] \, [\delta(m, m') + \delta(m, m'')]$$

und sie heben sich daher auf.

Im Allgemeinen sieht man, dafs, wenn ein biegsamer Faden durch eine beliebige Anzahl von Ringen geht, die gleichen Spannungen seiner verschiedenen Theile aus der Gleichung (a) verschwinden werden, so oft sich die ganze Länge dieses Fadens nicht ändert.

Hieraus folgt also:

1) Dafs die Gleichung, welche sich aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten ergiebt, für alle unendlich kleinen Bewegungen statt hat, die man einem festen Körper, der frei oder durch feste Widerstände gehindert ist, geben kann; denn bei allen diesen Bewegungen sind die bezüglichen Abstände der Punkte dieses Körpers unveränderlich.

2) Dafs diese Gleichung auch für alle unendlich kleinen Bewegungen statt hat, welche ein System von Punkten oder Ringen, die durch biegsame Fäden verbunden sind, annehmen kann, sobald diese Fäden gerade oder gespannt bleiben. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so verschwinden die Spannungen nicht sämmtlich in der Gleichung (a) und die Gleichung (b) hat nicht statt.

336.

Man mufs auch noch beweisen, dafs umgekehrt, wenn die Gleichung (b) für alle unendlich kleinen Bewegungen statt hat, die das System der Punkte $M, M', M''\ldots$ annehmen kann, auch die gegebenen Kräfte $P, P', P''\ldots$ im Gleichgewichte sind, wie wir es früher (§. 331) gesagt haben.

Man setze für den Augenblick voraus, das Gleichgewicht habe nicht statt. Es werden sich alsdann die Punkte $M, M', M''\ldots$ oder ein Theil derselben in Bewegung setzen und im ersten Augenblicke zu gleicher Zeit gerade Linien, wie MN, $M'N'$, $M''N''\ldots$ beschreiben. Man wird daher alle diese Punkte zur Ruhe bringen können, wenn man passende Kräfte

an dieselben anbringt, die nach den Verlängerungen dieser geraden Linie, in Richtungen, die den entstandenen Bewegungen entgegengesetzt sind, wirken. Bezeichnen wir daher diese unbekannten Kräfte durch R, R', R''..., so wird das Gleichgewicht zwischen den Kräften P, P', P''... R, R', R''... statt finden, so dafs, wenn r, r', r''... die auf die Richtungen dieser neuen Kräfte R, R', R''... projicierten virtuellen Geschwindigkeiten bedeuten, nach dem eben bewiesenen Principe der virtuellen Geschwindigkeiten,

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots + Rr + R'r' + R''r'' + \ldots = o,$$

oder einfach

$$Rr + R'r' + R''r'' + \ldots = o \qquad (c)$$

ist, in Folge der Gleichung (b), die nach der Voraussetzung statt hat. Da die Gleichung (c) für alle unendlich kleinen Bewegungen gilt, die sich mit den Bedingungen des Systems der Punkte M, M', M''... vertragen, so können wir die in demselben Augenblicke beschriebenen Räume MN, $M'N'$, $M''N''$... für ihre virtuellen Geschwindigkeiten nehmen. Da aber diese Linien auf den Verlängerungen der Richtungen von R, R', R''... genommen werden, so folgt hieraus, dafs die Projectionen r, r', r''... sämmtlich negativ sind (§. 331), und, ohne Rücksicht auf das Zeichen, diesen Linien MN, $M'N'$ $M''N''$... gleich sind. Da aber alle Glieder der Gleichung (c) gleiches Zeichen haben, so kann ihre Summe nicht Null seyn, wenn nicht jedes einzelne Glied Null ist; man hat daher

$$R.MN = o, \quad R'.M'N' = o, \quad R''.M''N'' = o \text{ u. s. w.}$$

Soll aber das Produkt $R.MN$ Null seyn, so mufs entweder $R = o$ oder $MN = o$ seyn, was in dem einen wie in dem anderen Falle andeutet, dafs der Punkt M gar keine Bewegung annehmen kann; ebenso ist es in Beziehung auf alle übrigen Punkte, folglich ist das System im Gleichgewichte, und dies sollte bewiesen werden.

337.

Es wird sich später zeigen, wenn wir von den Flüssigkeiten handeln, dafs, wenn man von ihrer Fundamentaleigenschaft ausgeht, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten auch bei dem Gleichgewichte eines Systems von Kräften statt hat, deren Wirkungen sich durch eine Flüssigkeit fortpflanzen,

die in einer Röhre oder einem Gefäſse von beliebiger Gestalt enthalten ist. Auf diese Weise wird der Beweis des allgemeinen Princips der virtuellen Geschwindigkeit alle Ausdehnung, die man verlangen kann, haben; denn die unbiegsamen Stäbe, die gespannten Fäden, die in Röhren enthaltenen Flüssigkeiten, sind die verschiedenen Arten von Vermittlern, die man zwischen getrennten materiellen Punkten anbringen kann, um die Wirkung der Kräfte eines dieser Punkte zu dem anderen hin zu leiten, und wenn auſserdem einige dieser Punkte unbeweglich, andere gänzlich frei und andere gezwungen sind, auf gegebenen Oberflächen oder krummen Linien zu bleiben, so hat man das allgemeinste System materieller Punkte, welches man zu betrachten nöthig haben könnte. Ich will jedoch noch einen anderen Beweis dieses Princips geben, den man Lagrange verdankt, und der auf einfacheren Gründen, als der vorhergehende, beruht. Er gründet sich auf die Möglichkeit, daſs man alle an ein System von materiellen Punkten angebrachten Kräfte durch ein einziges Gewicht ersetzen kann, welches, wie sogleich erklärt werden soll, wirkt.

338.

Wird ein Punkt M (Fig. 84) durch eine Kraft P getrieben, die nach der Linie MA gerichtet ist, so kann man annehmen, daſs diese Kraft an den Punkt A angebracht sey und vermittelst eines Seils MA wirkt, das an diesen Punkt M befestigt ist. Man kann alsdann dieses Seil durch einen Faden ersetzen, der abwechselnd über einen festen und einen beweglichen Flaschenzug geht und an einem seiner beiden Enden an den einen oder den anderen dieser beiden Flaschenzüge befestigt ist. Die feste Flasche entspricht dem Punkte A, die bewegliche dem Punkte M. Hängt man am freien Ende des Fadens das verticale Gewicht K auf, so ist die Spannung in der ganzen Länge des Fadens gleich K. Betrachtet man die Dimensionen der Rollen als unendlich klein, so haben die Spannungen aller Theile dieses Fadens, die nach dem beweglichen Flaschenzuge gehen, dieselbe Richtung. Nennt man ihre Anzahl i, so ist ihre Mittelkraft gleich iK und wirkt auf den Punkt M nach der Richtung MA; ist daher $iK = P$, so kann man die Wirkung der Kraft P durch die des Gewichtes K ersetzen.

Ebenso ist es in Beziehung auf die anderen Kräfte P', P''... die an die Punkte M', M''... nach den Richtungen $M'A'$, $M''A''$... angebracht sind; jede derselben kann durch ein Gewicht ersetzt werden, das ein aliquoter Theil ihrer Intensität ist und auf die in Beziehung auf die Kraft P angegebene Weise wirkt. Aufserdem sieht man leicht, dafs man immer, wie die Figur 85 zeigt, einen und denselben Faden über alle in A, A', A''... befestigten Flaschen und über alle beweglichen Flaschen, die an die Punkte M, M', M''... angebracht sind, gehen lassen kann. Man nehme daher an, es seyen i, i', i''... ganze Zahlen und man habe

$$iK = P, \quad i'K = P', \quad i''K = P''... \qquad (d)$$

Hängt man das Gewicht K vertical an dem freien Ende dieses Fadens auf, so wird das System der gegebenen Kräfte P, P', P''... durch dieses einzige Gewicht ersetzt, dessen Wirkung, vermittelst dieses Fadens und der festen und beweglichen Rollen, den Punkten M, M', M''... mitgetheilt wird. Die Gleichungen (d) setzen zwar voraus, dafs die Kräfte P, P', P''... commensurabel sind; diese Annahme ist jedoch immer zulässig, da ihr gemeinschaftliches Maafs K ein so kleines Gewicht seyn kann, als man will, und selbst unendlich klein, wenn dies nöthig ist.

339.

Man denke sich jetzt, man gebe den Punkten M, M', M''... eine Bewegung, die sich mit den Bedingungen des Systems, so wie auch die gerade entgegengesetzte Bewegung, verträgt. Seyen N, N', N''... ihre Lagen nach einer unendlich kleinen Zeit und man nenne, wie früher, p, p', p''... die Projectionen von MN, $M'N'$, $M''N''$... auf die Richtungen von P, P', P''... oder auf ihre Verlängerungen.

Da der Punkt N in a auf die Linie MA projiciert ist, so verkürzt sich jedes der Seile, die von A nach M gehen, um die Gröfse $AM - AN$, für welche man $AM - AN$ nehmen kann, wenn man die unendlich kleinen Gröfsen der zweiten Ordnung vernachlässigt. Dieses Seil wird dagegen um Ma verlängert, wenn der Punkt a auf die Verlängerung von AM fällt. Hieraus folgt, dafs der Punkt K in Folge der Verrückung von M, im ersten Falle sinken und im zweiten

sich erheben wird, und zwar um eine Gröfse, die dem Produkte aus Ma in i gleich ist, was darauf zurück kommt, dafs, nach dem Zeichen von p (§. 331), die positive oder negative Aenderung der verticalen Höhe, die blos von dieser Verrückung herrührt, durch ip ausgedrückt wird. Ebenso ist es in Beziehung auf die übrigen Punkte M', M''...; bezeichnet man daher durch ζ eine unendlich kleine Gröfse, die, je nachdem sie positiv oder negativ ist, die ganze Gröfse darstellt, um die der Punkt K, in Folge der gleichzeitigen Verrückungen aller Punkte des Systems, sinkt oder sich erhebt, so hat man

$$\zeta = ip + i'p' + i''p'' + \ldots$$

Da aber das Gewicht K herab zu sinken strebt, und die einzige Kraft ist, die auf das System wirkt, so ist es klar, dafs Nichts dasselbe hindern wird, die Bewegung, welche wir betrachten, hervor zu bringen, wenn dieser Werth von ζ positiv ist, und dafs ebenso das Gewicht K durch Nichts verhindert wird, die entgegengesetzte Bewegung hervor zu bringen, die man ebenfalls als möglich voraussetzt und bei welcher ζ das Zeichen ändert. Zum Gleichgewichte ist es daher erforderlich, dafs ζ Null sey. Da umgekehrt das Gewicht K keine Bewegung hervorbringen kann, ohne im ersten Augenblicke um eine unendlich kleine Gröfse zu sinken, so folgt hieraus, dafs es gar keine hervorbringen und dafs das Gleichgewicht statt finden wird, wenn man für alle unendlich kleinen Verrückungen der Punkte M, M', M''..., die sich mit den Bedingungen des Systems vertragen, $\zeta = o$ hat.

Multipliciert man nun durch K die Gleichung

$$ip + i'p' + i''p'' + \ldots = o,$$

die für das Gleichgewicht nothwendig und hinreichend ist, und berücksichtigt man die Gleichungen (d), so geht sie in die Gleichung (b) des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten über, die man erhalten wollte.

340.

Dieser Beweis setzt nicht voraus, dafs das Princip schon für einen isolierten materiellen Punkt bewiesen ist. Reduciert sich das System auf einen einzigen Punkt M, an welchen die der Gröfse und Richtung nach gegebenen Kräfte P, P',

P''... angebracht sind, so substituiert man ihrer gleichzeitigen Richtung die eines Punktes K, wie in §. 338, und wenn diese Kräfte im Gleichgewichte sind, so kann man das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten aus dieser Substitution durch die eben angegebene Schlufsfolge ableiten. Dieses Princip giebt aber unmittelbar die Gleichungen des Gleichgewichtes des Punktes M, der auf einer Oberfläche oder krummen Linie bleiben muſs oder auch völlig frei ist (§. 39). Im letzteren Falle kann man hieraus, indem man eine der gegebenen Kräfte als der Mittelkraft aller übrigen gleich und entgegengesetzt betrachtet, die Regeln der Zusammensetzung und Zerlegung der parallelen Kräfte ableiten.

Auch kann man, ohne Schwierigkeit, aus dem allgemeinen Principe der virtuellen Geschwindigkeiten, die Gleichungen des Gleichgewichtes eines völlig freien festen Körpers ableiten, die wir auf andere Weise im §. 260 gefunden haben.

Wir können nemlich zuerst annehmen, daſs alle Punkte dieses Körpers gleich groſse gerade Linien beschreiben, die einer der Coordinatenaxen parallel sind. Nennt man h die Länge dieser geraden Linien, und α, α', α''... die Winkel, die ihre gemeinschaftliche Richtung mit denen der gegebenen Kräfte einschlieſst, so hat man

$$p = h \cos \alpha, \quad p' = h' \cos \alpha', \quad p'' = h'' \cos \alpha'' \ldots$$

für die virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte M, M', M''... des festen Körpers, die auf die Richtungen der an diese Punkte angebrachten Kräfte P, P', P''... projiciert sind. Substituiert man daher diese Werthe in die Gleichung (b) und läſst den Factor h, der allen Gliedern gemeinschaftlich ist, weg, so hat man die Gleichung des Gleichgewichtes

$$P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \ldots = o.$$

Betrachtet man nach einander die Bewegungen des Körpers, die den beiden anderen Coordinatenaxen parallel sind, so erhält man ebenso die beiden anderen Gleichungen des Gleichgewichtes, die dieser ähnlich sind.

Wir können uns auch denken, daſs sich der Körper um eine der Coordinatenaxen dreht. Um die Gleichung, die dieser Bewegung entspricht, zu bilden, bezeichne ich die Coordinaten der Punkte M, M', M''... und die Winkel, welche

die Richtungen der Kräfte $P, P', P''\ldots$ mit denen der Coordinaten einschliefsen, durch dieselben Buchstaben wie in §. 260. Nimmt man an, dafs die Umdrehung um die Axe der z geschieht, so beschreibt jeder dieser Punkte einen Kreisbogen, der mit der Ebene der x und y parallel ist und dessen Halbmesser das von diesem Punkte auf diese Axe gefällte Perpendikel ist. Aufserdem ist der durch dieses Perpendikel beschriebene Winkel, vermöge der Natur der festen Körper, für alle Punkte desselben, der nemliche. Setzt man ihn daher unendlich klein, bezeichnet ihn durch ω und durch $r, r', r''\ldots$ die Abstände der Punkte $M, M', M''\ldots$, von der Axe der z, so hat man $r\omega, r'\omega, r''\omega\ldots$ für ihre virtuellen Geschwindigkeiten, und nennt man auch $\delta, \delta', \delta''\ldots$ die spitzen oder stumpfen Winkel, welche die Richtungen dieser Geschwindigkeiten mit denen der Kräfte $P, P', P''\ldots$ einschliefsen, so folgt daraus

$$p = r\omega \cos\delta, \quad p' = r'\omega \cos\delta', \quad p'' = r''\omega \cos\delta''\ldots$$

für die Projectionen dieser Geschwindigkeiten auf die Richtungen dieser Kräfte oder ihre Verlängerungen.

Seyen ferner a, b, c die Winkel, welche zwischen der Richtung der Geschwindigkeit $r\omega$ und den durch den Punkt M parallel mit den Axen der x, y, z gezogenen Linien enthalten sind, und man bezeichne durch α, β, γ dieselben Winkel in Beziehung auf die Richtung der Kraft P, so hat man

$$\cos\delta = \cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma.$$

Da aber die Geschwindigkeit $r\omega$ im Punkte M eine Tangente des Kreises ist, dessen Halbmesser r ist und dessen Mittelpunkt in der Axe der z liegt, so sieht man leicht, dafs man

$$\cos b = \pm \frac{x}{r}, \quad \cos a = \mp \frac{y}{r}, \quad \cos c = o$$

und daher

$$p = r\omega \cos\delta = \pm (x \cos\beta - y \cos\alpha)\,\omega$$

hat. Ebenso ist

$$p' = \pm (x' \cos\beta' - y' \cos\alpha')\,\omega$$
$$p'' = \pm (x'' \cos\beta'' - y'' \cos\alpha'')\,\omega$$

u. s. w.

Die Zeichen hängen vom Sinne der Drehung ab, und man mufs in allen diesen Werthen, zu gleicher Zeit, die oberen oder die unteren Zeichen nehmen. Substituiert man

sie daher in die Gleichung (1) und unterdrückt den Factor $\pm\omega$, der allen Gliedern gemeinschaftlich ist, so hat man

$$p(x\cos\beta - y\cos\alpha) + p'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') + \ldots = o.$$

Diese Gleichung des Gleichgewichtes ist die der Momente in Beziehung auf die Axe der z, um welche die Bewegung statt hat; und man erhält auf dieselbe Weise die Gleichungen der Momente in Beziehung auf die Axen der x und y, indem man den festen Körper sich allmälich um diese zwei geraden Linien drehen läſst.

341.

Man kann der Gleichung (b) eine andere Gestalt geben, die die Anwendungen derselben erleichtert.

Zu diesem Ende seyen x, y, z die Coordinaten des Punktes M in seiner Lage des Gleichgewichtes, $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ das, was sie werden, wenn man diesen materiellen Punkt in eine unendlich nahe Lage N bringt; X, Y, Z die Seitenkräfte der Kraft P nach den Verlängerungen der x, y, z im positiven Sinne. Diese unendlich kleinen Gröſsen δx, δy, δz sind die Projectionen der virtuellen Geschwindigkeit MN auf die Richtungen der X, Y, Z, und da p immer ihre Projection auf die Richtung von P ist, so hat man (§. 331)

$$Pp = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Bezeichnet man die analogen Gröſsen, welche den Punkten M', M'', u. s. w. entsprechen, durch dieselben Buchstaben mit Accenten, so hat man auch

$$P'p' = X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z'$$
$$P''p'' = X''\delta x'' + Y''\delta y'' + Z''\delta z''$$

u. s. w., und wenn man diese Gleichungen und die vorhergehende addiert, so kann man

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

schreiben, wo sich die Summe Σ auf alle Punkte M, M', M''... des Systems erstreckt, und daher aus einer Anzahl von gleichen Theilen besteht, welche der der Punkte gleich ist. Auf diese Weise geht die Gleichung (b) in

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = o \qquad (c)$$

über, unter welcher Form man sie erhalten wollte.

Von welcher Art aber auch die Verbindung zwischen den Punkten des Körpers sey, so kann man sie immer durch

eine oder mehrere Gleichungen, zwischen den Coordinaten, ausdrücken. Seyen daher L, L', L''... gegebene Functionen von x, y, z, x', y'... oder eines Theils dieser Coordinaten und man nehme an, dafs diese Gleichungen

$$L = o, \quad L' = o, \quad L'' = o \ldots \qquad (f)$$

sind. Da die gleichzeitigen Verrückungen aller Punkte des Systems, mit den Bedingungen, welchen es unterworfen ist, vereinbar seyn müssen, so müssen die Coordinaten x, y, z, x', y', z'... von M, M', M''... und die Coordinaten $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, $x' + \delta x'$... von N, N', N''... diesen Gleichungen Genüge leisten. Vernachlässigt man daher die unendlich kleinen Gröfsen des zweiten Ranges, so hat man

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx'}\delta x' + \ldots &= o \\
\frac{dL'}{dx}\delta x + \frac{dL'}{dy}\delta y + \frac{dL'}{dz}\delta z + \frac{dL'}{dx'}\delta x' + \ldots &= o \\
\frac{dL''}{dx}\delta x + \frac{dL''}{dy}\delta y + \frac{dL''}{dz}\delta z + \frac{dL''}{dx'}\delta x' + \ldots &= o
\end{aligned}\right\} \quad (g)$$

u. s. w.

Aendert man zu gleicher Zeit die Richtung der Verrückungen aller Punkte des Systems in die entgegengesetzte um, so ändern sich zu gleicher Zeit die Zeichen von δx, δy, δz, $\delta x'$... und diese Gleichungen bestehen noch immer, so dafs die unendlich kleine Bewegung, der sie entsprechen, und die gerade entgegengesetzte Bewegung beide mit den gegebenen Bedingungen vereinbar sind, wie dies auch der Ausdruck des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten stillschweigend voraussetzt (§. 331).

Dies angenommen, eliminiere man, vermittelst dieser Gleichungen (g), in jedem Falle, eine Anzahl Gröfsen δx, δy, δz, $\delta x'$... aus der Gleichung (e), die der Anzahl der Gleichungen (f) gleich ist. Diejenigen dieser Gröfsen, welche alsdann in dem ersten Theile der Gleichung (e) bleiben, sind unabhängig von einander. Man mufs daher ihre Coefficienten einzeln gleich Null setzen, was alle Gleichungen des Gleichgewichtes des Systems giebt, deren Anzahl dreimal so grofs als die der materiellen Punkte M, M', M''... weniger der Anzahl der Gleichungen (f) seyn wird. Sind die Lagen die-

ser Punkte, d. h. die Werthe ihrer Coordinaten x, y, z, x'... gegeben, so müssen die Seitenkräfte der Kräfte P, P', P''... diesen Gleichungen des Gleichgewichtes genügen; sind dagegen diese Kräfte der Gröfse und Richtung nach gegeben und die Lagen der Punkte des Systems unbekannt, so dienen dieselben Gleichungen, mit den Gleichungen (f) verbunden, dazu, alle ihre Coordinaten zu bestimmen.

342.

Da die Gleichungen (e) und (g) in Beziehung auf δx, δy, δz, $\delta x'$... linear sind, so kann die Elimination eines Theils dieser Gröfsen, nach der bekannten Methode ausgeführt werden, indem man diese Gleichungen addiert, nachdem man die Gleichungen g mit unbestimmten Factoren multipliciert hat und in dieser Summe, die Coefficienten derjenigen unter den Gröfsen δx, δy, δz, $\delta x'$..., die man eliminieren will, gleich Null setzt, woraus sich eine Anzahl von Gleichungen ergeben wird, die der der Coordinaten gleich ist, aus welchen man noch, in jedem Falle, die unbestimmten Factoren eliminieren mufs, um die Gleichungen des Gleichgewichtes des Systems zu haben.

Bezeichnet man durch λ, λ', λ''... die Factoren, durch welche man die Gleichungen (g) multipliciert, so hat man, nach diesem Verfahren,

$$\left.\begin{aligned} X + \lambda\frac{dL}{dx} + \lambda'\frac{dL'}{dx} + \lambda''\frac{dL''}{dx} + \ldots &= o \\ Y + \lambda\frac{dL}{dy} + \lambda'\frac{dL'}{dy} + \lambda''\frac{dL''}{dy} + \ldots &= o \\ Z + \lambda\frac{dL}{dz} + \lambda'\frac{dL'}{dz} + \lambda''\frac{dL''}{dz} + \ldots &= o \end{aligned}\right\} (h)$$

für die Gleichungen, die von den Coefficienten von δx, δy, δz herrühren, ebenso hat man

$$\left.\begin{aligned} X' + \lambda\frac{dL}{dx'} + \lambda'\frac{dL'}{dx'} + \lambda''\frac{dL''}{dx'} + \ldots &= o \\ Y' + \lambda\frac{dL}{dy'} + \lambda'\frac{dL'}{dy'} + \lambda''\frac{dL''}{dy'} + \ldots &= o \\ Z' + \lambda\frac{dL}{dz'} + \lambda'\frac{dL'}{dz'} + \lambda''\frac{dL''}{dz'} + \ldots &= o \end{aligned}\right\} (h')$$

für diejenigen, welche von den Coefficienten von $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ herrühren u. s. w.

Statt λ, λ', λ''... aus diesen Gleichungen zu eliminiren, kann man auch den Werth dieser Unbekannten aus diesen Gleichungen finden; es soll nun gezeigt werden, wie man alsdann die Gröfse und Richtung der Kräfte finden kann, die von der Verbindung der Punkte des Systems herrühren, auf alle diese Punkte wirken und den gegebenen Kräften P, P', P''... das Gleichgewicht halten. Die Bestimmung dieser unbekannten Kräfte ist ein wichtiger Theil der Aufgabe des Gleichgewichtes, deren vollständige Auflösung in den Gleichungen (f), (h), (h')... enthalten ist.

343.

Nimmt man an, dafs alle Punkte des Systems, den Punkt M ausgenommen, unbeweglich gemacht werden, so wird hierdurch das Gleichgewicht nicht gestört werden. In Folge der Gleichung $L = o$ ist alsdann der Punkt M gezwungen, sich auf der Oberfläche zu bewegen, deren Gleichung $L = o$ ist und in welcher die Coordinaten x, y, z allein veränderlich sind. Bezeichnet man durch μ den Widerstand dieser Oberfläche, welcher nach einem der beiden Theile der Normalen in M gerichtet ist, so kann man diese Oberfläche oder die Bedingungsgleichung $L = o$ durch diese unbekannte Kraft ersetzen. Ebenso kann man $L' = o$ durch eine Kraft μ_1 ersetzen, die senkrecht auf der dieser Gleichung entsprechenden Oberfläche steht, $L'' = o$ durch eine Kraft μ_2, die senkrecht auf der entsprechenden Oberfläche steht u. s. w. Verbindet man daher mit der gegebenen Kraft P oder ihren Seitenkräften X, Y, Z diese senkrechten Kräfte μ, μ_1, μ_2..., so kann man alsdann den Punkt M als einen völlig freien und isolierten ansehen. Bezeichnet man daher durch a, b, c die Winkel, welche die Richtung der Kraft μ mit den Linien einschliefst, die den Axen der x, y, z parallel durch den Punkt M gezogen sind, durch a_1, b_1, c_1 dieselben Winkel in Beziehung auf die Kraft μ_1 u. s. w., so hat man

$$X + \mu \cos a + \mu_1 \cos a_1 + \mu_2 \cos a_2 + \ldots = o$$
$$Y + \mu \cos b + \mu_1 \cos b_1 + \mu_2 \cos b_2 + \ldots = o$$
$$Z + \mu \cos c + \mu_1 \cos c_1 + \mu_2 \cos c_2 + \ldots = o$$

für die drei Gleichungen des Gleichgewichtes des Punktes M. Setzt man aufserdem, zur Abkürzung,

$$\nu = \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}$$

$$\nu_1 = \sqrt{\left(\frac{dL'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz}\right)^2}$$

$$\nu_2 = \sqrt{\left(\frac{dL''}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL''}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL''}{dz}\right)^2}$$

u. s. w., so hat man, nach den bekannten Formeln (§. 21)

$$\left.\begin{array}{lll} \cos a = \frac{1}{\nu}\frac{dL}{dx}, & \cos b = \frac{1}{\nu}\frac{dL}{dy}, & \cos c = \frac{1}{\nu}\frac{dL}{dz} \\ \cos a_1 = \frac{1}{\nu_1}\frac{dL'}{dx}, & \cos b_1 = \frac{1}{\nu_1}\frac{dL'}{dy}, & \cos c_1 = \frac{1}{\nu_1}\frac{dL'}{dz} \\ \cos a_2 = \frac{1}{\nu_2}\frac{dL''}{dx}, & \cos b_2 = \frac{1}{\nu_2}\frac{dL''}{dy}, & \cos c_2 = \frac{1}{\nu_2}\frac{dL''}{dz} \end{array}\right\} (i)$$

u. s. w., wodurch diese drei Gleichungen des Gleichgewichtes in folgende übergehen:

$$X + \frac{\mu}{\nu}\frac{dL}{dx} + \frac{\mu_1}{\nu_1}\frac{dL'}{dx} + \frac{\mu_2}{\nu_2}\frac{dL''}{dx} + \ldots = o$$

$$Y + \frac{\mu}{\nu}\frac{dL}{dy} + \frac{\mu_1}{\nu_1}\frac{dL'}{dy} + \frac{\mu_2}{\nu_2}\frac{dL''}{dy} + \ldots = o$$

$$Z + \frac{\mu}{\nu}\frac{dL}{dz} + \frac{\mu_1}{\nu_1}\frac{dL'}{dz} + \frac{\mu_2}{\nu_2}\frac{dL''}{dz} + \ldots = o.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den drei Gleichungen (g), mit denen sie identisch seyn müssen, so findet man daraus

$$\mu = \nu\lambda, \quad \mu_1 = \nu_1\lambda', \quad \mu_2 = \nu_2\lambda' \ldots.$$

Daher werden, in Beziehung auf den Punkt M, die Kräfte, welche von seiner Verbindung mit den anderen Punkten des Systems herrühren, durch die Produkte $\nu\lambda$, $\nu_1\lambda'$, $\nu_2\lambda''\ldots$ ausgedrückt. Diese Kräfte müssen positiv seyn, man mufs daher den Wurzelgröfsen ν, ν_1, ν_2,... dieselben Zeichen geben, wie den Gröfsen λ, λ', $\lambda''\ldots$, und die Richtungen dieser Kräfte sind durch die Gleichungen (i) vollkommen bestimmt.

Nennt man ebenso μ', μ'_1, $\mu'_2\ldots$ die Kräfte, welche, von der Verbindung des Systems herrührend, auf den Punkt

M' wirken und auf den verschiedenen Oberflächen senkrecht stehen, auf welchen er sich bewegen mufs, wenn alle übrigen Punkte M, M'', M'''... fest sind, so findet man ebenso

$$\mu' = \nu'\lambda, \quad \mu_1' = \nu_1'\lambda', \quad \mu_2' = \nu_2'\lambda''...$$

wenn man zur Abkürzung

$$\nu' = \sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2}$$

$$\nu_1' = \sqrt{\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2}$$

$$\nu_2' = \sqrt{\left(\frac{dL''}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL''}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL''}{dz'}\right)^2}$$

u. s. w. setzt. Ebenso erhält man die Werthe der Kräfte, die sich auf die Punkte M'', M'''... beziehen.

344.

Vergleicht man die Werthe von μ und μ', so hat man

$$\mu\nu' = \mu'\nu,$$

so dafs sie sich zu einander, wie die Gröfsen ν und ν' verhalten. Wenn daher zwei materielle Punkte M und M' unter sich, und, wenn man will, auch mit einer beliebigen Zahl anderer Punkte, durch die Gleichung $L = o$ verbunden sind, so ergeben sich daraus, im Zustande des Gleichgewichtes, Kräfte μ und μ', welche an die Punkte M und M' angebracht sind, deren Gröfsen sich wie ν zu ν' verhalten und die mit den Coordinatenaxen Winkel einschliefsen, deren Cosinus

$$\frac{1}{\nu}\frac{dL}{dx}, \quad \frac{1}{\nu}\frac{dL}{dy}, \quad \frac{1}{\nu}\frac{dL}{dz}$$

für die Kraft μ und

$$\frac{1}{\nu'}\frac{dL}{dx'}, \quad \frac{1}{\nu'}\frac{dL}{dy'}, \quad \frac{1}{\nu'}\frac{dL}{dz'}$$

für die Kraft μ' sind. Die Richtung und Gröfse dieser Kräfte hängt von dem Zeichen und dem Werthe einer Gröfse λ ab, die man, in jedem Falle, aus den Gleichungen des Gleichgewichtes findet. Die Betrachtung der Oberflächen, auf welchen jeder der Punkte des Systems die Freiheit sich zu bewegen behält, wenn alle übrigen als fest gedacht werden, bestimmt die senkrechten Richtungen der Kräfte, die von de.

Verbindung dieser Punkte herrühren, für jede der Gleichungen, durch welche diese Verbindung ausgedrückt wird (§. 290); hieraus läfst sich aber gar kein Verhältnifs zwischen den Kräften, die sich auf zwei, durch dieselbe Gleichung verbundene, materielle Punkte beziehen, ableiten, und nur das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, oder die aus demselben abgeleiteten Gleichungen (h), (h') u. s. w. geben dieses Verhältnifs a priori, im Falle des Gleichgewichtes.

345.

Um eine Anwendung dieser Formeln zu geben, wollen wir das Beispiel des Seilpolygons wieder vornehmen, das wir schon im ersten Abschnitte des vorhergehenden Kapitels betrachtet haben, und annehmen, dafs die materiellen Punkte M, M', M''... die Spitzen dieses Polygons sind.

Nennt man l, l', l''... die gegebenen Längen der Seiten MM', $M'M''$, $M''M'''$..., so sind, in diesem Falle, die Gleichungen (f)

$$L = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}-l=o$$
$$L' = \sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}-l'=o$$
$$L'' = \sqrt{(x''-x''')^2+(y''-y''')^2+(z''-z''')^2}-l''=o$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

woraus sich

$$\frac{dL}{dx} = -\frac{dL}{dx'} = \frac{x-x'}{l}, \quad \frac{dL'}{dx'} = -\frac{dL'}{dx''} = \frac{x'-x''}{l'} \ldots$$
$$\frac{dL}{dy} = -\frac{dL}{dy'} = \frac{y-y'}{l}, \quad \frac{dL'}{dy'} = -\frac{dL'}{dy''} = \frac{y'-y''}{l'} \ldots$$
$$\frac{dL}{dz} = -\frac{dL}{dz'} = \frac{z-z'}{l}, \quad \frac{dL'}{dz'} = -\frac{dL'}{dz''} = \frac{z'-z''}{l'} \ldots$$

ergiebt, alle übrigen partiellen Differentiale von L, L', L''... welche in den vorhergehenden Formeln vorkommen, werden gleich Null seyn.

Betrachtet man die beiden Punkte M und M', so hat man

$$\nu = \nu' = \pm 1, \quad \mu = \mu' = \pm \lambda,$$

wo man die oberen oder unteren Zeichen nehmen mufs, je nachdem der Werth von λ positiv oder negativ ist. Hieraus und aus den vorhergehenden Gleichungen schliefst man, dafs

die Punkte M und M' durch gleiche und entgegengesetzte Kräfte getrieben werden, die nach der geraden Linie MM', oder ihren Verlängerungen gerichtet sind und deren gemeinschaftlicher Werth, ohne Rücksicht auf das Zeichen, die Gröfse λ seyn wird. Ebenso ist es in Beziehung auf die Punkte M' und M'', M'' und M''' u. s. w., so dafs, im Zustande des Gleichgewichtes, die Gröfsen λ, λ', λ''... die Zusammenziehungen oder Ausdehnungen der auf einander folgenden Seiten MM', $M'M''$, $M''M'''$... ausdrücken. Da man, vermöge der Gleichungen (i)

$$\cos a = \pm \frac{x - x'}{l}, \quad \cos b = \pm \frac{y - y'}{l}, \quad \cos c = \pm \frac{z - z'}{l}$$

hat, und man die oberen oder unteren Zeichen nehmen mufs, je nachdem der Werth von λ positiv oder negativ ist, so findet man hieraus z. B., dafs die an den Punkt M angebrachte Kraft von M nach M' gerichtet ist und eine Zusammenziehung der Seite MM' ausdrückt, wenn dieser Werth negativ ist, während diese Kraft im entgegengesetzten Sinne wirkt und eine Spannung ausdrückt, wenn der Werth von λ positiv ist. Beide Fälle sind möglich, wenn die Seiten des Polygons unbiegsame, durch Gewinde verbundene Stäbe sind, dagegen kann nur der zweite Fall statt finden, wenn die Seiten biegsame Fäden sind.

Die Gleichungen (h), (h'), (h'') kann man auch wie folgt schreiben:

$$X = \frac{\lambda (x' - x)}{l}$$

$$Y = \frac{\lambda (y' - y)}{l}$$

$$Z = \frac{\lambda (z' - z)}{l}$$

$$X' + \frac{\lambda (x' - x)}{l} = \frac{\lambda' (x'' - x')}{l'}$$

$$Y' + \frac{\lambda (y' - y)}{l} = \frac{\lambda' (y'' - y')}{l'}$$

$$Z' + \frac{\lambda (z' - z)}{l} = \frac{\lambda' (z'' - z')}{l'}$$

$$X'' + \frac{\lambda'(x''-x')}{l'} = \frac{\lambda''(x'''-x'')}{l''}$$

$$Y'' + \frac{\lambda'(y''-y')}{l'} = \frac{\lambda''(y'''-y'')}{l''}$$

$$Z'' + \frac{\lambda'(z''-z')}{l'} = \frac{\lambda''(z'''-z'')}{l''}$$

. . . . .

Die drei ersten zeigen, daſs die Spannung λ die Mittelkraft der drei Kräfte X, Y, Z seyn wird. Addiert man sie zu den drei folgenden, so hat man

$$X + X' = \frac{\lambda'(x''-x')}{l'}$$

$$Y + Y' = \frac{\lambda'(y''-y')}{l'}$$

$$Z + Z' = \frac{\lambda'(z''-z')}{l'},$$

woraus hervorgeht, daſs die Spannung λ' die Mittelkraft der Kräfte X', Y', Z' und der parallel mit sich selbst nach M' versetzten Kräfte X, Y, Z ist. Fährt man so fort, so hat man für die Spannung einer beliebigen Seite denselben Werth wie in §. 287.

Bezeichnet man die Anzahl der Spitzen M, M', M''... durch n, so ist die der vorhergehenden Gleichungen $3n$ und die der Spannungen λ, λ', λ''... gleich $n - 1$. Eliminiert man diese Gröſsen, so hat man daher $2n + 1$ Gleichungen des Gleichgewichtes, welche, in Verbindung mit den $n - 1$ gegebenen Längen l, l', l''... der Seiten des Vielecks, hinreichend sind, um die $3n$ Coordinaten der Spitzen und daher die Gestalt des Gleichgewichtes zu bestimmen. Doch hat diese Berechnung keinen Nutzen, und es ist besser, wie wir es in §. 286 gethan haben, die Seiten des Seilpolygons allmälich nach den gegebenen Gröſsen und Richtungen der Kräfte, die an seinen verschiedenen Spitzen wirken, zu bestimmen.

346.

In dem Falle, wenn ein beliebiges System materieller Punkte M, M', M''... gegeben ist, bei welchem die gegebenen Kräfte, die an diese Punkte angebracht sind, von ihren

wechselseitigen Anziehungen oder Abstofsungen, und ähnlichen Kräften, die von einem oder mehreren Mittelpunkten ausgehen, herrühren, hat man

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = d\varphi(x, y, z, x', y', z' \ldots),$$

wo φ eine gegebene Function der Coordinaten von M, M', $M''\ldots$ ist, welche von dem Gesetze, welchem diese Kräfte, in Beziehung auf die Abstände, unterworfen sind, abhängt. In Beziehung auf die Kräfte, welche von festen Mittelpunkten ausgehen, folgt dies aus dem, was man in §. 158 gesehen hat. Aufserdem nehme man an, es sey U die wechselseitige Wirkung von M und M', und, um einen bestimmten Fall zu betrachten, setze man, sie sey eine anziehende. Sey auch u ihr wechselseitiger Abstand, so dafs U eine gegebene Function von u ist und man

$$u^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$

hat.

Die Cosinus der Winkel, welche die Linie MM' mit Linien einschliefst, die durch den Punkt M, nach den Richtungen der positiven x, y, z, gezogen sind, sind

$$\frac{x' - x}{u}, \quad \frac{y' - y}{u}, \quad \frac{z' - z}{u};$$

multipliciert man sie mit U, so hat man die Seitenkräfte dieser an den Punkt M angebrachten und nach MM' gerichteten Kraft. Die Seitenkräfte derselben Kraft U, die an den Punkt M' nach der Richtung $M'M$ angebracht ist, sind gleich und entgegengesetzt; hieraus findet man

$$\frac{U}{u}[(x'-x)(dx-dx')+(y'-y)(dy-dy')+(z'-z)(dz-dz')]$$

als Theil der Summe Σ, die von der Wirkung und Gegenwirkung von M und M' herrührt. Differentiiert man den Werth von u^2, so hat man

$$udu = (x'-x)(dx'-dx)+(y'-y)(dy'-dy)+(z'-z)(dz'-dz)$$

wodurch die vorhergehende Gröfse auf $-Udu$, d. h. auf das Differential einer Function von u zurückkommt. Dasselbe gilt von den Theilen der Summe Σ, die von den wechselseitigen Wirkungen der übrigen Punkte des Systems herrühren; daher ist der ganze Werth dieser Summe aus Gliedern zusammengesetzt, die alle genaue Differentiale sind und dieser

Werth ist auch das Differential einer gegebenen Function der Coordinaten aller dieser Punkte.

In Folge der Gleichung (e) ist diese Function, die wir durch φ bezeichnen, ein Maximum oder ein Minimum in Beziehung auf die Werthe der Coordinaten, welche einer Lage des Gleichgewichtes des Systems entsprechen, und umgekehrt, wenn man das Maximum oder das Minimum einer Function φ bestimmt, indem man die Gleichungen (f) berücksichtigt, die zwischen den Coordinaten statt haben können, so entsprechen die Werthe, die man auf diese Weise erhält, den Lagen des Gleichgewichtes.

Hieraus findet man, dafs, wenn das System der Punkte M, M', M''... in Bewegung ist, so dafs ihre Coordinaten und daher die Gröfse φ Functionen der Zeit sind, diese Function φ ihr Maximum und ihr Minimum erreicht, so oft das System in eine Lage übergeht, in welcher es im Gleichgewichte bleiben wird, wenn die Punkte, aus welchen es besteht, nicht schon Geschwindigkeiten erlangt haben.

347.

Zwischen dem Maximum und Minimum der Gröfse φ ist ein wesentlicher Unterschied, den man berücksichtigen mufs und welchen ich nun erörtern will. Man sagt, der Zustand des Gleichgewichtes eines Körpers oder eines Systems von Körpern sey dauernd, wenn diese Körper, nachdem man sie ein Wenig aus ihren Lagen herausgebracht hat, wieder dahin zurück zu kommen streben, indem sie kleine Schwingungen machen, welche die Reibungen und Widerstände der Mittel zuletzt aufheben oder unmerklich machen. Das Gleichgewicht ist nicht dauernd oder augenblicklich, wenn der Körper oder das System von Körpern, welches in diesem Zustande ist, sich immer mehr davon zu entfernen strebt und zuletzt umschlägt, sobald man es ein Wenig davon entfernt hat. Setzt man gar keine Reibung voraus, die, bis zu einem gewissen Punkte, die Körper in ihren Lagen zurück halten kann, so ist dieser zweite Zustand des Gleichgewichtes ein rein mathematischer Fall, den man nie beobachten kann, weil die geringste störende Kraft hinreicht, um ihn aufzuheben

Dies vorausgesetzt, so sind die durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, oder, was dasselbe ist, die durch die Bedingung des Maximum oder Minimum der Function φ gegebenen Gleichungen, für beide Zustände gemeinschaftlich; das Maximum aber entspricht dem dauernden, das Minimum dem augenblicklichen Gleichgewichte, und dies ist es, was ich wirklich in einem anderen Kapitel zeigen werde, wo wir die Natur der Bewegung, welche statt hat, wenn ein System materieller Punkte sehr wenig von einem Zustande des Gleichgewichtes entfernt worden ist, betrachten werden. Für jetzt will ich nur Beispiele dieser zwei Zustände des Gleichgewichtes, in dem Falle, wenn ein System schwerer Körper gegeben ist, angeben und zuerst eine Eigenschaft seines Schwerpunktes mittheilen.

348.

Man nehme daher an, es sey die Schwere die einzige an die Punkte M, M', M''... angebrachte Kraft, welche die Schwerpunkte des Körpers seyn werden, deren Gewichte wir durch Π, Π', Π''... bezeichnen. Nimmt man an, daſs die Schwere vertical und im Sinne dieser Kraft gerichtet ist, so hat man

$$Z = \Pi, \quad Z' = \Pi', \quad Z'' = \Pi''\ldots;$$

die anderen Seitenkräfte sind alle Null, und es folgt daraus

$$d\varphi = \Pi dz + \Pi' dz' + \Pi'' dz''\ldots$$

Nennt man aber Σ die Summe der Gewichte Π, Π', Π''... und z_1 die Ordinate dieses Schwerpunktes, die vertical und im Sinne der Schwere gerichtet ist, so hat man auch (§. 64)

$$\Sigma \Pi z_1 = \Pi z + \Pi' z' + \Pi'' z'' + \ldots$$

also ist

$$d\varphi = \Sigma dz_1, \quad \varphi = c + \Sigma z_1,$$

wo c eine willkührliche Constante ist.

Hieraus schlieſst man:

Erstens: daſs die Ordinate z_1 die Gröſse ist, welche ein Maximum oder ein Minimum seyn muſs, wenn das System im Gleichgewichte ist, und umgekehrt.

Zweitens: daſs das Maximum von z_1 dem Falle des dauernden Gleichgewichtes, und das Minimum dem Falle des augenblicklichen Gleichgewichtes entspricht.

Es besteht also die Bedingung des Gleichgewichtes eines beliebigen Systems schwerer Körper darin, dafs der Schwerpunkt eines ganzen Systemes so tief oder so hoch als möglich liege, und zwar, wenn der Zustand des Gleichgewichtes ein dauernder ist, so tief, und, wenn er nur ein augenblicklicher ist, so hoch als möglich.

349.

Ist daher eine schwere Kette, die an ihren beiden Endpunkten an feste Punkte angebracht ist, im Gleichgewichte, so ist ihr Schwerpunkt so tief als möglich, was mit dem Resultate des §. 296 übereinstimmt.

Liegt ein schwerer materieller Punkt auf einer krummen Linie und ist die Tangente in mehreren Punkten horizontal, so ist die verticale Ordinate des Körpers, im Sinne der Schwere genommen, ein Maximum in denjenigen dieser Punkte, in welchen die krumme Linie nach oben concav ist, und ein Minimum in denjenigen, wo sie ihre Concavität nach unten kehrt; die ersten sind daher die Lagen des dauernden Gleichgewichtes und die letzteren die des augenblicklichen.

Legt man ein homogenes schweres Ellipsoid auf eine feste horizontale Ebene, so ist sein Schwerpunkt, oder der seiner Figur, der möglichst tiefe, wenn das Ellipsoid die feste Ebene in einem der beiden Endpunkte der kleinsten seiner drei Axen berührt und das Gleichgewicht ist alsdann ein dauerndes. Berührt es sie aber mit einem der Endpunkte der gröfsten der drei Axen, so ist sein Schwerpunkt so hoch als möglich und das Gleichgewicht ist nur ein augenblickliches. Ist endlich der Berührungspunkt ein Endpunkt der mittleren Axe, so ist die Höhe des Schwerpunktes ein Minimum für einen Theil der Schnitte des Körpers und ein Maximum für die anderen Schnitte; daher ist das Gleichgewicht dauernd oder nicht, je nachdem die Verrückungen im Sinne der ersteren oder der letzteren Schnitte statt haben werden. Dies alles ist a priori einleuchtend und kann zur Bestätigung des im vorhergehenden §. aufgestellten Lehrsatzes dienen.

Man nehme auch an, man habe zwei gleichartige und schwere Flüssigkeiten in ein Gefäfs geschüttet. Ist die Tren-

nungsfläche sowohl als diejenige, welche die obere Flüssigkeit begränzt, horizontal, und ist diese letztere Flüssigkeit diejenige, welche die geringste Dichtigkeit hat, so liegt der Schwerpunkt dieser beiden Flüssigkeiten so tief als möglich. Denn es ist leicht zu sehen, dafs, wenn man die eine oder die andere der beiden Oberflächen neigt oder krümmt, man immer den Schwerpunkt des Systems erheben wird. Da nun die beiden Oberflächen immer horizontal sind, so sieht man, dafs, wenn die weniger dichte Flüssigkeit sich unter der anderen befindet, der Schwerpunkt des Systemes so hoch als möglich liegt. Daher ist es für das Gleichgewicht der zwei übereinander stehenden Flüssigkeiten nothwendig und hinreichend, dafs jede derselben von einer horizontalen Ebene begränzt werde; für das dauernde Gleichgewicht ist es aber aufserdem nothwendig, dafs die dichtere Flüssigkeit den unteren Theil des Gefäfses einnehme.

Ist der Unterschied der beiden Flüssigkeiten unbeträchtlich, so ist es, bei vieler Vorsicht, möglich zu bewirken, dafs die dichtere Flüssigkeit oben schwimmt, dieses augenblickliche Gleichgewicht kann sich jedoch nicht so lange erhalten, dafs es beobachtet werden könnte, wenn nicht die Reibung der beiden Flüssigkeiten gegen die Wände des Gefäfses dazu kommt.

Zusätze des Uebersetzers.

I.

Es giebt zwei sehr verschiedene Wege die Mechanik darzustellen. Nach der einen Methode, die noch sehr wenig ausgebildet ist, ist die Mechanik eine rein mathematische Wissenschaft, und unterscheidet sich von der Geometrie dadurch, dafs sie neben dem Begriffe des Raumes, auf welchem diese beruht, auch noch den Begriff der Zeit zur Grundlage ihrer Betrachtungen macht. So wie diese die geometrischen Formen als im Raume vorhanden annimmt und die Gesetze ihrer Bildung untersucht, so betrachtet die Mechanik die Entstehung dieser Formen, indem sie annimmt, dafs dieselben durch gewisse Bewegungen entstehen, und indem sie zugleich die während dieser Bewegung verfliefsende Zeit berücksichtigt.

Nach der zweiten Methode dagegen, deren sich gerade die gröfsten Mathematiker bedient haben, ist die Mechanik eine blofse Erfahrungswissenschaft. Sie behandelt nemlich alsdann nicht die hypothetisch gedachte Bewegung geometrischer Gröfsen, sondern vielmehr die wirklich sichtbaren Bewegungen der in der Natur vorkommenden Körper, sie geht auf die Ursache dieser Bewegungen, auf die Naturkräfte zurück, und untersucht die Gesetze, nach welchen diese Kräfte wirken.

Welche von diesen zwei Methoden verdient bei dem Unterrichte den Vorzug? Ich glaube diese Frage, nach meiner Einsicht, auf folgende Weise beantworten zu müssen. Die zweite Methode scheint den Vorzug zu haben, dafs sie sich unmittelbar an die Wirklichkeit anschliefst und daher eine

unmittelbare praktische Anwendung zuläfst. Während nemlich die erste Methode auf gewisse hypothetische Voraussetzungen fortbaut, so mufs man, wenn die durch sie gefundenen Wahrheiten auf die Wirklichkeit angewandt werden sollen, zuerst zeigen, in wiefern jenen Voraussetzungen eine Realität zukommt. Dies scheint mir aber keinesweges ein Mangel, sondern vielmehr ein Vorzug der ersten Methode zu seyn. Indem nemlich die zweite Methode sich direct auf die Erfahrung beruft, so baut sie auf einen durchaus unsicheren Grund. Man sieht sich unumgänglich genöthigt, über die innere Beschaffenheit der Körper mehr als eine Behauptung aufzustellen, die durch die Fortschritte der Physik wesentlich modificiert werden können, und zum Theil schon jetzt Streitpunkte sind — ich erinnere blos an den Streit der Atomistiker und Dynamiker — man ist gezwungen, Dinge zu definieren, deren Wesen man gar nicht kennt. Dasjenige dagegen, was die rein mathematische Bewegungslehre findet, bleibt für immer fest begründet, mögen die Ansichten über das Wesen der Körper sich noch so sehr ändern. Wenn sie sich daher nicht unmittelbar auf die Wirklichkeit anwenden läfst, so liegt dies blos darin, dafs sie eine rein mathematische Wissenschaft, d. h. eine Combination ideeller Begriffe ist, und sie steht in dieser Beziehung der reinen Geometrie durchaus gleich. Ein wesentlicher Nachtheil der zweiten Methode scheint mir aber darin zu liegen, dafs sie nicht blos ihre Grundbegriffe aus der Wirklichkeit entlehnt, wodurch diese, wie gesagt, schwankend werden, sondern sich nicht einmal hiermit begnügen kann, vielmehr, sobald sie sich des mathematischen Calculs bedienen will, gezwungen wird, Abstractionen zu Hülfe zu rufen, die ebenfalls nicht in der Wirklichkeit nachgewiesen werden können, sondern nur in der Vorstellung vorhanden sind. Mit einem Worte, sie mufs sich ebensowohl wie die erste Methode auf Hypothesen stützen, nur mit dem Unterschiede, dafs, während man bei der rein mathematischen Behandlung von aller Wirklichkeit abstrahiert und nur auf freiwillig angenommene Voraussetzungen weiter baut, man sich hier erlaubt, Hypothetisches und wirklich Vorhandenes zu vermengen und so die ganze Untersuchung unsicher macht.

Was ich eben im Allgemeinen angedeutet habe, will ich

nun insbesondere an dem Gange, den Poisson genommen hat, weiter erläutern.

Auch dieser grofse Mathematiker bedient sich der zweiten Methode. Die wesentlichsten Erklärungen und Grundsätze, auf welchen seine Untersuchungen beruhen, sind folgende:

1) Die Mechanik ist die Wissenschaft, welche das Gleichgewicht und die Bewegung der Körper behandelt (§. 3).

2) Ein Körper ist ein begränzter Theil der Materie und die Materie alles, was auf irgend eine Weise einen Eindruck auf unsere Sinne zu machen im Stande ist. Die Masse eines Körpers ist die Quantität Materie, aus welcher er zusammengesetzt ist (§. 1).

3) Alle Körper sind beweglich, aber die Materie bewegt sich nie freiwillig. Die Ursache, die einen Körper in Bewegung setzt oder ihn zu bewegen strebt, nennt man eine Kraft (§. 2).

Dafs die Mechanik nach dieser Darstellung eine Erfahrungswissenschaft und von der rationellen Mathematik ganz verschieden ist, ergiebt sich aus dem Vorhergehenden von selbst. Aber nicht alle vorstehenden Sätze lassen sich in der Erfahrung nachweisen. Ich behaupte, dafs der Satz, dafs sich die Materie nie freiwillig bewegt, eine Hypothese ist, wiewohl ihn der Verf. durch folgendes Raisonnement beweisen will. "Es liefse sich kein Grund angeben, sagt er, warum „sich ein Körper eher nach der einen als nach der anderen „Seite fortbewegen sollte, und wenn wir einen Körper in dem „Zeitpunkte beobachten, in welchem er aus dem Zustande der „Ruhe in den der Bewegung übergeht, so finden wir immer, „dafs diese Veränderung des Ortes durch die Einwirkung „einer Ursache entsteht, die dem Körper fremd ist". Allein so lange wir noch die Ursache der Bewegung nicht kennen, so kann es sehr gut möglich seyn, dafs der Körper sich eher nach der einen als nach der anderen Seite bewegen mufs, ohne dafs wir den Grund angeben können. Wenn wir aber auf der Erde sehen, dafs die Ortsveränderung eines Körpers durch die Einwirkung einer ihm fremden Ursache entsteht, so beweist dies noch nicht, dafs die Materie überhaupt keine freiwillige Bewegung hat, so wenig als aus dem Umstande, dafs sich alle Körper nach dem Mittelpunkte der Erde bewe-

gen, geschlossen werden darf, dafs dies bei aller Materie der Fall ist. Es läfst sich daher z. B. aus dieser Erfahrung noch durchaus nicht ableiten, dafs die Bewegung der Weltkörper eine unfreiwillige sey.

Auch das, was der Verf. über das Maafs der Kräfte sagt, scheint mir auf einer nicht erwiesenen Annahme zu beruhen. "Hat man bemerkt, heifst es §. 5, dafs zwei Kräfte einander gleich sind, und bringt man sie alsdann nach derselben Richtung an denselben Punkt an, so hat man eine zweimal so grofse Kraft, vereinigt man auf dieselbe Weise drei gleiche Kräfte, so hat man eine dreifache Kraft u. s. w." Und später: "Auf diese Weise werden die Kräfte, was auch sonst ihre besondere Beschaffenheit seyn mag, mefsbare Gröfsen, die man durch Zahlen ausdrücken kann... Ebenso kann man ihre Intensitäten durch Linien darstellen, die diesen Zahlen proportional sind." Folgt aber aus dem Umstande, dafs zwei Kräfte, die nach entgegengesetzten Richtungen wirken, sich das Gleichgewicht halten, unmittelbar, dafs sie nach einer Richtung wirkend, die doppelte Intensität der einfachen Kraft haben? Ist es nicht denkbar, dafs sie durch ihre Vereinigung mehr oder weniger als die doppelte Intensität der einfachen Kraft erhalten?

Der Verf. sieht sich im Verlaufe seiner Untersuchungen genöthigt, die Kräfte nicht an Körpern von beliebiger Ausdehnung, sondern an materiellen Punkten wirken zu lassen. „Ein materieller Punkt, sagt er (§. 1), ist ein Körper, „dessen Dimensionen sämmtlich unendlich klein sind. Einen „Körper, der endliche Dimensionen hat, kann man als eine „Sammlung einer unendlich grofsen Anzahl materieller Punkte „ansehen, und ebenso kann man seine Masse als die Summe „aller ihrer unendlich kleinen Massen betrachten". Und in §. 4 bemerkt er: "Jedoch darf man einen materiellen Punkt „nicht mit dem verwechseln, was man in der Geometrie einen „Punkt nennt, wo dieses Wort den Durchschnitt zweier „Linien bedeutet. Ebenso ist der Raum, den ein materieller „Punkt durchlauft, nicht eine mathematische Linie; weil aber „ein solcher Körper unendlich klein ist, und daher die Breite „und Höhe des Raumes, durch welchen die Kraft ihn zu trei- „ben strebt, ebenfalls unendlich klein sind, so kann man die

„Lage desselben und die Richtung der Kraft auf dieselbe „Weise bestimmen, wie man die Lage eines Punktes und „die Richtung einer geraden Linie in der Geometrie bestimmt."

Es frägt sich nun, ist ein unendlich kleiner Körper, wie es der materielle Punkt seyn soll, etwas wirklich Vorhandenes, was wir aus der Erfahrung kennen, und bestehen die Körper wirklich aus einer unendlichen Anzahl materieller Punkte? Beide Fragen verneint der Verf. selbst. Nach seiner Ansicht bestehen die Körper aus materiellen Theilen, die durch Zwischenräume getrennt sind und Atome heifsen. Diese Atome sind aber unzerstörbar, ihre Masse, Gestalt und Volumen sind unveränderlich (§. 97). "Es ist hiernach einleuchtend, „fährt er fort (§. 98), dafs die Theilung der Masse in unendlich „kleine Theile und die Annahme einer Dichtigkeit eines jeden „Elementes... nicht auf die in der Natur vorkommen„den Körper pafst. Indessen kann man demungeachtet „von den Formeln Gebrauch machen, die auf diese Betrach„tung gegründet sind und sie auch dann noch anwenden, wenn „die Körper in Theile getheilt sind, die zwar eine endliche, „aber völlig insensible (tout à fait insensible) Gröfse haben." Der Verf. unterscheidet hier also nicht blos zwischen dem unendlich Kleinen und dem Endlichen, sondern auch die endlichen Gröfsen werden in zwei Klassen geschieden, in sensible und insensible. Ich habe in der Uebersetzung statt des Wortes insensibel das Wort unmefsbar gebraucht, ich mufs aber hier bemerken, dafs der Begriff einer insensiblen Gröfse (dessen sich jetzt die Physiker häufig bedienen) ein durchaus schwankender ist. Denn soll es heifsen, dafs eine solche Gröfse so unbedeutend ist, dafs sie unseren Sinnen, selbst wenn sie mit den uns zu Gebote stehenden Hülfswerkzeugen ausgerüstet sind, entgeht, wie dies der Verf. von den Atomen sagt (§. 97), so hängt es eben von der fortschreitenden Verbesserung und Ausbildung dieser Werkzeuge ab, ob eine Gröfse sensibel oder insensibel ist. Manches, was z. B. vor Erfindung des Mikroskops insensibel war, ist jetzt sensibel. Sollte aber insensible Gröfse eine solche heifsen, die überhaupt nicht durch unsere Sinne erkannt werden kann, so würde sie eben dadurch aufhören eine existierende Gröfse zu seyn, da nach des Verf. Erklärung nur das Materie ist, was einen

Eindruck auf unsere Sinne machen kann. Dem sey nun wie ihm wolle, so ist das Insensible noch durchaus von dem unendlich Kleinen geschieden. Der Verf. gesteht auch selbst, daſs die Integralformeln streng genommen nur auf das unendlich Kleine passen, daſs man sie aber ohne merklichen Fehler (sans erreur appréciable) auf die insensiblen Gröſsen anwenden dürfe, wiewohl es auch, wie er hinzu setzt, einzelne Ausnahmen giebt, bei welchen dies nicht erlaubt ist. Das Resultat aller dieser Bemerkungen ist nun, daſs nach des Verf. eigener Ansicht dem materiellen Punkte keine Realität zukommt, daſs er vielmehr, ebenso wie der mathematische eine bloſse Abstraction ist, daſs daher alle Betrachtungen, die der Verf. in der Statik anstellt, sich nicht direct auf die Wirklichkeit beziehen, und folglich in dieser Beziehung von der rein mathematischen Bewegungslehre Nichts voraus haben. Und dies war es gerade, was ich zeigen wollte.

Ich will hieran noch eine Bemerkung über die Ansicht des Verf. vom unendlich Kleinen knüpfen. Der Streit über die Nützlichkeit und Nothwendigkeit des Begriffes des unendlich Kleinen in der höheren Analysis ist schon zu häufig besprochen, als daſs ich es für passend halten sollte, hier Etwas für oder gegen die Darstellung des Verf., der sich überall dieses Begriffes bedient, zu sagen. Alle geometrischen Lehren, die man in der Einleitung findet, sind schon in hinlänglich bekannten Werken, auch ohne Hülfe des unendlich Kleinen, abgeleitet worden, auf welche ich daher nur verweisen darf; über die mechanischen Sätze, die seltener ohne diese Beihülfe dargestellt worden sind, werde ich noch gelegentlich Einiges sagen. Nur die Art, wie der Verf. hier diesen Begriff in die Mathematik einführen will, kann ich nicht unberührt lassen. "Das unendlich Kleine, sagt er §. 12, ist eine „Gröſse, die kleiner ist, als jede gegebene Gröſse derselben „Art. Man wird mit Nothwendigkeit auf die Idee des „unendlich Kleinen geführt, wenn man die auf einander fol„genden Aenderungen einer Gröſse betrachtet, die dem Gesetze „der Stätigkeit unterworfen ist. So z. B. wächst die Zeit „durch Stufen, die kleiner sind als jeder angebbare Zeitraum, „mag dieser auch noch so klein seyn. Die Räume, welche „durch die verschiedenen Punkte eines Körpers durchlaufen

„werden, wachsen ebenfalls durch unendlich kleine Zunah-
„men, da kein Punkt auf andere Weise aus einer Lage in
„die andere kommen kann, und man keine, wenn auch noch
„so kleine, Distanz zwischen zwei auf einander folgenden
„Lagen angeben kann. Die unendlich kleinen Gröfsen
„sind daher in der Wirklichkeit vorhanden (ont
„donc une existence réelle) und nicht ein blofses Hülfsmittel
„(un moyen d'investigation), das die Mathematiker erdacht
„haben." Hätte der Verf. blos gesagt, dafs die Idee der Continuität auch auf die Idee des unendlich Kleinen führe, so liefse sich nichts dagegen erinnern. Aber das unendlich Kleine soll auch in der Wirklichkeit vorhanden seyn, und warum? weil Zeit und Raum durch unendlich kleine Stufen wachsen. Frägt man aber, sind Zeit und Raum Gröfsen, welche wachsen? so antwortet der Verf. (§. 112), Zeit und Raum werden nicht erklärt (on ne définit ni le temps ni l'espace). Wir sind gewohnt, die Begriffe der Zeit und des Raumes als Denkformen anzusehen, die aufser uns keine Realität haben, womit denn der Beweis der Realität des unendlich Kleinen von selbst zerfällt.

Ich will nun in der Kürze die Grundlagen der rein mathematischen Behandlung der Statik andeuten, indem ich noch später die Dynamik berühren werde; es versteht sich von selbst, dafs eine ausführliche Behandlung hier nicht gegeben werden kann, die ein ganzes Buch erfordern würde.

1) Die Stelle, in welcher sich ein Punkt, eine Linie, eine Ebene oder ein geometrischer Körper im Raume befindet, nennt man den Ort derselben. Bleiben sie an demselben Orte, so sagt man, sie sind in Ruhe, verändern sie ihren Ort, so sagt man, sie sind in Bewegung.

2) Man denke sich, ein Punkt sey auf einer Linie in Bewegung, die Linie selbst sey auf einer Ebene in Bewegung, so nimmt der Punkt auch an dieser zweiten Bewegung Antheil, und man sagt alsdann, er habe zwei Bewegungen; ist die Ebene ebenfalls in Bewegung, so nimmt der Punkt auch an dieser dritten Bewegung Antheil, und man sagt alsdann, er habe drei Bewegungen u. s. w.

3) Ist ein Punkt, der mehrere Bewegungen hat, in Ruhe,

so sagt man, er sey im Gleichgewichte. Ebenso sagt man von einer Linie, einer Ebene, einem Körper, sie seyen im Gleichgewichte, wenn sie in Ruhe bleiben, während alle oder einige Punkte derselben verschiedene Bewegungen haben.

4) Wenn ein stetig bewegter Punkt in gleichen Zeiten gleiche Räume durchlauft, so sagt man, seine Bewegung sey gleichförmig.

5) Hat ein Punkt zwei gleiche, aber der Richtung nach gerade entgegengesetzte Bewegungen, so heben sich diese Bewegungen auf und der Punkt bleibt in Ruhe, hat er zwei ungleiche, aber gerade entgegengesetzte gleichförmige Bewegungen, so bewegt er sich nach der Richtung der größeren, und durchlauft in jeder Zeiteinheit einen Raum, der dem Unterschiede der Räume gleich ist, die er, vermöge einer jeden dieser zwei Bewegungen, durchlaufen würde. Hat er zwei gleichförmige Bewegungen nach derselben Richtung, so durchlauft er in jeder Zeiteinheit einen Raum, welcher der Summe der Räume gleich ist, die er vermöge einer jeden dieser zwei Bewegungen durchlaufen würde.

6) Ein Punkt bewege sich gleichförmig auf der Linie AB (Fig. 86), so daß er in der Zeiteinheit von A nach B fortrückt, während dieser Zeit bewege sich die Linie AB parallel mit sich selbst, so daß jeder Punkt derselben gleichförmig einen Raum $= AC$ durchlauft und sie am Ende dieser Zeit in die Lage CD gekommen ist, so hat der Punkt A die zwei Bewegungen AB und AC und er wird, vermöge derselben, während der Zeiteinheit, die Diagonale AD des Parallelogramms $ABCD$ gleichförmig durchlaufen.

Denn da der Punkt A am Ende der Zeiteinheit in B und der Punkt B am Ende dieser Zeit in D ist, so wird auch der Punkt A am Ende der Zeiteinheit in D seyn. Man nehme nun an, es habe der Punkt A im $n$ten Theile der Zeiteinheit den Raum AE auf der Linie AB durchlaufen, so wird auch, wenn während dieser Zeit die Linie AB in die Lage FG gekommen ist, AF der $n$te Theil von AC seyn.

Folglich ist

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{AE}{CD}.$$

Zieht man aber die Diagonale AD, welche die Linie FG im Punkte K schneidet, so hat man

$$\frac{AF}{AC} = \frac{FK}{CD},$$

folglich ist $FK = AE$, und der Punkt A befindet sich daher am Ende jedes $n$ten Theils der Zeiteinheit in einem Punkte K der Diagonale AD. Da ferner

$$\frac{AK}{AD} = \frac{AF}{AC},$$

so folgt hieraus, dafs der Punkt A die Diagonale AD gleichförmig durchlauft.

Es ist hiernach einerlei, ob man sagt, der Punkt A habe die zwei Bewegungen AB und AC, oder ob man sagt, er habe die Bewegung AD. Dies drückt man auch so aus, dafs man sagt: die Bewegung AD kann in die Bewegungen AB und AC zerlegt werden, und die Bewegungen AB und AC können in die Bewegung AD zusammengesetzt werden. Die Bewegung AD nennt man die Mittelbewegung der Bewegungen AB und AC.

Der vorstehende Satz von der Zusammensetzung zweier Bewegungen, den wir hier ohne allen Aufwand von Calcul bewiesen haben, entspricht dem Satze vom Parallelogramme der Kräfte, und es lassen sich aus demselben alle Sätze der mathematischen Bewegungslehre ableiten, die denjenigen analog sind, welche Poisson in den drei ersten Kapiteln gefunden hat, und zwar ganz auf dieselbe Weise, wenn man nur überall statt der Kräfte die Bewegungen betrachtet.

II.

Der Begriff des Schwerpunktes, wie ihn der Verf. in §. 63 giebt, beruht auf der Eigenschaft der Schwere, welche allen auf der Erde befindlichen Körpern zukommt. Es versteht sich daher, dafs dieser Begriff in der rein mathematischen Bewegungslehre nicht vorkommen kann. Indessen ist es auch nicht schwer, den Schwerpunkt ohne Beihülfe einer physikalischen Eigenschaft zu definieren. Man kann nemlich einen, dem in §. 56 abgeleiteten Satze vom Mittelpunkte der parallelen Kräfte, ganz analogen Satz beweisen,

welcher folgendermaſsen lautet. Verschiedene auf veränderliche Weise mit einander verbundene Punkte haben beliebige gleichförmige und parallele Bewegungen. Die Räume, welche diese Punkte einzeln, vermöge dieser Bewegungen, in der Zeiteinheit durchlaufen würden, seyen bezüglich $P, P', P''...$, ihre Summe R, die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte seyen bezüglich $x, y, z, x' y', z', x'', y'', z''...$, so kann man immer einen Punkt angeben, dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1 so beschaffen sind, daſs

$$\left.\begin{aligned} Rx_1 &= Px + P'x' + P''x''... \\ Ry_1 &= Py + P'y' + P''y''... \\ Rz_1 &= Pz + P'z' + P''z''... \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ist; diesen Punkt nennt man den Mittelpunkt der parallelen Bewegungen. Der Beweis kann ganz wie bei Poisson geführt werden. Haben alle Punkte einer Raumgröſse gleichförmige Bewegungen nach parallelen Richtungen, so läſst sich daher immer ein Punkt angeben, der der Mittelpunkt der parallelen Bewegungen ist; diesen Punkt nennt man den Schwerpunkt.

Man denke sich, es sey eine Linie, deren Länge s ist, in mehrere Theile $a, a', a''...$ getheilt, seyen $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''...$ bezüglich die Coordinaten der Schwerpunkte dieser Theile und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Schwerpunktes von s, ferner bezeichne $p, p', p''...$ bezüglich die Summe der Räume, welche die in $a, a', a''...$ enthaltenen Punkte, vermöge ihrer parallelen Bewegungen, gleichförmig durchlaufen, und sey $P = p + p' + p''...$, so ist nach den Formeln (1)

$$\begin{aligned} Px_1 &= px + p'x' + p''x''... \\ Py_1 &= py + p'y' + p''y''... \\ Pz_1 &= pz + p'z' + p''z''.... \end{aligned}$$

Nimmt man nun an, daſs $p, p', p''...$ bezüglich $a, a', a''...$ proportional sind, so hat man auch

$$\left.\begin{aligned} sx_1 &= ax + a'x' + a''x''... \\ sy_1 &= ay + a'y' + a''y''... \\ sz_1 &= az + a'z' + a''z''... \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Setzt man statt der Theile $a, a', a''...$ der Linie l die

Theile v, v', v''... des Volumens V, indem man die übrigen Bezeichnungen beibehält, so hat man ebenso

$$\left.\begin{aligned} Vx_1 &= vx + v'x' + v''x''\ldots \\ Vy_1 &= vy + v'y' + v''y''\ldots \\ Vz_1 &= vz + v'z' + v''z''\ldots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

und wenn man N eine Oberfläche, n, n', n''... ihre Theile nennt, so hat man, mit Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen,

$$\left.\begin{aligned} Nx_1 &= nx + n'x' + n''x''\ldots \\ Ny_1 &= ny + n'y' + n''y''\ldots \\ Nz_1 &= nz + n'z' + n''z''\ldots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Man findet nun, ohne Hülfe des unendlich Kleinen, den Schwerpunkt einer Linie, Oberfläche und eines Volumens auf folgende Weise. Ich mufs voraussetzen, dafs im Allgemeinen die Lagrange'sche Behandlung der Differentialrechnung bekannt ist, und werde mich, der Kürze halber, der Bezeichnungen des Verf. bedienen.

Sey s der gegebene Bogen einer krummen Linie, x_1, y_1, z_1 die Coordinaten seines Schwerpunktes, so hat man, nach Formel (2),

$$sx_1 = ax + a'x' + a''x''\ldots,$$

läfst man s und Δs wachsen, wodurch x_1 in $x_1 + \Delta x_1$ übergeht, so hat man

$$(s + \Delta s)(x_1 + \Delta x_1) = ax + a'x' + a''x''\ldots + \Delta s \,.\, r,$$

oder $\quad s \,.\, \Delta x_1 + x_1 \,.\, \Delta s + \Delta s \,.\, \Delta x_1 = \Delta s \,.\, r,$

wenn man r die Coordinate des Schwerpunktes von Δs, nach der Axe der x, nennt, da aber x die Coordinate des Endpunktes M des Bogens s ist (vgl. §. 69), so ist r nothwendig zwischen x und der Coordinate des Endpunktes von Δs, d. h. zwischen x und $x + \Delta x$ enthalten,

also ist $\quad s \,.\, \Delta x_1 + x_1 \,.\, \Delta s + \Delta s \,.\, \Delta x_1 > x \,.\, \Delta s$
$$< (x + \Delta x)\Delta s,$$

entwickelt man die Differenzen nach Differentialreihen, so müssen die ersten Differentiale einander gleich seyn, folglich ist

$$s\,dx_1 + x_1\,ds = x\,ds$$

und
$$sx_1 = \int x\,ds;$$

ist der Bogen s, zwischen den Gränzen s^0 und s_1 genommen, gleich l, so hat man

$$lx_1 = \int_{s_0}^{s_1} x ds.$$

Auf ähnliche Weise findet man den Werth von ly_1 und lz_1.

Das Differential einer Oberfläche ist $dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}$ (vgl. §. 75). Soll nun der Schwerpunkt einer Oberfläche N gefunden werden, so seyen dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1. Alsdann hat man, nach Formel (4),

$$Nx_1 = nx + n'x' + n''x''...$$

wächst N um $\triangle N$, also x_1 um $\triangle x_1$, so hat man

$$(N+\triangle N)(x_1+\triangle x_1) = nx + n'x' + n''x''... + \triangle N.r$$

oder $\triangle N.x_1 + N.\triangle x_1 + \triangle N.\triangle x_1 = \triangle N.r,$

wenn r die nach der Axe der x genommene Coordinate des Schwerpunktes von $\triangle N$ bedeutet, nun ist $r > x$
$< x + \triangle x$

also $dN.x_1 + Ndx_1 = dN.x$

und $N.x_1 = \int xdN = \int x.dx.dy\sqrt{1+p^2+q^2}.$

Dieselbe Betrachtung wiederholt sich, wenn man den Schwerpunkt eines Volumens sucht, sobald man als bekannt voraussetzt, dafs das Differential des Volumens $= dx\,dy\,dz$ ist, weswegen ich die genauere Entwickelung übergehe.

III.

In der ersten Ausgabe dieses Werkes sagt der Verf. §. 193, zur Begründung der Mechanik seyen zwei Hypothesen erforderlich, die Trägheit der Materie und das Gesetz der Proportionalität der Geschwindigkeiten und der Kräfte; er bemerkt dort, dafs in dieser Rücksicht die Theorie der Bewegung weniger abgeschlossen sey, als die des Gleichgewichtes, indem letztere von gar keiner Voraussetzung abhängig sey, was freilich wie ich mich früher zu zeigen bemüht habe, bei der Behandlung des Verf. nicht ganz richtig ist. In der zweiten Ausgabe läfst er nur den Satz von der Trägheit der Materie als einen Erfahrungssatz gelten, die Proportionalität der Geschwindigkeiten und Kräfte will er dagegen in §. 116 beweisen. Es scheint mir aber erstens, dafs dieser Beweis durchaus unverständlich ist, und zweitens, dafs sich der Satz überhaupt nicht a priori beweisen läfst. Ich mufs noch zuvor bemerken, dafs Poisson

hier unter Geschwindigkeit, wie gewöhnlich, den Raum versteht, den der Körper in der Zeiteinheit durchlaufen müfste, wenn seine Bewegung in einem bestimmten Zeitmomente gleichförmig würde. Früher §. 112 bemerkt er aber, dafs dies nur das Maafs der Geschwindigkeit sey, die eigentliche Geschwindigkeit eines Punktes sey ein Ding, das sich in dem Punkte befindet (qui réside dans ce point), von dem er getrieben wird, das ihn von einem ruhenden Punkte unterscheidet und keiner anderen Erklärung fähig ist (qui n'est pas susceptible d'une autre définition). Es ist aber nicht wohl einzusehen, zu welchem Zwecke der Verf. den Körper von diesem Etwas, das nicht einmal weiter erklärt werden kann, treiben läfst. Nimmt man einmal an, dafs eine Kraft den Körper, auf eine uns unbekannte Weise, in Bewegung setzt, wozu soll sich noch in dem Körper selbst etwas, was ihn treibt, befinden, da doch der Verf. selbst am Ende des §. 113 sagt, dafs jeder materielle Punkt in der Wirkung anderer materieller Punkte, nie aber in sich selbst das Princip seiner Bewegung findet? Was nun den erwähnten Beweis der Proportionalität der Geschwindigkeiten und Kräfte betrifft, so ist sein Wesentliches in Folgendem enthalten. Ein materieller Punkt hat am Ende der Zeit t den Raum x durchlaufen und die Geschwindigkeit v erlangt. In diesem Zeitmomente wirken zwei gegebene Kräfte f und f' gleichzeitig auf den Körper nach der Richtung seiner Bewegung, so dafs diese Kräfte dem Punkte bezüglich die unendlich kleinen Geschwindigkeiten u und u' mittheilen würden, wenn jeder allein während der unendlich kleinen Zeit τ wirkte, so werden die vereinten Kräfte $f+f'$ die Geschwindigkeit $u+u'$ hervorbringen, so dafs der Punkt am Ende der Zeit $t+\tau$ die Geschwindigkeit $v+u+u'$ hat. "Denn" sagt der Verf., "die Zunahme der Geschwindigkeit kann nur „von seiner Lage und seiner Geschwindigkeit, die er während „der Zeit τ hat, abhängen, es müfste also die Kraft f' auf „diese beiden Stücke Einflufs haben, wenn sie die Geschwin- „digkeit, welche die Kraft f hervorbringt, modificieren sollte. „Da sich aber während der Zeit τ der Abstand des Körpers „von einem festen Punkte und seine Geschwindigkeit nur um „unendlich Kleines ändern kann, was man im Verhältnisse „zu x und v vernachlässigen kann und die Aenderungen des

„Abstandes dieses Punktes von anderen festen oder beweg-
„lichen Punkten, von welchen die Kräfte f und f' ausgehen
„können, ebenfalls vernachlässigt werden dürfen, so kann die
„Geschwindigkeit, welche die Kraft f während der Zeit τ
„hervorbringt, auf keine Weise durch die gleichzeitige Wir-
„kung der Kraft f modificiert werden, und ebenso ist es in
„Beziehung auf die von der Kraft f' herrührende Geschwin-
„digkeit, die nicht durch die Wirkung von f modificiert wer-
„den kann." Es ist aber gar nicht einzusehen, wie aus dem Umstande, dafs die unendlich kleinen Veränderungen, welche die Kräfte f und f' einzeln hervorbringen, gegen endliche Gröfsen vernachlässigt werden können, folgen sollte, dafs sie ihre wechselseitigen Wirkungen nicht modificieren können; wenn z. B. die Kraft $f + f'$ die Geschwindigkeit $u + u' + \mu$ hervorbringen würde, wo μ ebenfalls eine unendlich kleine Zeit wäre, würde diese Geschwindigkeit nicht dennoch im Verhältnisse zu v verschwinden? Der Grund aber, weswegen es überhaupt unmöglich ist, diese Proportionalität der Kräfte und Geschwindigkeiten a priori zu beweisen, scheint mir Poisson selbst in der ersten Ausgabe schon genügend angedeutet zu haben. Die Vergleichung der Intensität der Kräfte steht nemlich mit den Begriffen der Geschwindigkeit, die eine Kraft hervorbringt, in gar keiner Verbindung. Eine Kraft hat z. B. die doppelte Intensität einer anderen, wenn sie aus der Vereinigung zweier anderer entstanden ist, die sich, wenn ihre Richtungen einander gerade entgegengesetzt wären, aufheben würden. Hieraus folgt aber gar nicht, dafs diese Kraft bei gleichförmiger Geschwindigkeit den bewegten Punkt durch einen doppelt so grofsen Raum führen wird, als die einfache, sondern es wäre jedes andere Verhältnifs zwischen Kraft und Geschwindigkeit eben so gut denkbar. Die Geschwindigkeit steht allerdings mit der Intensität der Kraft in einem gewissen Zusammenhange, von welcher Art aber dieser Zusammenhang sey, d. h. welche Function der Zahl, die die Intensität der Kraft angiebt, die Geschwindigkeit sey, läfst sich a priori gar nicht bestimmen, da wir die Natur der Kräfte gar nicht kennen, und mufs durch die Erfahrung ermittelt oder durch eine Hypothese bestimmt werden.

Bei einer rein mathematischen Behandlung der Mechanik

kommen solche Schwierigkeiten gar nicht vor, da sie weder Materie noch Kräfte in den Kreis ihrer Betrachtungen zieht. Sie beruht auf folgenden Grundsätzen:

1) Bei der gleichförmigen Bewegung (s. Zus. I.) ist der Weg, den ein Punkt durchlauft, der Zeit, die während seiner Bewegung verfliefst, proportional. Die Geschwindigkeit eines gleichförmig bewegten Punktes nennt man den Raum, den er in der Zeiteinheit durchlauft. Ist daher die Geschwindigkeit eines Punktes $= c$, und t die Zeit, die während der Beschreibung des Raumes s verfliefst, so hat man

$$s = ct.$$

2) Sind die Räume, welche ein stätig bewegter Punkt in gleichen Zeiten durchlauft, ungleich, so sagt man, seine Bewegung sey veränderlich.

3) Die Geschwindigkeit eines veränderlich bewegten Punktes in einem bestimmten Augenblicke nennt man den Raum, den er in der Zeiteinheit durchlaufen würde, wenn er von diesem Augenblicke an mit der Bewegung, die er hat, sich gleichförmig fortbewegte. Sey x der Raum, den der Punkt am Ende der Zeit t durchlaufen hat, und v seine Geschwindigkeit in diesem Augenblicke. Wächst t um $\triangle t$, so wächst x um $\triangle x$ und v um $\triangle v$. Da nun die Geschwindigkeit während der Zeit $\triangle t$ fortwährend wächst und am Anfange dieser Zeit $= v$, am Ende derselben $= v + \triangle v$ ist, so hat man

$$\triangle x > v \triangle t$$
$$\triangle x < (v + \triangle v) \triangle t = v \triangle t + \triangle v . \triangle t,$$

folglich, wenn man $\triangle x$, $\triangle t$, $\triangle t$ nach Differentialreihen entwickelt,

$$dx = v dt$$

und $$v = \frac{dx}{dt}.$$

4) Eine gleichförmig veränderliche Bewegung nennt man diejenige, bei welcher die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleich viel zunimmt. Die Bewegung eines Punktes, der am Ende der Zeit t die Geschwindigkeit v erreicht hat, sey so beschaffen, dafs diese Geschwin-

digkeit, wenn er nun mit gleichförmig veränderter Bewegung fortrücken würde, in der nächsten Zeiteinheit um φ zunehmen würde, geht t in $t + \Delta t$ über, so geht v in $v + \Delta v$ über, und die Geschwindigkeit $v + \Delta v$ würde, wenn der Punkt am Ende der Zeit $t + \Delta t$ mit gleichförmig veränderter Bewegung fortgehen würde, in der nächsten Zeiteinheit um $\varphi + \Delta \varphi$ zunehmen. Daher ist

$$\Delta v > \varphi \Delta t$$
$$< (\varphi + \Delta \varphi) \Delta t,$$

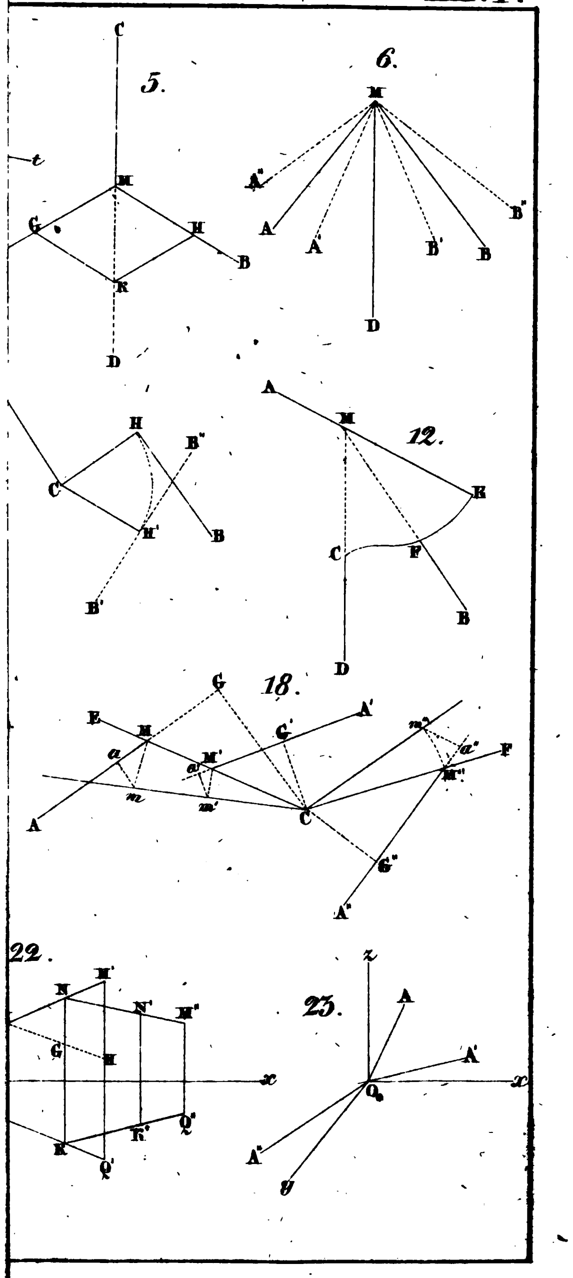
oder, wenn man Δv, $\Delta \varphi$, Δt durch Differentialreihen ausdrückt,

$$dv = \varphi dt$$
$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

Diesen Werth φ nennt man die beschleunigende Kraft (wobei aber an keine physische Kraft gedacht werden darf).

Auf diesen Sätzen beruht die ganze Mechanik eines bewegten Punktes. Um die Mechanik eines bewegten Körpers behandeln zu können, müfste man noch den Begriff der Masse auf rein mathematischem Wege erörtern, was ebenfalls angeht, hier aber zu weit führen würde. Ich begnüge mich, zum Schlusse zu bemerken, dafs Lehmann in seiner Schrift "Anfangsgründe der höheren Mechanik" sehr gute Vorarbeiten zu einer Darstellung der mathematischen Bewegungslehre geliefert hat.

TAF. I.



5.
C
M
G
H
B
K
D
t
6.
M
A''
A
A'
D
B'
B
B''
H
B''
C
H'
B
B'
12.
A
M
E
C
F
B
D
18.
G
E
M
a
m
M'
m'
G'
A'
C
A
m''
a''
F
M''
G''
A''
22.
N
M'
N'
M''
G
H
x
K
K'
Q'
Q''
23.
z
A
A'
x
O
A''
y